

Тема:

Численные методы при моделировании и обработке результатов эксперимента.

Цели:

- ☑ Дать понятия о способах и методах приближенных решений;
- ☑ О возможности получения решения с заданной точностью.

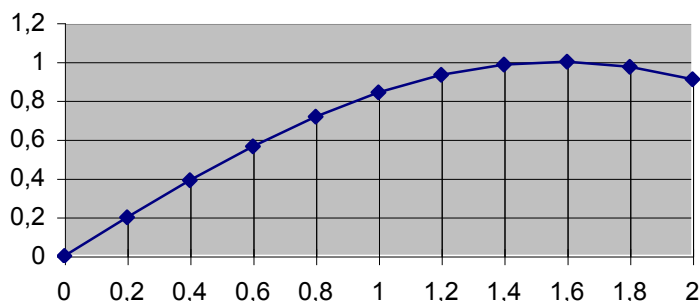
Учащиеся должны знать:

- ✓ Способы и методы получения приближенных решений;
- ✓ Методы решения с заданной точностью;
- ✓ Достоинства и недостатки различных методов приближенных решений.

Широкое распространение ЭВМ произошло именно потому, что потребовалось такое множество вычислений, на которое человеку требуется во много раз больше времени. Для вычисления корней уравнений, замысловатых площадей, которые нельзя подсчитать по формулам.

I. Приближенное вычисление площадей. (метод интегралов)

1) Метод прямоугольников.



Вычислить интеграл

$$\int_0^2 \sin x \, dx \text{ . Отрезок } [a, b]$$

разбивается на несколько частей, обозначим  $h = (b - a)/N$ , где  $N$  – количество частей, на которые мы делим отрезок. И вычислим площадь каждого прямоугольника.  $x_0 = a$ ;  $x_1 = x_0 + h$ ; ...;

$S_1 = f(x_1) * h$ ;  $S_2 = f(x_2) * h$ ; ...; ( метод правых прямоугольников)

$S_1 = f(x_0) * h$ ;  $S_2 = f(x_1) * h$ ; ...; ( метод левых прямоугольников)

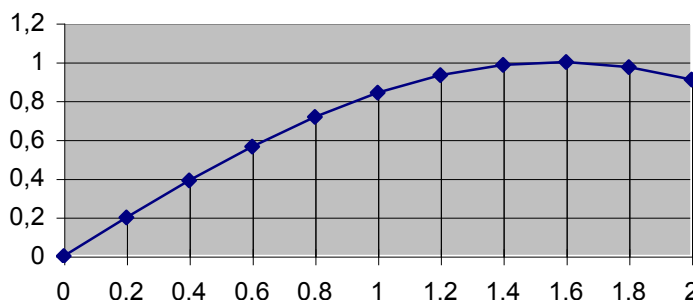
$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$  .

Оба метода дают приближенное значение площади, точность вычислений можно повысить за счёт увеличения числа прямоугольников.

2) Метод трапеций

Аналогично отрезок  $[a, b]$  разбивается на несколько частей, обозначим  $h = (b - a)/N$ , где  $N$  – количество частей. И вычислим площадь трапеции.

$x_0 = a$ ;  $x_1 = x_0 + h$ ; ...;



*Ст. Новопокровская Краснодарский край*

$$S_1 = (f(x_0) + f(x_1))/2 * h;$$

$$S_2 = (f(x_1) + f(x_2))/2 * h; \dots;$$

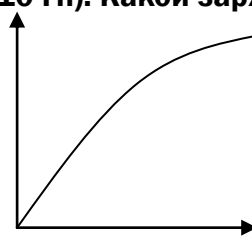
$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n.$$

**Задачи:**

- a)  $f(x) = x^2/$  [ 1; 3 ]  $n = 6$  (4,33)
- b)  $f(x) = x^2 - 4$  [ 2; 4 ]  $n = 6$  (10,7)
- c)  $f(x) = -x^2 + 4$  [ 0; 2 ]  $n = 6$  (5,3)
- d)  $f(x) = -x^2 + 9$  [ 1; 3 ]  $n = 6$  (9,3)
- e)  $f(x) = (x - 2)^2$  [ 0; 2 ]  $n = 6$  (2,6)
- f)  $f(x) = 1/(x + 1)$  [ 0; 1 ]  $n = 10$
- g)  $f(x) = 1/(x^2 + 1)$  [ 0; 1 ]  $n = 10$
- h)  $f(x) = \cos x/(x + 2)$  [ 0,4; 1,2 ]  $n = 8$
- i) Вычислить площадь фигуры при следующих данных:

$f(x)$	$a$	$b$	$n$
$1/(x^3 - 1)$	2,1	3,6	7
$\cos x/2$	0,8	1,2	8
$x^2 + 1$	-1	3	9
$(x^2 + 4)^3$	-1	1	10
$\sin^3 x$	0	$\pi/2$	10

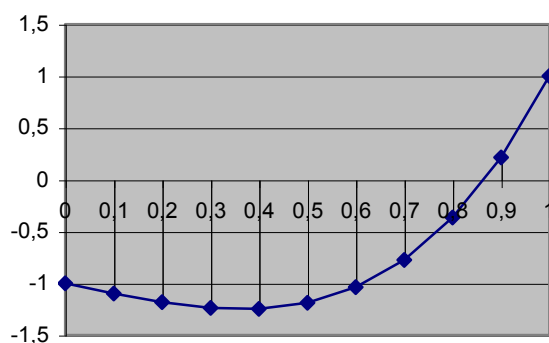
- j) Дана электрическая цепь, где  $E$  – ЭДС источника тока (600 В),  $R$  – сопротивление (180 Ом),  $L$  – индуктивность (10 Гн). Какой заряд протечет в цепи за время  $t$  от 0 до 0,2 сек, если зависимость силы тока от времени описывается формулой  $I = E(1 - e^{-Rt/L})/R$  и изображена на графике. Заряд  $Q$  определяется заштрихованной площадью.



**II. Метод половинного деления.**

Пусть уравнение  $f(x) = 0$  имеет на отрезке  $[a, b]$  единственный корень, причем функция  $f(x)$  на этом отрезке непрерывна.

Точностью вычисления называется разность между точным и приближенным решением. Корень уравнения  $f(x) = 0$  – это точка пересечения графика функции  $f(x)$  с осью  $OX$ . Задачу можно решить графически, если  $f(x) = 0$  преобразуется к виду  $f_1(x) = f_2(x)$



*Ст. Новопокровская Краснодарский край*

(х), в этом случае корень уравнения точка пересечения  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ . Чаще же графически определяется только отрезок (интервал), в котором находится корень уравнения  $f(x) = 0$ , и далее необходимо определить сам корень с заданной точностью. Пусть  $f(a) > 0$  и  $f(b) < 0$  (или наоборот). Разделим отрезок  $[a, b]$  пополам точкой  $c = (a + b)/2$ . Если  $f(c)$  не равно 0, то возможны два случая: либо  $f(x)$  меняет знак на отрезке  $[a, c]$ , либо на отрезке  $[c, b]$ .

Выбираем тот отрезок, на котором функция меняет знак, и вновь делим его пополам. Процесс продолжаем до тех пор, пока не будет получен отрезок, не превышающий требуемую точность вычислений  $\epsilon = 0,001$  (например).

**Задачи:**

1) Решить с точностью  $\epsilon = 0,0003$

$$2/(x - 3) = (x + 5)/2 - 1 \quad [2, 4]$$

$$1 - |x| = 0,5$$

$$2/(x - 2) = (x + 1)/(x^2 - 4)$$

$$(1 - x)^{1/2} - \operatorname{tg} x = 0 \quad [0, 1]$$

$$\sin x^2 + \cos x^2 - 10x = 0 \quad [0, 1]$$

$$x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0 \quad [0, 1]$$

$$x^3 + 2x - 7 = 0 \quad [1, 2]$$

$$x^3 - 2x - 5 = 0 \quad [1, 2]$$

$$x^4 - 2x - 4 = 0 \quad [1, 2]$$

$$x^5 - x - 2 = 0 \quad [1, 2]$$

2) Определить отрезок нахождения корня и решить с точностью 0,001

$$x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 2 = 0$$

$$x^3 + 4x - 6 = 0$$

$$x^2 + x - 5 = 0$$

$$3x - \cos x - 1 = 0$$

$$x - \sin x = 0,25$$

$$x^3 + 0,4x + 0,6x - 1,6 = 0$$

$$x + 0,1x^2 + 0,4x - 1,2 = 0$$

**III. Метод последовательного приближения (вычисление корня), вычисление приближенных сумм.**

1)  $y_0 = 1$ ;  $y_n = 0,5(y_{n-1} + x/y_{n-1})$ , пока  $|y_n - y_{n-1}| < \epsilon$ , точность  $\epsilon = 0,0001$ .

Вычислить  $\sqrt{243}$ ;  $\sqrt{173}$ ;  $\sqrt{427}$ ;  $\sqrt{628}$ ;  $\sqrt{989}$ .

2)  $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots + x^n/n!$

3)  $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \dots + (-1)^{2n-1}x^{2n-1}/(2n-1)!$

4)  $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \dots + (-1)^{2n-1}x^{2n}/2n!$

Точность считается достигнутой, если  $|y_n - y_{n-1}| < \epsilon$ . Сравнить приближенную сумму с вычисленной встроенной функцией.

**IV. Метод итераций.**

Пусть дано уравнение  $f(x) = 0$ ,  $f(x)$  – непрерывная функция. Требуется определить его корни. Заменяем уравнение равносильным  $x = F(x)$  или  $x = x + q f(x)$ . Выберем на отрезке  $[a, b]$  произвольную точку  $x_0$  и вычислим  $x_1 = F(x_0)$ ,  $x_2 = F(x_1)$ , ...,  $x_n = F(x_{n-1})$ . Этот метод последовательного вычисления чисел  $x_n$  называется методом итераций.

*Ст. Новопокровская Краснодарский край*

Процесс продолжается до тех пор, пока  $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$ .

**Задачи:**

- 1) Найти корни уравнения  $x = \sin x + 0,25$  с точностью 0,0004 на отрезке  $[1,1; 1,3]$ .
- 2) Найти наибольший положительный корень уравнения  $x = (1000 - x)^{1/3}$  с точностью 0,00001
- 3) Найти корни уравнения  $x = 0,5 (\sin x^2 - 1)$  с точностью 0,00001 на отрезке  $[0,5; 10]$ .
- 4) Решить уравнение  $x = \cos x$  на отрезке  $[0, 1]$  с точностью 0,0001. Подсчитать количество итераций.
- 5) Решить уравнение  $x = 2 - \sin (1/x)$  на отрезке  $[1,2; 2]$  с точностью 0,00001. Подсчитать количество итераций.
- 6) Отделите корни уравнения и уточните один из них:
  - a)  $x = -0,1x^3 + 0,2x^2 + 0,3x - 0,3$
  - b)  $x = (1/x) - (x + 1) + x$
  - c)  $x = -1,2x + x + 2^x$
  - d)  $x = -x^3 + 3x - 2$
  - e)  $x = 1 - \cos x$
  - f)  $x = \sin x + x - x^3$
  - g)  $x = -x^3 - 2x - 1$
  - h)  $x = x^2 + x - \sin 0,5x - 1$

**V. Метод интерполирования.**

На отрезке  $[a, b]$  заданы точки  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые называются узлами интерполяции, и значения некоторой функции  $f(x)$  в этих точках:  $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$ . Требуется построить функцию  $F(x)$ , принимающую в узлах те же значения, что и  $f(x)$ . Проще всего вместо произвольной функции искать многочлен  $P_n(x)$ , степени не выше  $n$ , принимающий те же значения в узлах интерполяции, что и  $f(x)$ .

Для нахождения  $P_n(x)$  построим для начала многочлен  $P_i(x)$  такой, что он равен 0 во всех узловых точках, кроме  $x_i$ , где  $P_i(x_i) = y_i$ . То есть  $P_i(x) = C_i (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$ , где  $C_i$  - постоянный коэффициент.

Полагая  $x = x_i$  и учитывая, что  $P_i = y_i$ , получим  $C_i (x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) = y_i$ . Отсюда  $C_i = y_i / ((x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n))$  и получаем, что  $P_i(x) = y_i (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n) / ((x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n))$ .

Сам многочлен  $P_n(x)$  состоит из суммы многочленов, каждый из которых = 0 в узлах интерполяции, кроме  $x_i$  и  $P_i(x_i) = y_i$ .

$$P_n(x) = \sum y_i (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n) / ((x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n))$$
 для  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

**VI.**

Котова Галина Петровна МБОУ СОШ № 10

---

*Ст. Новопокровская Краснодарский край*