





Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский

# МАТЕМАТИКА

# ВСЕРОССИЙСКИЕ

# ОЛИМПИАДЫ

Выпуск 2

Москва  
«Просвещение»  
2009

УДК 372.8:51  
ББК 74.262.21  
А23

*Серия «Пять колец» основана в 2007 г.*

Под общей редакцией  
**С. И. Демидовой, И. И. Колисниченко**

**Агаханов Н. Х.**

**А23** Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 2 /  
Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский; [под общ. ред.  
С. И. Демидовой, И. И. Колисниченко]. — М. : Про-  
свещение, 2009. — 159 с. : ил. — (Пять колец). —  
ISBN 978-5-09-018636-0.

В книге рассказывается о структуре вариантов Всероссийской олимпиады школьников по математике, приводится содержание (тематика) заданий различных этапов олимпиады, проиллюстрированное задачами с решениями. Приведены комплекты заданий Всероссийской олимпиады 2007/2008 учебного года.

**УДК 372.8:51  
ББК 74.262.21**

**ISBN 978-5-09-018636-0**



© Издательство «Просвещение», 2009  
© Художественное оформление.  
Издательство «Просвещение», 2009  
Все права защищены

<b>Введение . . . . .</b>	<b>4</b>
---------------------------	----------

## **глава 1. Содержание олимпиады**

Цели математических олимпиад . . . . .	7
Этапы олимпиады . . . . .	8
Структура варианта (заданий) . . . . .	10
Содержание второго и третьего этапов математической олимпиады школьников . . . . .	11
6—7 классы . . . . .	—
8—9 классы . . . . .	28
10—11 классы . . . . .	59
Содержание заключительных этапов математической олимпиады школьников . . . . .	92

## **глава 2. Олимпиада 2007/2008 учебного года**

III этап (региональный) . . . . .	106
IV этап (федеральный окружной) . . . . .	123
V этап (заключительный) . . . . .	137

<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>157</b>
------------------------------------	------------

Основными целями и задачами Всероссийских олимпиад школьников являются выявление и развитие у обучающихся творческих способностей и интереса к научно-исследовательской деятельности, создание необходимых условий для поддержки одаренных детей, пропаганда научных знаний.

Олимпиады являются важнейшим средством стимулирования и мотивации интеллектуального развития учащихся, поддержки одаренных детей, содействия в их профессиональном самоопределении и продолжении образования, профессиональном росте и самореализации ищущих творческих преподавателей.

Данная книга посвящена содержанию Всероссийских олимпиад школьников по математике.

Она адресована школьникам, а также учителям и методистам, разрабатывающим задания для проведения математических олимпиад начальных этапов. Книгу могут использовать также учителя, руководители кружков и факультативов, сами учащиеся, ведущие подготовку к математическим олимпиадам различного уровня, к другим математическим соревнованиям.

Книга рекомендуется для подготовки комплектов заданий для проведения олимпиад начальных уровней, а также для тематического планирования кружковых и факультативных занятий по математике.

Математические олимпиады играют важную роль в системе школьного образования. Математика в школе является связующим звеном для всех предметов естественно-математического цикла. И дело здесь не только в том, что число является основой фиксации эмпирического знания, но и в том, что науки изучают математические модели реальных природных объектов, а математический аппарат позволяет исследовать эти модели и делать практические выводы.

Математика в ряду школьных дисциплин не только предмет, в котором учащиеся должны овладеть набором обязательных знаний, но и предмет, изучение которого прививает культуру логических рассуждений. Только в математике задание может начинаться со слов: «Докажите, что...», отражая обязательность требования построения логической конструкции при решении математической задачи. Эта культура рассуждений позволяет добиваться успехов как в естественных науках, так и в гуманитарных.

Потому математика является одним из обязательных вступительных испытаний в вузах самого разного профиля.

В то же время введение Единого государственного экзамена по математике меняет цели и методику изучения этого предмета в школе. Во главу угла здесь в первую очередь ставится овладение выпускниками алгоритмами решения вычислительных задач. И логика решения задачи смещается в сторону нахождения цепочки простых объектов, к которым нужно применить вычислительные навыки. В связи с этим возрастает роль математических олимпиад, остающихся основным инструментом поиска и отбора математически одаренных (и, следовательно, способных строить сложные логические конструкции) школьников.

Школьная математика складывается из трех частей. Первая часть — собственно школьная математика, в которой изучаются, а в большей степени отрабатываются алгоритмы решения вычислительных задач. Изучение такой математики является обязательным, как и овладение грамматикой.

Вторая часть — так называемая «вступительная или конкурсная математика». В ней основу составляют задания, требующие не одного стандартного вычисления при решении задачи, а целой цепочки таких действий. И претензии высшей школы, предъявляемые средней по качеству подготовки выпускников, возникают оттого, что средняя школа ставит своей целью научить каждого ученика решать «одноходовые» вычислительные задачи. В то же время вузы, стремящиеся отбирать наиболее способных из числа абитуриентов, включают в задания вступительных экзаменов «многоходовые» задачи.

Наконец, третья часть — «олимпиадная математика» (далее будем применять этот термин без кавычек) основана на включении в задания таких задач, решение которых требует нестандартности мышления. Соответственно меняется и содержание заданий.

Анализ, проведенный Федеральным Государственным образовательным учреждением (ФГОУ) «Академия повышения квалификации и профессиональной переподготовки работников образования», показал, что успехи обучающихся из разных регионов на заключительных этапах Всероссийских предметных олимпиад школьников в малой степени связаны как с экономическим развитием этих регионов, так и с общим уровнем подготовки выпускников школ (например, средним показателем сдачи ЕГЭ по региону). Основную роль играет работа конкретных педагогов-энтузиастов. Именно они могут увлечь одаренного ребенка своим предметом. А качественно подобранные учебные материалы позволяют вести способного мотивированного

школьника к достижению новых успехов. В то же время хорошо составленные задания математических олимпиад (это включает в себя краткость и «элегантность» формулировок, содержание доказываемых утверждений, доступность наиболее простых заданий и возможность выполнения сложных заданий лучшими из участников олимпиад) позволяют привлечь к систематическим занятиям математикой школьников, которые еще не встретили в своей жизни талантливого увлеченного педагога.

Данная книга состоит из двух глав. Первая глава посвящена содержанию математических олимпиад, связи содержания олимпиад с целями, которые должны ими достигаться. В ней также приведены олимпиадные задания, раскрывающие содержание различных разделов школьной математики. Для удобства подготовки к олимпиаде по мере прохождения различных разделов в течение учебного года олимпиадные задания сгруппированы по темам и по классам.

Вторая глава содержит материалы 3—5 этапов XXXIV Всероссийской олимпиады школьников по математике.

# Содержание олимпиады

## ▼ Цели математических олимпиад

Изучение математики в школе в определенной степени повторяет этапы ее развития от Древних времен до современности (точнее, до построения классиками науки И. Ньютоном, Г. Лейбницем, Г. Кантором основ математического анализа). Это арифметика и наглядная геометрия с построением простейших фигур (квадрата, прямоугольника), изучаемые в начальной школе. Изучение основ алгебры и геометрии Евклида в среднем звене школьного образования. Наконец, более глубокое изучение алгебры и геометрии, овладение основами комбинаторики, теории вероятностей и математического анализа в старшем звене школы.

Система преподавания математики в школе подразумевает в основном овладение вычислительными и только в малой степени логическими алгоритмами. Напротив, основное назначение математических олимпиад — отбор талантливых школьников и учащиххся, обладающих творческими способностями, умением строить достаточно сложные логические конструкции. Такой отбор не может состоять только из проверки способностей обучению стандартным методам решения задач. Поэтому создание содержательных «олимпиадных» задач требует выхода из круга традиционных разделов школьной математики и осваиваемых ею приемов. Например, обязательным требованием к усвоению курса школьной математики является умение правильно и быстро решать квадратные уравнения. В то же время далеко не каждый школьник, способный решить без ошибок десять квадратных уравнений, сможет справиться с достаточно простым нестандартным заданием. Цели, достигаемые математическими олимпиадами, не предполагают экстенсивного изучения материала. Важно выбрать не того участника, который знает больше математических терминов и запомнил решения большего числа задач, а то-



го, кто способен самостоятельно придумать (составить) цепочку логических шагов для решения неизвестной ему прежде задачи. С другой стороны, в условиях глобализации мира, в том числе и системы образования, происходит унификация требований к профильному школьному образованию. В то же время во многих странах мира в профильных школах происходит расширение списка изучаемых разделов математики. Обязательным становится овладение выпускниками школы основ теории чисел, алгебры многочленов, функциональных уравнений. Соответственно и задания олимпиад в таких странах, а также задания Международной математической олимпиады школьников включают в себя задачи по теории чисел, неравенства, доказательства которых требуют знаний, выходящих за рамки классической российской школьной программы, функциональные уравнения, вообще не входящие в российскую школьную программу. Это диктует необходимость расширения списка используемых в заданиях Всероссийских олимпиад разделов математики. Однако следует заметить, что изучение технически сложных разделов математики является недоступным учащимся 5—9 классов в силу возрастных особенностей. А основными задачами начальных этапов Всероссийской олимпиады школьников по математике являются поиск и отбор одаренных учащихся, далеко не всегда прошедших качественную подготовку даже по основным разделам школьной математики. Кроме того, работа с учащимися вне рамок традиционной школьной программы требует от педагога соответствующей квалификации, прохождения курсов переподготовки. Поэтому требования, предъявляемые к содержанию олимпиад начальных и заключительных уровней, значительно различаются. И при переходе от начальных этапов олимпиады к заключительным этапам с необходимостью расширяется круг навыков и знаний, используемых при выполнении заданий олимпиад. При этом одной из главных отличительных особенностей математических олимпиад является требование по формированию заданий на основе новых (неизвестных участникам олимпиады) задач.

## ▼ Этапы олимпиады

**Первый (школьный) этап** проводится в один день для учащихся 5—11 классов. Рекомендуемое время проведения: для 5—6 классов — 2 урока, для 7—8 классов — 3 урока, для 9—11 классов — 3—4 урока. Вариант должен содержать 4—6 задач разной сложности.

**Второй (муниципальный) этап** проводится в один день для учащихся 7—11 классов. Рекомендуемое время

проведения — 4 часа. Вариант должен содержать 5—6 задач разной сложности. Задания второго этапа разрабатываются предметно-методическими комиссиями регионального этапа олимпиады с учетом методических рекомендаций Центральной предметной методической комиссии по математике. В связи с тем что изучение математики ведется с первого класса и учащиеся среднего звена школы уже способны выполнять относительно сложные логические шаги, рекомендуется проведение олимпиады, начиная с учащихся 6 классов.

Желательно, чтобы задания включали разделы школьной математики, изученные к моменту проведения олимпиады. Первые две (самые легкие) задачи варианта должны быть доступны подавляющему большинству участников. В качестве сложных заданий рекомендуется включение в вариант задач, использующих материалы, изучаемые на факультативных занятиях. Учитывая то, что большинство учащихся, особенно среднего звена школы, впервые участвуют в олимпиаде, задания для них должны быть не сложными для восприятия. Интерес у такой категории участников вызывают задачи, сформулированные в игровой форме, а также логические и наглядные геометрические задачи.

**Третий (региональный) этап** проводится в два дня для учащихся 9—11 классов. Продолжительность каждого тура — 4 часа. Каждый день школьникам предлагается решить по 4 задачи. Третий этап Всероссийской олимпиады школьников уже является отборочным, носящим «спортивный» характер. Победители регионального этапа становятся участниками заключительных этапов олимпиады, а призеры по 11 классу получают льготы при поступлении в региональные вузы. С целью популяризации естественно-математических наук и раннего отбора талантливых школьников рекомендуется проведение третьего этапа олимпиады также для учащихся 8 классов (по отдельным заданиям).

**Заключительные этапы** олимпиады проводятся в два тура для учащихся 9—11 классов. Время проведения каждого тура — 5 часов. Каждый день участникам предлагается решить по 4 задачи.

Задания третьего и заключительных этапов олимпиады составляются Центральной предметной методической комиссией по математике. Методическая комиссия включает в себя задачных композиторов: преподавателей, аспирантов и студентов ведущих вузов России, становившихся победителями и призерами Всероссийских и Международных математических олимпиад. Все задания, подготовленные Методической комиссией, являются новыми (авторскими). Отметим, что в некоторых регионах и задания второго этапа комплектуются из новых (авторских) задач.

## ▼ Структура варианта (заданий)

Главными при формировании комплектов заданий олимпиад являются следующие принципы:

1) Нарастание сложности заданий от первого к последнему. При этом их трудность должна быть такой, чтобы с первым заданием могли успешно справиться примерно 70% участников, со вторым — около 50%, с третьим — около 20%, а с последними — лишь наиболее сильные участники олимпиады.

2) Тематическое разнообразие заданий. В комплект должны входить задачи по геометрии, алгебре, комбинаторике, а в старших классах желательно включение задач по теории чисел, тригонометрии, стереометрии, математическому анализу. При этом допустимо и даже рекомендуется включение задач, объединяющих различные разделы школьной математики.

3) Обязательная новизна задач для участников олимпиады. В случае, когда задания выбираются из печатных изданий или из материалов специализированных ресурсов сети Интернет (это возможно на начальных этапах олимпиады), Методическая комиссия этого этапа должна выбирать источники, неизвестные участникам. При составлении заданий нельзя использовать только один источник.

4) Эстетическая красота заданий. В математике существует понятие «красивая задача». К таковым относят задачи, в которых сочетаются интересный с научной точки зрения факт, простота формулировки и «элегантность» решения.

5) Недопустимость включения в задания олимпиады задач по разделам математики, не изученным по всем базовым программам по алгебре и геометрии в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.

## СОДЕРЖАНИЕ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ЭТАПОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

Одной из важных компонент математических олимпиад является их содержание. В заданиях олимпиад наряду с разделами школьной программы используются и классические темы олимпиадной математики.

Содержание второго и третьего этапов олимпиады ниже раскрывается не только перечислением основных разделов математики, используемых в заданиях олимпиад, но и проиллюстрировано задачами по этим разделам. Темы, не входящие в школьную программу, для наглядности выделены **полужирным курсивом**. Приведенные задания соответствуют уровню сложности для данного этапа: почти все задания предлагались в различные годы на втором и третьем этапах Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области.

Большинство задач, приведенных в этой главе, были придуманы в последние десять лет. Их авторами являются Агаханов Н. Х., Волченков С. Г., Голованов А. С., Грибалко А. В., Дольников В. Л., Емельянов Л. А., Женодаров Р. Г., Канель-Белов А. Я., Карасев Р. Н., Кожевников П. А., Купцов Л. П., Мурашкин М. В., Подлипский О. К., Резниченко С. В., Рубанов И. С., Сендеров В. А., Сонкин М. Г., Спиридонов С. В., Терешин Д. А., Токарев С. И., Храбров А. И., Шаповалов А. В. Авторство некоторых задач, уже ставших олимпиадной классикой, установить затруднительно.

### 6—7 классы

#### **Числа и вычисления**

**Натуральные числа и нуль.**

**Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами.**

***Представление числа в десятичной системе***

1. Сумма двух двузначных чисел равна 147. Оба числа записали в обратном порядке и сложили. Какая сумма могла получиться? Приведите все возможные ответы.

**Ответ:** 84, 183.

**Решение.** Если при сложении не происходило переноса единицы в следующий разряд, то сумма десятков исходных чисел равна 14, а единиц — 7. Значит, получится число  $7 \cdot 10 + 14 = 84$ . Если же перенос был, то

сумма единиц равна 17, десятков — 13, и получится сумма  $17 \cdot 10 + 13 = 183$ .

2. Коля выложил на столе из цифр пятизначное число  $N$ , а затем еще четыре числа: сумму первых двух цифр числа  $N$ , сумму первых трех, первых четырех, наконец — сумму всех пяти цифр числа  $N$ . В итоге на столе оказались: одна цифра 1, шесть цифр 2, одна цифра 4, три цифры 6, две цифры 8. Чему равно число  $N$ ? (Объясните свой ответ.)

**Ответ:** 88 622.

**Решение.** Количество цифр, выложенных на столе, равно 13. Следовательно, все четыре суммы — двузначные числа. При прибавлении цифры нельзя перескочить через десятичный разряд, поэтому ровно одна из сумм (первая) начинается с 1, а остальные суммы начинаются с 2. Но  $8 + 8 + 4 = 20$ , а цифра 0 отсутствует. Значит, первые три цифры числа  $N$  — это 8, 8 и 6. Значит, вторая сумма — 22 ( $6 + 8 + 8$ ), третья — 24, четвертая — 26, так как третья и четвертая суммы начинаются с 2, и для сумм остались цифры 2, 4 и 6. Цифра 4 на столе одна, поэтому число  $N$  не может начинаться с 86 или 68. Поэтому  $N = 88\ 622$  ( $2 = 24 - 22$ ,  $2 = 26 - 24$ ).

3. Найдите все такие трехзначные числа  $N$ , что сумма цифр числа  $N$  в 11 раз меньше самого числа  $N$ .

**Ответ:** 198.

**Решение.** Пусть  $N = \overline{abc}$ . Из условия  $100a + 10b + c = 11(a + b + c)$  следует, что  $89a = 10c + b$ . Справа в равенстве стоит двузначное (однозначное, если  $c = 0$ ) число, которое делится на 89, исходя из левой части равенства. Значит,  $10c + b = 89$ . Но тогда  $a = 1$ .

**Делители и кратные числа. Простые и составные числа. НОК и НОД. Понятие о взаимно простых числах. Разложение числа на простые множители.**

4. На доске было написано натуральное число  $N$ . Маша подсчитала произведение его цифр и получила число  $M$ . Потом Маша подсчитала произведение цифр числа  $M$  и получила 1001. Докажите, что Маша ошиблась.

**Доказательство.** Пусть  $a, b, c, \dots, f$  — цифры числа  $M$ . Тогда  $a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot f = 1001$ . Но  $1001 = 7 \cdot 13 \cdot 11$ . А цифр 11 и 13 не бывает. То есть Маша ошиблась.

5. Докажите, что  $\text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОД}(a, b) = ab$ .

**Доказательство.** Пусть  $d = \text{НОД}(a, b)$ . Тогда  $a = a_1d$ ,  $b = b_1d$ , причем  $\text{НОД}(a_1, b_1) = 1$ . Отсюда следует, что  $\text{НОК}(a, b) = a_1b_1d$ . Осталось заметить, что  $\text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОД}(a, b) = (a_1b_1d)d = (a_1d)(b_1d) = ab$ . ■

6. Имеется шесть натуральных чисел. Для каждой пары этих чисел выписали их наибольший общий делитель. Могли ли при этом оказаться выписанными все натуральные числа от 1 до 15?

**Ответ:** не могли.

**Решение.** Допустим, такие шесть чисел нашлись. Среди их попарных наибольших общих делителей должны встретиться семь четных чисел (2, 4, ..., 14). Если среди наших шести чисел четных не больше четырех, то четных наибольших общих делителей (или, что то же самое, пар четных чисел) будет не больше шести, а если среди наших шести чисел четных не меньше пяти, то четных наибольших общих делителей будет не меньше десяти. Противоречие с тем, что мы должны встретить семь четных чисел среди попарных наибольших общих делителей найденных шести чисел.

7. Какое наименьшее количество чисел нужно исключить из набора 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 так, чтобы оставшиеся числа можно было разбить на две группы с одинаковым произведением чисел в группах? Приведите пример такого разбиения на группы.

**Ответ:** нужно исключить три числа, например 3, 7 и 11.

Например, группы чисел {4, 5, 8, 9} и {2, 6, 10, 12}.

**Решение.** Очевидно, что числа 7 и 11 должны быть исключены, так как если хотя бы одно из этих чисел попадает, например, в первую группу, то произведение чисел во второй группе не может совпадать с произведением чисел первой группы. Произведение остальных чисел

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12 = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2,$$

поэтому еще необходимо исключить число 3 или 12, чтобы разбить данное общее произведение на два равных произведения. Исключим, например, число 3. Получим, например, группы {4, 5, 8, 9} и {2, 6, 10, 12}, произведение чисел в которых равно 1440.

8. В ряд выписаны в порядке возрастания все простые числа. Может ли сумма шести подряд идущих чисел в этом ряду равняться сумме пяти подряд идущих чисел в этом ряду? (Наборы чисел могут пересекаться.)

**Ответ:** не может.

**Решение.** Пусть такие наборы из шести и пяти чисел существуют. Заметим, что все простые числа, кроме 2, нечетные. Если первая сумма не содержит число 2, то она четна (как сумма шести нечетных чисел). Но тогда вторая сумма, которая тем более не начинается с 2 (иначе сумма шести последовательных простых чисел будет больше суммы первых пяти простых чисел), будет нечетна. Значит, первая сумма есть  $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13$ . Вторая сумма не может начинаться с 3 (так как  $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 > 3 + 5 + 7 + 11 + 13$ ). Значит, вторая сумма не меньше, чем  $5 + 7 + 11 + 13 + 17$ . Но первая и вторая суммы имеют общую часть:  $5 + 7 + 11 + 13$ , а отличаются крайними членами: в первой сумме это 2 + 3, а во второй 17. Но  $17 > 2 + 3$ , поэтому вторая сумма больше.

9. Может ли произведение двух двузначных чисел быть числом, у которого первая цифра совпадает с третьей, а вторая — с четвертой?

**Ответ:** не может.

**Решение.** Число  $\overline{abab} = \overline{ab} \cdot 101$  делится на 101. Но число 101 простое. Поэтому хотя бы один из сомножителей делится на 101 и не может быть двузначным числом.

### **Четность**

10. Вдоль забора растут 8 кустов малины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 225 ягод?

**Ответ:** не может.

**Решение.** Число ягод на двух соседних кустах отличается на 1, поэтому на двух соседних кустах вместе нечетное число ягод. Тогда количество ягод на восьми кустах равно сумме четырех нечетных чисел, т. е. числу четному. Значит, на всех кустах вместе не может быть 225 ягод.

11. Можно ли заменить звездочки в равенстве

$$1 * 2 * \dots * 10 = 0$$

на знаки «+» или «-» так, чтобы равенство стало верным?

**Ответ:** нельзя.

**Решение.** Заменяя все звездочки на плюсы, мы получим, что значение выражения в левой части равно 55. Начнем теперь заменять некоторые плюсы на минусы. При этом каждый раз значение выражения будет

уменьшаться на четное число. То есть значение выражения, стоящего слева, всегда будет нечетным числом. Значит, четное число 0 мы получить не сможем.

12. Шестиклассники Школы Сладкоежек собирают конфетные фантики трех цветов: зеленого, синего и красного и обмениваются ими по правилам: либо меняют 3 синих фантика на 5 зеленых (и, наоборот, 5 зеленых на 3 синих), либо — 7 зеленых фантиков на 11 красных (и наоборот — 11 красных на 7 зеленых). Могло ли у ребят из 6А класса в конце месяца оказаться 1111 фантиков, если в начале месяца у них было 1000 фантиков?

**Ответ:** не могло.

**Решение.** Заметим, что после каждого обмена количество фантиков у ребят из 6А класса изменяется на четное число (либо на 2, либо на 4). Но так как у них изначально было ровно 1000 фантиков — четное число, то после каждого обмена общее количество фантиков у ребят из 6А класса должно оставаться четным числом. А число 1111 нечетное.

13. Петя и Коля копили монеты достоинством в 1, 2, 5 рублей, причем оказалось, что в Петиной копилке нет монет того же достоинства, что в Колиной. Могут ли ребята заплатить по 2006 рублей из своих копилок одинаковым числом монет? (Объясните свой ответ.)

**Ответ:** не могут.

**Решение.** Предположим, что ребята могут заплатить по 2006 рублей из своих копилок одинаковым числом монет. Тогда у кого-то из ребят будут монеты только одного достоинства (только в 1, или 2, или 5 рублей). Если у кого-то в копилке есть монеты достоинством в 5 рублей, то у него должны быть и монеты другого достоинства, поскольку 2006 на 5 не делится. Также не может быть варианта, что у кого-то есть монеты достоинством только в 1 рубль. В этом случае, чтобы набрать 2006 рублей, потребуется 2006 монет. Однако, 2006 монет другого достоинства в сумме составит больше 2006 рублей. Значит, у кого-то (для определенности у Пети) в копилке только монеты достоинством в 2 рубля. Тогда у Коли в копилке должны быть монеты достоинством и в 5 рублей, и в 1 рубль. Чтобы набрать 2006 рублей, Пете потребуется ровно 1003 монеты. Однако Коля не сможет набрать 2006 рублей при помощи 1003 монет достоинством в 1 или 5 рублей, поскольку нечетное количество (1003) нечетных чисел (1 или 5) в сумме дают нечетное число, а 2006 — четное число.



**Деление с остатком. Признаки делимости на 2, 3, 5, 6, 9**

14. Десятичная запись числа  $A$  состоит из 30 единиц и нескольких нулей. Может ли число  $A$  быть полным квадратом (квадратом целого числа)?

**Ответ:** не может.

**Решение.** Сумма цифр числа  $A$  равна 30. Поэтому оно делится на 3, но не делится на 9. То есть оно не может быть полным квадратом.

15. Дети парами выходят из лесу, где они собирали орехи. В каждой паре идут мальчик и девочка, причем у мальчика орехов либо вдвое больше, либо вдвое меньше, чем у девочки. Могло ли так случиться, что у всех вместе 1000 орехов?

**Ответ:** не могло.

**Решение.** Заметим, что число орехов у каждой пары детей делится на 3. Это означает, что суммарное число орехов должно делиться на 3. Однако 1000 на 3 не делится.

**Обыкновенные дроби. Сравнение дробей.  
Арифметические действия  
с обыкновенными дробями**

16. Расставьте скобки в левой части выражения  $2 : 3 : 4 : 5 : 6 = 5$  так, чтобы получилось верное равенство.

**Ответ:**  $(2 : 3) : ((4 : 5) : 6) = 5$ .

**Десятичные дроби**

17. На листе бумаги написаны двадцать чисел 1,1 и двадцать чисел 1,11. Зачеркните несколько чисел так, чтобы сумма оставшихся была равна 19,93.

**Ответ:** нужно зачеркнуть 15 чисел 1,1 и 7 чисел 1,11.

**Отношения. Пропорции.  
Основное свойство пропорции**

18. Дана пропорция  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ( $b + d \neq 0$ ).

а) Докажите, что верна пропорция  $\frac{a}{b} = \frac{a + c}{b + d}$ .

б) Верно ли, что также верна и пропорция  $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ ?

**Решение.** а) По условию  $ad = bc$ , но тогда и  $ad + ab = ba + bc$ . Вынесем общий множитель за скобки и получим  $a(b + d) = b(a + c)$ , откуда следует пропорция.

б) Не верно. Если  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \neq 1$  или 0, то  $\frac{a}{b} \neq \frac{ac}{bd}$  (например,  $\frac{2}{1} = \frac{4}{2}$ , но  $\frac{2}{1} \neq \frac{8}{2}$ ).

### **Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты**

19. По дороге идут два туриста. Первый из них делает шаги на 10% короче и в то же время на 10% чаще, чем второй. Кто из туристов идет быстрее и почему?

**Ответ:** медленнее идет тот из туристов, кто делает шаги короче и чаще.

**Решение.** Действительно, когда второй турист делает 10 своих шагов длины  $a$  каждый, первый турист делает 11 своих шагов длины  $0,9a$  каждый. Таким образом, первый турист проходит расстояние  $9,9a$  за то же время, за которое второй проходит большее расстояние —  $10a$ .

### **Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий**

20. Запишите число 1997 с помощью 12 пятерок и знаков арифметических операций.

**Решение.** Три варианта:

$$\begin{aligned}1997 &= (555 - 55)(5 - 5 : 5) - (5 + 5 + 5) : 5, \\1997 &= (55 - 5)(55 - 5 - 5 - 5) - (5 + 5 + 5) : 5, \\1997 &= (5 \cdot 5 \cdot 5)(5 + 5 + 5 + 5 : 5) - (5 + 5 + 5) : 5.\end{aligned}$$

### **Целые числа. Рациональные числа**

21. Докажите, что из чисел 1, 2, 3, ..., 10 можно составить 5 дробей, таких, что их сумма будет целым числом.

**Ответ:** например,  $\frac{5}{10} + \frac{7}{2} + \frac{8}{4} + \frac{6}{3} + \frac{9}{1} = 17$ .

### **Уравнения**

#### **Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение**

22. Найдите наименьший целый корень уравнения  
 $(|x| - 1)(x + 2,5) = 0$ .

**Ответ:**  $-1$ .

## Функции

### Функция. График функции. Линейные функции

23. При каких  $a$ ,  $b$  и  $c$  прямые  $y = ax + b$ ,  $y = bx + c$ ,  $y = cx + a$  проходят через точку  $A(1; 1)$ ?

Ответ: при  $a = b = c = \frac{1}{2}$ .

Решение. Из условия сразу получается система уравнений

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ b + c = 1, \\ a + c = 1. \end{cases}$$

## Геометрические фигуры на плоскости, измерение геометрических величин

Представление о начальных понятиях геометрии, геометрических фигурах.

Равенство фигур. Отрезок. Длина отрезка и ее свойства. Расстояние между точками.

Угол. Виды углов. Смежные и вертикальные углы и свойства. Пересекающиеся и параллельные прямые. Перпендикулярные прямые.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

*Представление о площади фигуры*

24. На диагонали  $BD$  квадрата  $ABCD$  взяты точки  $E$  и  $F$  так, что прямая  $AE$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $M$ , прямая  $AF$  пересекает сторону  $CD$  в точке  $N$  и  $CM = CN$ . Найдите длину диагонали квадрата, если  $BE = 3$ ,  $EF = 4$ .

Ответ:  $AC = BD = 10$ .

Решение. Из условия следует равенство треугольников  $ABM$  и  $ADN$  ( $BM = DN$ ,  $AB = AD$ ,  $\angle ABM = \angle ADN$ ), откуда  $\angle BAE = \angle DAF$ . Кроме того,  $AB = AD$  и  $\angle ABE = \angle ADF$  (рис. 1). Поэтому треугольники  $ABE$  и  $ADF$  равны, и, значит,  $DF = BE = 3$ .

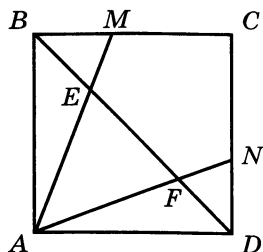


Рис. 1

25. У звезды  $ACEBD$  (рис. 2) равны углы при вершинах  $A$  и  $B$ , углы при вершинах  $E$  и  $C$ , а также равны длины отрезков  $AC$  и  $BE$ . Докажите, что  $AD = BD$ .

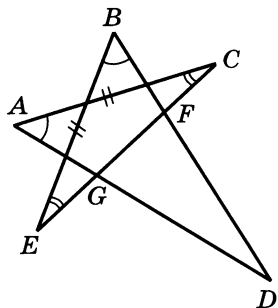


Рис. 2

**Доказательство.** Треугольники  $ACG$  и  $BEF$  равны (по стороне и двум углам, прилежащим к ней) (рис. 2). Следовательно,  $\angle AGC = \angle BFE$  и  $AG = BF$ . По теореме о смежных углах  $\angle FGD = \angle GFD$ . Поэтому треугольник  $GFD$  равнобедренный ( $GD = FD$ ). Следовательно,  $AG + GD = BF + FD$ , т. е.  $AD = BD$ . ■

26. В треугольнике  $ABC$  биссектриса  $AE$  равна отрезку  $EC$ . Найдите угол  $ABC$ , если  $AC = 2AB$ .

**Ответ:**  $\angle ABC = 90^\circ$ .

**Решение.** Пусть отрезок  $ED$  симметричен  $EB$  относительно  $AE$  (рис. 3). Так как  $AE$  — биссектриса, точка  $D$  лежит на прямой  $AC$ .  $\triangle ABE = \triangle ADE$  как симметричные, значит,  $AD = AB = \frac{AC}{2} = DC$ , т. е.  $ED$  — медиана  $\triangle AEC$ . Так как  $\triangle AEC$  равнобедренный, то его медиана является высотой, т. е.  $\angle ADE = 90^\circ$ . Тогда и  $\angle ABC = \angle ADE = 90^\circ$ .

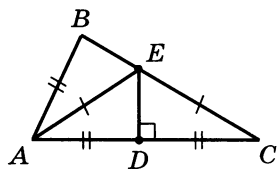


Рис. 3

27. Точки  $E$  и  $F$  — соответственно середины сторон  $BC$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$ . Отрезки  $AE$  и  $BF$  пересекаются в точке  $K$ . Что больше: площадь треугольника  $AKF$  или площадь четырехугольника  $KECF$ ?

**Ответ:** площадь треугольника больше.

**Решение.** Пусть  $4S$  — площадь квадрата  $ABCD$  (рис. 4). Тогда площадь каждого из треугольников  $ABE$ ,  $ADF$ ,  $BCF$  равна  $S$ , поэтому площадь треугольника  $ABF$  равна  $2S$ . Но треугольник  $AKB$  — часть треугольника  $ABE$ , поэтому его площадь меньше  $S$ . А это означает, что

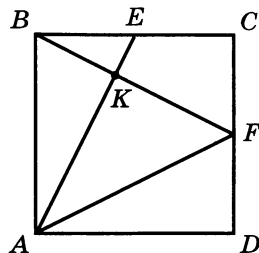


Рис. 4

площадь треугольника  $AKF$  больше  $S$ , так как его площадь в сумме с площадью треугольника  $AKB$  составляет  $2S$ . С другой стороны, площадь четырехугольника  $KECF$  меньше  $S$ , так как он составляет часть треугольника  $BCF$ .

## Специальные олимпиадные темы

### Числовые ребусы

28. Решите числовой ребус

$$AAAA - BBB + CC - D = 1234$$

(одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами — разные цифры).

Ответ:  $2222 - 999 + 11 - 0 = 1234$ .

29. Коля составил из различных ненулевых цифр пятизначное число  $N$  и прибавил к нему число, получаемое из  $N$  перестановкой цифр в порядке убывания. У него получилась сумма 171 540. Затем он прибавил к  $N$  число, получаемое из  $N$  перестановкой цифр в порядке возрастания, и у него получилась сумма 85 608. Какое число составил Коля?

Ответ: 72 819.

**Решение.** Пусть  $\overline{ABCDE}$  — число, полученное из исходного перестановкой цифр в порядке убывания. Тогда  $\overline{ABCDE} - \overline{EDCBA} = 171\,540 - 85\,608 = 85\,932$ . Цифра 8 разности может быть получена только если  $A = 9$ ,  $E = 1$  ( $E \neq 0$ ). Мы получили ребус  $9\overline{BCD1} - \overline{1DCB9} = 85\,932$  или  $\overline{BCD1} - \overline{DCB9} = 5932$ . При вычитании мы занимали одну единицу у числа  $B$ , поскольку  $\overline{CD1} < \overline{CB9}$ , поэтому  $B - D = 6$ . Но  $B \leq 8$ ,  $D \geq 2$  (цифры 1 и 9 уже встретились в числе), значит,  $B = 8$ ,  $D = 2$ . Осталось найти цифру  $C$ . Пусть  $r$  — остаток от деления на 9 исходного числа  $N$ . Такой же остаток в силу признака делимости на 9 имеет и число  $\overline{EDCBA}$ , поэтому их сумма 85 608 имеет остаток  $2r$  при делении на 9. Но 85 608 делится на 9, следовательно,  $r = 0$ . Итак,  $12C89 : 9$ , поэтому  $C = 7$ . Тогда искомое число есть  $85\,608 - 12\,789 = 72\,819$ .

Отметим, что  $C$  можно найти и по-другому. Число, составленное Колей, равно  $85\,608 - \overline{12C89}$ . Независимо от значения  $C$  эта разность начинается на 7. Поскольку семерка среди найденных нами цифр не встречается, то  $C = 7$ , а искомое число равно  $85\,608 - 12\,789 = 72\,819$ .

## **Взвешивания**

30. В ящике 25 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 19 кг гвоздей?

**Решение.** При первом взвешивании в одну из чашек весов кладем гирю и все гвозди раскладываем по чашкам так, чтобы установилось равновесие. Получим 13 и 12 кг гвоздей. Первую кучку откладываем, а остальные гвозди делим пополам, взвешивая без гири:  $12 = 6 + 6$ . Получили искомое количество гвоздей, соединив первую кучку и кучку, полученную при втором взвешивании:  $19 = 13 + 6$ .

31. Продавец арбузов хочет приобрести набор из пяти гирь с целыми весами, с помощью которых он сможет взвешивать любой целый вес от 1 кг до  $n$  кг. У него есть чашечные весы, на одну чашку которых можно класть арбузы, а на другую можно ставить не более трех гирь (из этих пяти). Помогите продавцу подобрать гири, если: а)  $n = 21$ ; б)  $n = 23$ .

**Решение.** Добавлением гири, вес которой мы не можем получить при помощи гирь меньших весов, легко получить пример для пункта а): 1, 2, 4, 8, 15. Можно убедиться, что этот набор подходит, но им нельзя набрать вес 22 кг.

б) Например, гири весом 1, 2, 4, 7, 14.

## **Логические задачи.**

### **Истинные и ложные утверждения**

32. На острове О живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путешественник встретил двух туземцев — А и Б.

Туземец А произнес фразу:

— По крайней мере один из нас (А или Б) — лжец. Можно ли сказать, кем является А и кем является Б (рыцарем или лжецом)?

**Ответ:** А — рыцарь, Б — лжец.

**Решение.** Если А — лжец, то его утверждение неверно, т. е. оба должны быть рыцарями. Противоречие. Значит, А — рыцарь. Тогда его утверждение верно и Б — лжец.

33. Путешественник прибыл на остров, на котором живут лжецы (Л) и правдолюбцы (П). Каждый Л, отвечая на вопрос «Сколько...?», называет число на 2 больше или на 2 меньше, чем правильный ответ, а каждый П отве-

чает верно. Путешественник встретил двух жителей острова и спросил у каждого, сколько Л и П проживают на острове. Первый ответил: «Если не считать меня, то 1001 Л и 1002 П», а второй ответил «Если не считать меня, то 1000 Л и 999 П». Сколько Л и П на острове? Кем оказались первый и второй жители острова?

**Ответ:** Первый — Л, второй — П. На острове 1000 Л и 1000 П.

**Решение.** Ответы первого и второго различны, поэтому вариант П и П невозможен. Также невозможен и вариант Л и Л, так как числа 1001 и 1000 отличаются на 1, а ответы лжецов по поводу количества Л должны были либо совпадать, либо отличаться на 4. Вариант первый — П, второй — Л также невозможен, так как в этом случае на острове проживает 1003 П и, значит, Л не мог дать ответ 999 П. Остается вариант: первый — Л, второй — П. Из ответа второго получаем 1000 Л и 1000 П, что соответствует ответу первого для лжецов.

### «Оценка + пример»

34. Найдите наименьшее натуральное число, произведение цифр которого равно 1080.

**Ответ:** 3589.

**Решение.** Заметим, что в наименьшем числе не должна встречаться цифра 1, так как ее можно просто вычеркнуть — число уменьшится, а произведение цифр не изменится. Так как  $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$ , а на 5 делится только цифра 5, то в искомом числе обязательно будет цифра 5. Из того, что  $2^3 \cdot 3^3 > 100$ , следует, что в искомом числе, кроме 5, будут еще по крайней мере три цифры. Предположим, что искомое число четырехзначное. Чем меньше первая цифра, тем меньше число. Но если первая цифра 2, то из того, что  $2^2 \cdot 3^3 > 100$ , следует, что в искомом числе, кроме цифр 5 и 2, будут еще по крайней мере три цифры, т. е. число будет по крайней мере пятизначным. Если первая цифра 3, то единственным вариантом оставшихся двух цифр будут цифры 8 и 9. Но тогда наименьшим числом будет 3589.

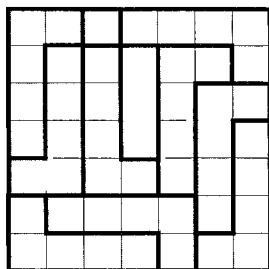
35. Какое наибольшее количество уголков вида, изображенного на рисунке 5, состоящих из 5 квадратов  $1 \times 1$ , можно поместить в квадрате  $7 \times 7$ ? (Уголки можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.)



Рис. 5

**Ответ:** 9.

**Решение.** Площадь каждого уголка равна 5 квадратам  $1 \times 1$ , а площадь квадрата — 49 таким квадратам, поэтому в квадрат нельзя поместить более 9 уголков. На рисунке 6 приведен один из способов размещения в квадрате 9 уголков.



**Рис. 6**

36. На 22 карточках написаны натуральные числа от 1 до 22. Из этих карточек составили 11 дробей. Какое наибольшее число этих дробей могут иметь целые значения?

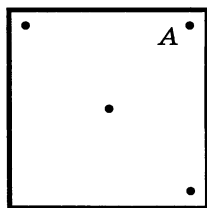
**Ответ:** десять дробей, например:

$$\frac{4}{2}, \frac{12}{6}, \frac{14}{7}, \frac{15}{5}, \frac{16}{8}, \frac{18}{9}, \frac{20}{10}, \frac{21}{3}, \frac{22}{11}, \frac{13}{1}.$$

**Решение.** Покажем, что больше десяти дробей, равных целым числам, получить нельзя. Рассмотрим простые числа 13, 17 и 19. Они могут дать целое число только при делении на 1. Поэтому даже если одно из чисел 13, 17, 19 поделено на 1, то оставшиеся два числа по условию не могут быть использованы, так как карточка с единицей одна. Всего же дробей 11, а чисел для их составления остается 20. Следовательно, больше десяти дробей, равных целым числам, получить нельзя.

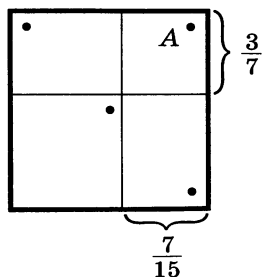
### **Построение примеров и контрпримеров**

37. У Пети есть торт, в трех углах и в самом центре которого по изюминке (рис. 7). Петя хочет двумя прямолинейными разрезами разделить торт на 4 части — каждый с изюминкой — так, чтобы ему достался кусок с изюминкой А, и этот кусок составлял ровно  $\frac{1}{5}$  часть торта. Как Петя может разрезать торт?



**Рис. 7**

**Первое решение.** Можно провести разрезы так, как показано на рисунке 8, поскольку в произведении  $\frac{7}{15} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{5}$  каждый из сомножителей меньше  $\frac{1}{2}$ .



**Рис. 8**



**Второе решение.** Разобьем торт на 25 равных квадратов и проведем разрезы так, как показано на рисунке 9. Очевидно, что кусок, содержащий  $A$ , — это фигура, по площади равная 5 клеткам, т. е. составляет  $\frac{1}{5}$  часть торта.

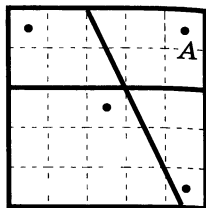


Рис. 9

38. Найдите какое-нибудь натуральное число, которое в 2002 раза больше суммы своих цифр.

**Ответ:** например,  $120\,012 = 2002 \cdot 6$ .

### Инвариант

39. На доске написано слово ШАШКА. Каждую минуту Вася выбирает две буквы, стирает их, а вместо каждой из них записывает букву, соседнюю в алфавите со стертой. (Используется весь алфавит, т. е. включающий в себя все 33 буквы). Например, ШАШКА  $\rightarrow$   $\rightarrow$  ШАЩИА  $\rightarrow$  ЧАЩИА. Может ли через несколько минут на доске появиться слово КАЗАК?

**Ответ:** не может.

**Решение.** Заметим, что при указанных операциях не меняется четность суммы номеров в алфавите записанных букв. Действительно, если обе буквы заменяются на следующие или на предыдущие в алфавите, то сумма номеров увеличивается или уменьшается на 2. Если же одна буква меняется на предыдущую, а другая — на следующую, то сумма номеров не изменяется. То есть если в словах суммы номеров букв имеют разную четность, то одно слово из другого получить нельзя. А у нас

$$\begin{aligned} & \text{Ш} + \text{А} + \text{Ш} + \text{К} + \text{А} - (\text{К} + \text{А} + \text{З} + \text{А} + \text{К}) = \\ & = 2\text{Ш} + 2\text{А} + \text{К} - (2\text{К} + 2\text{А} + \text{З}) = 2(\text{Ш} - \text{К}) + (\text{К} - \text{З}) = \\ & = 2(\text{Ш} - \text{К}) + 3 \end{aligned}$$

нечетно.

40. На доске написаны числа от 1 до 10. Разрешается стереть любые два числа  $x$  и  $y$ , а вместо них записать на доску числа  $x - 1$  и  $y + 3$ . Могли ли через некоторое время на доске оказаться числа 2, 3, ..., 9, 10, 2002?

**Ответ:** не могли.

**Решение.** Предположим, что мы смогли получить на доске числа 2, 3, ..., 9, 10, 2002. Заметим, что после каждой операции сумма чисел, написанных на доске, увеличивается на 2. Изначально она была равна 55:

$(1 + 2 + \dots + 10)$ . То есть после каждой операции сумма чисел, написанных на доске, будет нечетной. Однако сумма  $2 + 3 + \dots + 10 + 2002 = 2056$  четна. Противоречие.

### Принцип Дирихле

41. Сережа разрезал квадратный именинный торт весом 900 г двумя прямолинейными разрезами, параллельными одной паре сторон, и двумя разрезами, параллельными другой паре сторон, на 9 прямоугольных частей. Докажите, что Петя может выбрать такие три куска торта, не имеющие общих сторон, что суммарный вес этих кусков не меньше 300 г.

**Решение.** Рассмотрим тройки кусков, обозначенные на рисунке 10 одинаковыми цифрами. Суммарный вес кусков хотя бы одной тройки не меньше 300 г, в противном случае вес торта меньше  $300 \times 3 = 900$  г.

1	2	3
3	1	2
2	3	1

Рис. 10

### Разрезания

42. Разрежьте фигуру, полученную из прямоугольника  $4 \times 5$  вырезанием четырех угловых клеток  $1 \times 1$  (рис. 11), на три части, не являющиеся квадратами, так, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат.

**Решение.** Пример разрезания приведен на рисунке 12 и рисунке 13.

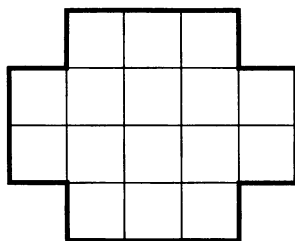


Рис. 11

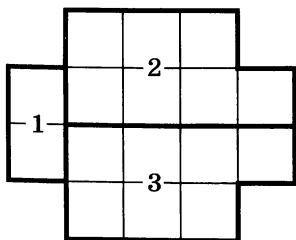


Рис. 12

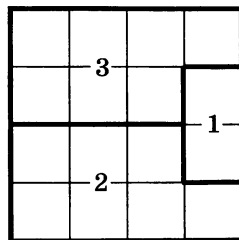


Рис. 13

43. Замостите без щелей и перекрытий какую-нибудь полосу (бесконечную в обе стороны) уголками, получаемыми вырезанием из квадрата  $3 \times 3$  углового квадрата  $2 \times 2$ . (Ширина полосы может быть 3, 4, 5, ... .)

**Решение.** С помощью трех уголков можно замостить изображенную на рисунке 14 фигуру с одним вырезанным и одним пририсованным к прямоугольнику  $5 \times 3$  квадратом  $1 \times 1$ . А с помощью таких фигур легко замостить полосу шириной 5 (рис. 15). Можно, конечно, сразу получить замощение полосы (рис. 16).

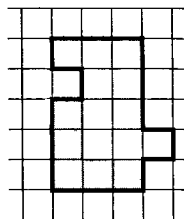


Рис. 14

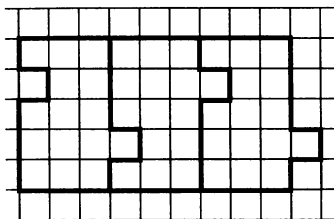


Рис. 15

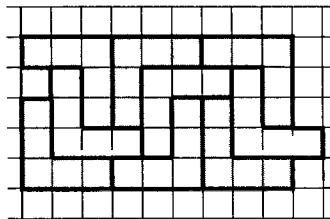

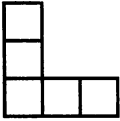


Рис. 16

44. Разрежьте фигуру, получаемую из квадрата  $7 \times 7$  вырезанием четырех угловых клеток  $1 \times 1$  (рис. 17), на

уголки вида  и  (уголки состоят из квадратиков размера  $1 \times 1$ ) так, чтобы квадратики, отмеченные на рисунке точками, оказались только в больших уголках.

**Решение.** Пример разрезания приведен на рисунке 18.

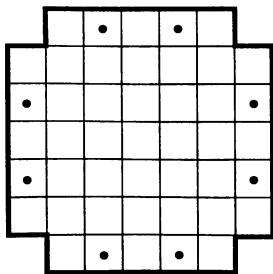


Рис. 17

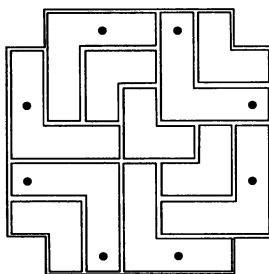
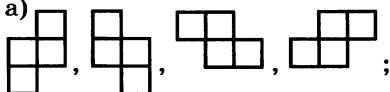


Рис. 18

## Раскраски

45. Можно ли раскрасить все клетки квадрата  $10 \times 10$  в 4 цвета так, чтобы любые четыре клетки, образующие одну из фигур: а)



были разного цвета?

Объясните свой ответ для каждого из двух случаев.

**Ответ:** а) можно; б) нельзя.

а) Пример раскраски приведен на рисунке 19, где разные цифры обозначают разный цвет.

б) Если искомая раскраска существует, то клетки *а*, *б*, *в*, *г* (рис. 20) четырех различных цветов. Так же разных цветов клетки *в*, *б*, *а*, *д*. Значит, клетки *д* и *г* одного цвета. Но тогда в фигуре *д*, *е*, *г*, *ж* две клетки одного цвета. Противоречие с условием.

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4

Рис. 19

<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>		
<i>д</i>	<i>е</i>	<i>г</i>		
		<i>ж</i>		

Рис. 20

46. Назовем раскраску клеток доски  $6 \times 6$  в два цвета *хорошей*, если у каждой клетки найдется соседняя по стороне клетка того же цвета. Найдите какую-нибудь *хорошую* раскраску доски  $6 \times 6$ , такую, что после перекраски любого одного столбца или строки получалась нехорошая раскраска. Под перекраской понимается изменение цвета каждой клетки столбца (строки) на другой.

**Решение.** Нетрудно убедиться, что раскраска на рисунке 21 — требуемая *хорошая* раскраска.

Рис. 21

## Игры

47. На доске написано число 2000. Петя и Коля по очереди делят число, написанное на доске, на любое из следующих трех чисел: 2, 5, 10. Проигрывает тот из них, после хода которого на доске появится нецелое число. Петя ходит первым. Кто выигрывает при правильной игре?

**Ответ:** выигрывает Петя.

**Решение.** Приведем выигрышную стратегию для Пети. Первым ходом он делит число 2000 на 5, после чего на доске написано число 400. Далее на каждый ход Коли Петя отвечает таким же ходом, т. е. делит на то же число, что и Коля. Теперь заметим, что 400 — полный квадрат, а значит, после каждого хода Пети на доске вновь появляется квадрат некоторого натурального числа. Тогда после Колиного хода квадрата натурального числа появиться не может, а значит, не может появиться и единица. Следовательно, единица появится после хода Пети.

48. Малыш и Карлсон по очереди достают из коробки конфеты, при этом каждый берет на одну конфету больше или меньше, чем перед этим взял другой, не брать конфеты из коробки в свою очередь нельзя. Вначале в коробке было 24 конфеты, и Малыш и Карлсон договорились, что если в какой-то момент в коробке останется ровно 4 или 14 конфет, то тому, чья очередь брать конфеты, достанется торт. Сможет ли Карлсон, который первым берет конфеты, выиграть торт, если вначале он имеет право взять 1 или 2 конфеты?

**Ответ:** Карлсон сможет выиграть.

**Решение.** Выигрышная стратегия такова:  $K - 1 \Rightarrow M - 2$ ,  $K - 3 \Rightarrow M - 2$  (если сейчас Малыш возьмет 4 конфеты, то их останется 14),  $K - 1 \Rightarrow M - 2$ ,  $K - 1 \Rightarrow M - 2$ ,  $K - 1 \Rightarrow M - 2$ , и Карлсон выиграл, так как осталось 4 конфеты.

## 8—9 классы

### Числа и вычисления

**Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе**

49. Пусть  $S(N)$  — сумма цифр натурального числа  $N$ . Найдите все  $N$ , для которых  $N + S(N) = 1999$ .

**Ответ:**  $N = 1976$ .

**Решение.** Очевидно, искомое  $N$  — четырехзначное число  $\Rightarrow N = 1000a + 100b + 10c + d \Rightarrow 1001a + 101b + 11c + 2d = 1999$ , где  $1 \leq a \leq 9$ ,  $0 \leq b, c, d \leq 9$ . Тогда  $a = 1 \Rightarrow 101b + 11c + 2d = 998 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow 11c + 2d = 89 \Rightarrow c = 8, 2d = 1$ , что невозможно, либо  $c = 7, 2d = 12, d = 6$ .

50. Обозначим через  $\Pi(x)$  произведение цифр числа  $x$ . В ряд выписаны числа  $\Pi(2003), \Pi(2004), \Pi(2005), \dots$ . Какое наибольшее количество чисел, записанных подряд, могут оказаться последовательными натуральными числами?

**Ответ:** 9.

**Решение.** Заметим, что  $\Pi(10m) = 0$ . То есть по крайней мере каждое десятое из выписанных чисел равно 0. Отсюда следует, что в этом ряду может встретиться не более 9 записанных подряд чисел, отличных от 0. Покажем, что они могут быть последовательными натуральными. Такими числами будут, например,  $\Pi(11111) = 1, \Pi(11112), \dots, \Pi(11119) = 9$ .

51. Даны натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Все их попарные суммы, т. е. числа  $a_1 + a_2, a_1 + a_3, \dots, a_1 + a_n, a_2 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n$ , оканчиваются на 2004 или на 2005, причем оба окончания встречаются. Докажите, что среди чисел  $a_1, \dots, a_n$  либо ровно одно четное, либо ровно одно нечетное.

**Решение.** Заметим, что среди чисел есть четное и есть нечетное, так как если сумма двух чисел нечетна (оканчивается на 2005), то одно из них четно, а другое — нечетно. Пусть среди чисел  $a_1, \dots, a_n$  есть два нечетных  $a$  и  $b$  и два четных  $c$  и  $d$ . Тогда из условия следует, что  $a + b$  и  $c + d$  оканчиваются на 4 (эти суммы четны),  $a + c$  и  $b + d$  оканчиваются на 5. Но тогда число  $A = a + b + c + d = (a + b) + (c + d)$  должно оканчиваться на 8, и, с другой стороны,  $A = (a + c) + (b + d)$  должно оканчиваться на 0. Противоречие.

**Делители и кратные числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа. Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и их степеней**

52. Решите в натуральных числах уравнение  $a! + b! + c! = d!$  ( $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .)

**Ответ:**  $a = b = c = 2, d = 3$ .

**Решение.** Без ограничения общности можно считать  $a \leq b \leq c$ . Тогда из уравнения следует, что  $d > c$ , значит,  $d \geq c + 1$ ,  $d! \geq (c + 1)! = (c + 1) \cdot c! > 3c! \geq a! + b! + c!$ , если  $c + 1 > 3$ . Итак, если  $c \geq 3$ , уравнение решений не имеет. Осталось проверить, что из наборов  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 2)$ ,  $(1, 2, 2)$ ,  $(2, 2, 2)$  уравнению удовлетворяет только последний.

53. Найдите наименьшее натуральное  $n$ , такое, что количество нулей, которыми оканчивается число  $(n + 10)!$  на 1998 больше количества нулей, которыми оканчивается число  $n!$ .

**Ответ:**  $5^{1997} - 10$ .

**Решение.** Условие равносильно тому, что число  $(n + 1)(n + 2) \dots (n + 10)$  делится на  $5^{1998}$ . Но среди чисел  $n + 1, n + 2, \dots, n + 10$  ровно два делятся на пять, причем одно из этих двух не делится ни на какую большую степень пятерки. То есть другое обязано делиться на  $5^{1997}$ , отсюда  $n + 10 \geq 5^{1997}$ . Это означает, что  $n \geq 5^{1997} - 10$ . Однако при  $n = 5^{1997} - 10$  условие выполняется, т. е. минимальное  $n$  равно  $5^{1997} - 10$ .

54. Найдите наименьшее натуральное число, не делящееся на 11, такое, что при замене любой его цифры на цифру, отличающуюся от выбранной на 1 (например,  $3 \rightarrow 2$  или  $4, 9 \rightarrow 8$ ), получается число, делящееся на 11.

**Ответ:** 909 090 909.

Обозначим  $A(x)$  разность между суммой цифр числа  $x$  на нечетных (считая с конца) местах и суммой цифр на четных местах (например,  $A(12345) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 = 3$ ). Как известно, при делении на 11 числа  $x$  и  $A(x)$  дают одинаковые остатки. Искомое число может состоять только из нулей и девяток. Любую другую цифру можно заменить большей или меньшей, и одно из полученных чисел не будет делиться на 11. Далее если две цифры стоят обе на четных или нечетных местах, то они равны (иначе при замене одной из них  $A(x)$  увеличивается, а при замене другой — уменьшается на 1, и одно из полученных чисел на 11 не делится). Аналогично, цифры, стоящие на местах разной четности, должны быть разными. Если последняя цифра 0, то, зачеркнув ее, получим меньшее число, удовлетворяющее условию задачи.

Итак, нужное число имеет вид 909...0909. Простой перебор показывает, что наименьшее среди них, удовлетворяющее условию задачи, это 909 090 909.

**Обыкновенные дроби. Сравнение дробей.  
Арифметические действия с обыкновенными дробями**

55. Докажите, что  $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{1997}{1998!} < 1$ .

**Решение.**  $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{1997}{1998!} = \left(\frac{2}{2!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{3}{3!} - \frac{1}{3!}\right) + \dots + \left(\frac{1998}{1998!} - \frac{1}{1998!}\right) = \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1997!} - \frac{1}{1998!}\right) = 1 - \frac{1}{1998!} < 1$ , что и требовалось доказать.

56. Докажите, что  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$ .

**Решение.** Заметим, что  $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$ , ...,  $\frac{99}{100} < \frac{100}{101}$ .

Поэтому квадрат рассматриваемого произведения меньше  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{100}{101} = \frac{1}{101}$ . Значит, само произведение меньше  $\sqrt{\frac{1}{101}} < \frac{1}{10}$ .

**Десятичные дроби. Отношения. Пропорции.  
Основное свойство пропорции.  
Прямая и обратная пропорциональность величин.  
Проценты. Положительные и отрицательные числа.  
Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий. Целые числа.  
Рациональные числа. Понятие об иррациональном числе. Изображение чисел точками на координатной прямой. Числовые неравенства и их свойства. Операции с числовыми неравенствами. Квадратный корень**

57. Какое из чисел больше,  $2^{1997}$  или  $5^{850}$ ?

**Ответ:**  $2^{1997} > 5^{850}$ .

**Решение.** Из неравенства  $2^7 = 128 > 125 = 5^3$  следует, что  $2^{1997} = (2^7)^{285} \times 2^2 > (5^3)^{285} = 5^{855} > 5^{850}$ .

58. Сумма положительных чисел  $x$ ,  $y$ ,  $z$  равна 11. Докажите неравенство  $[x]^4 + [y]^4 + [z]^4 \geq 243$ . ( $[a]$  — целая часть числа  $a$ , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее  $a$ .)



**Доказательство.** Предположим, что хотя бы одно из чисел  $x, y, z$  меньше 3. Тогда сумма двух оставшихся чисел больше 8. Следовательно, одно из них больше 4. В этом случае  $[x]^4 + [y]^4 + [z]^4 \geq 4^4 = 256 > 243$ . Если же все числа больше или равны 3, мы получаем  $[x]^4 + [y]^4 + [z]^4 \geq 3^4 + 3^4 + 3^4 = 243$ .

59. Существует ли такое  $x$ , что значения выражений  $x + \sqrt{2}$  и  $x^3 + \sqrt{2}$  — рациональные числа?

**Ответ:** не существует.

**Решение.** Предположим, что требуемое  $x$  нашлось. Тогда  $x + \sqrt{2} = a$  — рациональное число. Отсюда  $x = a - \sqrt{2}$ . Но тогда  $x^3 + \sqrt{2} = (a - \sqrt{2})^3 + \sqrt{2} = a^3 - 3\sqrt{2}a^2 + 6a - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = a^3 + 6a - (3a^2 + 1)\sqrt{2}$ . Это число является рациональным только при  $3a^2 + 1 = 0$  — противоречие.

60. В некоторой компании 100 акционеров, и любые 66 из них владеют не менее, чем 50% акций компании. Каким наибольшим процентом всех акций может владеть один акционер?

**Ответ:** 25%.

**Решение.** Пусть  $M$  — акционер, владеющий наибольшим процентом  $x$  акций. Разобьем остальных 99 акционеров на три группы  $A, B$  и  $C$  по 33 акционера. Пусть они владеют соответственно  $a, b$  и  $c$  процентами акций. Тогда  $100 - x = a + b + c$ . Откуда  $2(100 - x) = 2(a + b + c) = (a + b) + (b + c) + (c + a) \geq 50 + 50 + 50$ , т. е.  $x \leq 25$ .

Если каждый из 99 акционеров, кроме  $M$ , владеет  $\frac{75}{99} = \frac{25}{33}$  % акций, то любые 66 из них владеют ровно 50%, а у  $M$  ровно 25% акций.

## **Выражения и их преобразования**

**Степень с натуральным показателем и ее свойства. Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу. Квадратный трехчлен: выделение квадрата двучлена, разложение на множители**

61. Докажите, что при любом натуральном  $n$  число  $n^3 + 3n^2 + 6n + 8$  является составным.

**Решение.** Утверждение задачи следует из разложения данного выражения на множители, каждый из которых больше единицы при всех натуральных  $n$ :

$$(n^3 + 8) + (3n^2 + 6n) = (n + 2)(n^2 - 2n + 4) + 3n(n + 2) = \\ = (n + 2)(n^2 + n + 4).$$

62. Назовем натуральное число *особым*, если оно представимо в виде  $m^2 + 2n^2$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа. Докажите, что произведение двух *особых* чисел также *особое* число.

**Решение.** Утверждение задачи следует из тождества

$$(m^2 + 2n^2)(a^2 + 2b^2) = m^2a^2 + 2m^2b^2 + 2n^2a^2 + 4n^2b^2 = \\ = (ma - 2nb)^2 + 2(mb + na)^2.$$

63. Длины  $a$ ,  $b$  и  $c$  сторон некоторого треугольника удовлетворяют соотношению  $2(a^8 + b^8 + c^8) = (a^4 + b^4 + c^4)^2$ . Докажите, что треугольник прямоугольный.

**Решение.** Имеем  $2(a^8 + b^8 + c^8) = (a^4 + b^4 + c^4)^2 \Leftrightarrow a^8 + b^8 + c^8 - 2a^4b^4 - 2a^4c^4 - 2b^4c^4 = 0 \Leftrightarrow (a^4 + b^4 - c^4)^2 - 4a^4b^4 = 0 \Leftrightarrow (a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - c^4)(a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - c^4) = 0 \Leftrightarrow ((a^2 - b^2)^2 - c^4) \cdot ((a^2 + b^2)^2 - c^4) = 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + b^2 + c^2) = 0$ . Последняя скобка положительна, а равенство нулю любой из трех первых скобок, по обратной теореме Пифагора, дает требуемое утверждение.

64. Докажите, что при любых  $a$  и  $b$  уравнение  $(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$

имеет решение.

**Решение.** Если  $a^2 - b^2 \neq 0$ , то данное уравнение — квадратное с дискриминантом  $\frac{1}{4}D = (a^3 - b^3)^2 - (a^2 - b^2) \times \times (a^4 - b^4) = a^2b^4 - 2a^3b^3 + a^4b^2 = a^2b^2(a - b)^2 \geq 0$ .

Если  $a^2 - b^2 = 0$ , то уравнение имеет корень  $x = 0$ .

65. Дан многочлен  $P(x) = x^{2n} + x^{2n-1} + \dots + x^2 + x + 1$ ,  $n > 2$ . Удвойте у него несколько (больше одного) коэффициентов так, чтобы полученный многочлен представлялся в виде произведения двух многочленов степени больше первой каждый.

**Решение.** Удвоим все коэффициенты, кроме коэффициентов при  $x^{2n}$ ,  $x^{2n-1}$ ,  $x$  и свободного члена. Тогда

$$x^{2n} + x^{2n-1} + 2x^{2n-2} + 2x^{2n-3} + \dots + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = \\ = (x^{2n} + x^{2n-1} + \dots + x^3 + x^2) + (x^{2n-2} + x^{2n-3} + \dots + x + 1) = \\ = (x^2 + 1)(x^{2n-2} + x^{2n-3} + \dots + x + 1).$$

## Арифметическая и геометрическая прогрессии

66. Знаменатель ненулевой геометрической прогрессии не меньше двух. Докажите, что ни один из членов прогрессии нельзя представить в виде суммы конечного числа различных членов этой прогрессии.

**Решение.** Допустим противное, т. е. для некоторого  $k$ :  $b_1 q^k = b_1 q^a + b_1 q^b + \dots + b_1 q^v$ , где  $a < b < \dots < v$ ,  $q \geq 2$ . Тогда левую и правую части равенства можно сократить на  $b_1$ , так как  $b_1 \neq 0$ . Если  $k > v$ , то равенство невозможно, так как

$$\begin{aligned} q^a + \dots + q^v &\leq 1 + q + \dots + q^v = \\ &= \frac{q^{v+1} - 1}{q - 1} \leq q^{v+1} - 1 < q^{v+1} \leq q^k. \end{aligned}$$

При  $k \leq v$  равенство также невозможно, поскольку в сумме есть, кроме  $q^v$ , и другие положительные слагаемые:

$$q^a + \dots + q^v > q^v \geq q^k.$$

Во всех случаях мы приходим к противоречию.

67. Кузнечик прыгает по плоскости так, что длина каждого следующего прыжка вдвое больше длины предыдущего прыжка. Сможет ли кузнечик когда-нибудь вернуться в начальную точку?

**Ответ:** не сможет.

**Решение.** Пусть длина первого прыжка кузнечика равна  $d$ , и после  $n$  прыжков он вернулся в начальную точку. Тогда его путь — замкнутая ломаная  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n A_1$  со звеньями длины  $d, 2d, 4d, \dots, 2^{n-1}d$ . Такая ломаная не существует, так как длина одного ее звена больше суммы длин других звеньев:

$$\begin{aligned} 2^{n-1}d &> d + 2d + \dots + 2^{n-2}d \\ (1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-2}) &< 2 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-2} = \\ &= 4 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-2} = \dots = 2^{n-1}. \end{aligned}$$

**Комментарий.** Неравенство, возникающее в задаче 67, является частным случаем неравенства, доказанного в задаче 66.

## Уравнения и неравенства

**Уравнение с одной переменной. Корни уравнения.**

**Линейное уравнение. Квадратное уравнение.**

**Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение рациональных уравнений**

68. Квадратный трехчлен  $x^2 + ax + b$  имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число  $a + b + 1$  составное.

**Решение.** Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни данного трехчлена. Тогда из теоремы Виета  $a + b + 1 = -(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 + 1 = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$ . Из условия следует, что каждая скобка не равна 1, -1 или 0. То есть число  $a + b + 1$  составное.

69. Произведение четырех чисел — корней уравнений

$$x^2 + 2bx + c = 0 \text{ и } x^2 + 2cx + b = 0,$$

где  $b$  и  $c$  положительны — равно единице. Найдите  $b$  и  $c$ .

**Ответ:**  $b = c = 1$ .

**Решение.** По теореме Виета  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = c \cdot b \Rightarrow bc = 1$ . Но  $b^2 - c \geq 0$  и  $c^2 - b \geq 0$  (так как уравнения имеют по два корня и, следовательно, их  $D \geq 0$ )  $\Rightarrow b^2 \geq \frac{1}{b}, \frac{1}{b^2} \geq b$ , т. е.  $b \geq 1$  и  $\frac{1}{b} \geq 1$ , откуда  $b = 1$ .

70. Квадратный трехчлен  $ax^2 + bx + c$  имеет корни. Верно ли, что трехчлен  $a^3x^2 + b^3x + c^3$  также имеет корни?

**Ответ:** верно.

**Решение:** Так как  $ax^2 + bx + c$  имеет корни, то  $b^2 \geq 4ac$ , откуда  $(b^2)^3 \geq (4ac)^3$ ,  $b^6 \geq 64a^3c^3$ . Если  $ac \geq 0$ , то  $64a^3c^3 \geq 4a^3c^3$ , а если  $ac < 0$ , то  $b^6 \geq 0 > 4a^3c^3$  — в обоих случаях  $b^6 \geq 4a^3c^3$ . То есть  $D \geq 0$  для уравнения  $a^3x^2 + b^3x + c^3 = 0$ , поэтому трехчлен  $a^3x^2 + b^3x + c^3$  имеет корни.

71. Квадратный трехчлен  $P(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$  — целые числа,  $c$  — нечетное число) имеет целые корни. Может ли  $P(1997)$  быть нечетным числом?

**Ответ:** не может.

**Решение.** Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни  $P(x)$ . Тогда по теореме Виета  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ , т. е.  $x_1 \cdot x_2 \cdot a = c$ . По условию  $c$  — нечетное;  $a, x_1, x_2$  — целые. Отсюда следует, что  $a, x_1, x_2$  — нечетные. По теореме Виета  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ , т. е.  $b = -(x_1 + x_2) \cdot a$ , т. е.  $b$  — четное число. Тогда  $P(1997) = a \cdot 1997^2 + b \cdot 1997 + c$  — сумма двух нечетных и одного четного числа, т. е. четное число.

**Уравнение с двумя переменными. Система уравнений. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение простейших нелинейных систем. Графическая интерпретация решения систем уравнений с двумя переменными**

72. Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} xy + z = 94, \\ x + yz = 95. \end{cases}$$

**Ответ:**  $x = 95, y = 0, z = 94$  или  $x = 31, y = 2, z = 32$ .

**Решение.** Вычтя из второго уравнения системы первое, получим  $(x - z) \cdot (1 - y) = 1$ . Так как  $x, y, z$  — целые числа, то возможны два случая:

1)  $x - z = 1, 1 - y = 1$ , т. е.  $y = 0$ . Подставив  $y = 0$  в систему, получим  $z = 94, x = 95$ .

2)  $x - z = -1, 1 - y = -1$ , т. е.  $z = x + 1, y = 2$ . Подставим  $y$  и  $z$  в первое уравнение системы:  $2x + x + 1 = 94, x = 31$ . Отсюда  $z = 32$ .

**Неравенства. Линейные неравенства с одной переменной и их системы.**  
**Неравенства второй степени с одной переменной.**  
**Неравенства о средних**

73. Числа  $a$  и  $b$  — длины катетов,  $c$  — длина гипотенузы прямоугольного треугольника. Докажите, что  $a^4 + a^2b^2 + b^4 \geq \frac{3}{4}c^4$ .

**Решение.** Из равенства  $a^2 + b^2 = c^2$  (так как треугольник с длинами  $a, b, c$  прямоугольный) следует  $(a^2 + b^2)^2 = (c^2)^2, a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = c^4$ , поэтому доказываемое неравенство принимает вид  $4(a^4 + a^2b^2 + b^4) \geq 3 \times \times (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) \Leftrightarrow a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 \geq 0$ .

74. Даны действительные числа  $a, b, c$ , причем  $a > b > c$ . Докажите неравенство  $a^2b + b^2c + c^2a > b^2a + a^2c + c^2b$ .

**Решение.** Перенесем все слагаемые в левую часть:  $a^2b + b^2c + c^2a - b^2a - a^2c - c^2b = ab(a - b) - c(a^2 - b^2) + + c^2(a - b) = (a - b)(ab - ac - bc + c^2) = (a - b)(b - c) \times \times (a - c) > 0$ , так как выражение в каждой из скобок положительно.

75. Докажите, что при всех положительных  $x, y, z$  выполняется неравенство  $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} \geq 4(x - z)$ .

**Решение.** Докажем, что при  $x, y > 0$  выполняется неравенство  $\frac{x^2}{y} \geq 4(x - y)$ . Действительно, домножим обе части неравенства на  $y$ :  $x^2 \geq 4(xy - y^2)$ , или, что то же,  $(x - 2y)^2 \geq 0$ . Теперь, сложив неравенство  $\frac{x^2}{y} \geq 4(x - y)$  с неравенством  $\frac{y^2}{z} \geq 4(y - z)$ , мы получим требуемое.

## Функции

**Прямоугольная система координат на плоскости. Функция. Область определения и область значения функции. График функции. Возрастание функции, сохранение знака на промежутке. Преобразование графиков функций. Свойства квадратного трехчлена. Геометрические свойства графика квадратичной функции**

76. Графики трех линейных функций расположены так, как показано на рисунке 22. Существуют ли такие числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , что одна из этих функций задается формулой  $y = ax + b$ , другая — формулой  $y = bx + c$ , а третья — формулой  $y = cx + a$ ?

**Ответ:** не существуют.

**Решение.** Предположим противное. Пусть уравнение прямой  $l_1$  (рис. 23) имеет вид  $y = bx + c$ . У этой прямой самый большой угловой коэффициент, в частности  $b > c$ . Но прямая  $l_1$  пересекает ось ординат в точке с ординатой  $c$ , прямая  $l_2$  — в точке с ординатой  $b$ , причем из рисунка видно, что  $c > b$ . Полученные неравенства противоречат друг другу, следовательно, таких чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  не существует.

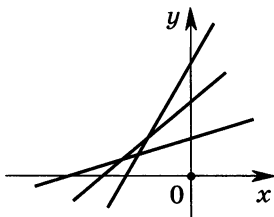


Рис. 22

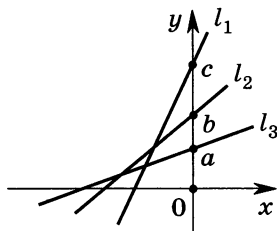


Рис. 23

77. Рассматриваются квадратичные функции  $y = x^2 + px + q$ , у которых  $p + \frac{1}{2}q = 2001$ . Докажите, что их графики проходят через одну точку.

**Решение.** Рассмотрим значение трехчлена в точке  $x_0 = 2$ . Тогда

$$\begin{aligned} x_0^2 + px_0 + q &= 4 + 2p + q = 4 + 2 \left( p + \frac{q}{2} \right) = \\ &= 4 + 2 \cdot 2001 = 4006. \end{aligned}$$

То есть графики всех трехчленов проходят через точку  $(2; 4006)$ .

78. Дан график функции  $y = x^2 + ax + a$  (рис. 24). Найдите  $a$ .

Ответ: 4.

**Решение.** График касается оси  $Ox$ , поэтому  $y = (x + x_0)^2$ ,  $y = x^2 + 2x_0x + x_0^2$ , т. е.  $a = 2x_0$  и  $a = x_0^2$ . Отсюда  $a = 0$  или  $a = 4$ . Но из графика видно, что  $a \neq 0$ .

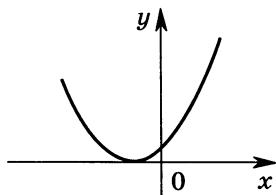


Рис. 24

79. На рисунке 25 изображены графики трех квадратных трехчленов. Могут ли это быть трехчлены  $ax^2 + bx + c$ ,  $cx^2 + ax + b$ ,  $bx^2 + cx + a$ ?

Ответ: не могут.

**Решение.** Предположим противное. Заметим, что значения данных трехчленов в точке  $x = 1$  совпадают. Но из рисунка 25 видно, что каждые две из парабол пересекаются в двух точках, причем все эти шесть точек пересечения различны. Получили противоречие.

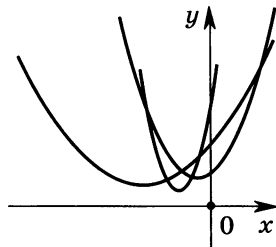


Рис. 25

## Планиметрия

**Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника. Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников. Неравенство треугольника. Средняя линия треугольника и ее свойства. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Свойства равнобедренного и равностороннего треугольников. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Решение прямоугольных треугольников**

80. Точка  $D$  — середина стороны  $AC$  треугольника  $ABC$ ,  $DE$  и  $DF$  — биссектрисы треугольников  $ABD$  и  $CBD$ . Отрезки  $BD$  и  $EF$  пересекаются в точке  $M$ . Докажите, что  $DM = \frac{1}{2} EF$ .

**Решение.** По свойству биссектрисы треугольника  $BE : EA = BD : DA = BD : DC = BF : FC$  (рис. 26). Значит,  $EF \parallel AC$ , откуда  $EM : MF = AD : DC = 1 : 1$ , т. е.  $DM$  — медиана треугольника  $EDF$ . Но  $\angle EDF = \angle EDB + \angle FDB = \frac{1}{2} \angle ADB + \frac{1}{2} \angle CDB = \frac{1}{2} (\angle ADB + \angle CDB) = 90^\circ$ . Таким образом,  $DM = \frac{1}{2} EF$  по свойству медианы прямоугольного треугольника.

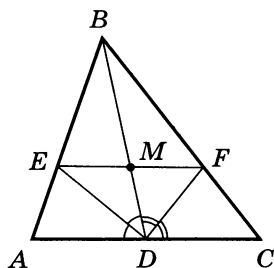


Рис. 26

81. В треугольнике  $ABC$  проведены медианы  $AM$  и  $BN$ . Известно, что  $\angle MAC = \angle NBC = 30^\circ$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  правильный.

**Решение.** Докажем, что  $\angle ACB = 60^\circ$ . Допустим, что это не так. Опустим из точки  $C$  перпендикуляры  $CK$  и  $CL$  на прямые  $BN$  и  $AM$  (рис. 27; этот рисунок соответствует случаю  $\angle ACB > 60^\circ$ , случай  $\angle ACB < 60^\circ$  разбирается точно так же). Тогда из  $\triangle ACL$  находим  $CL = \frac{1}{2} AC = CN$  и аналогично из  $\triangle BCK$ :  $CK = CM$ . С другой стороны,  $CK < CN$  и  $CL < CM$ . Следовательно,  $CL < CM = CK < CN = CL$ . Получили противоречие. Итак,  $\angle ACB = 60^\circ$ . Но тогда  $\angle AMC = \angle BNC = 90^\circ$ , т. е. медианы  $AM$  и  $BN$  являются одновременно и высотами в  $\triangle ABC$ , следовательно,  $BC = AB$  и  $AC = AB$ , т. е.  $\triangle ABC$  правильный.

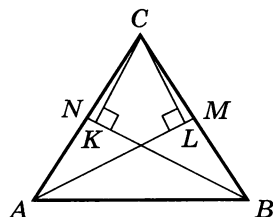


Рис. 27

82. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AD$  и  $CE$ . Точки  $M$  и  $N$  — основания перпендикуляров, опущенных на прямую  $DE$  из точек  $A$  и  $C$  соответственно (рис. 28). Докажите, что  $ME = DN$ .

**Первое решение.** Точки  $D$  и  $E$  лежат на окружности с диа-

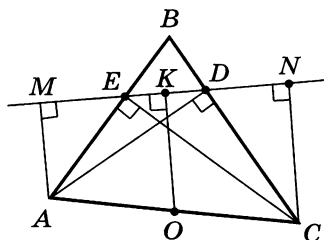


Рис. 28



метром  $AC$ , значит,  $OE = OD$ , где  $O$  — середина стороны  $AC$ . Тогда  $KE = KD$ , где  $OK \perp MN$  (из равенства треугольников  $KEO$  и  $KDO$  по двум сторонам и углу между ними). Значит,  $OK \parallel AM$ , т. е.  $OK$  — средняя линия трапеции  $CAMN$ . Отсюда  $MK = NK \Rightarrow ME = DN$ , так как  $EK = KD$ .

**Второе решение.** Пусть  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle BCA = \gamma$ . Из подобия  $\triangle ABD$  и  $\triangle CBE$  следует подобие  $\triangle ABC$  и  $\triangle DBE \Rightarrow \angle BED = \gamma$ ,  $\angle BDE = \alpha$ , значит,  $ME \stackrel{\text{из } \triangle MAE}{=} AE \cos \gamma = \stackrel{\text{из } \triangle AEC}{=} AC \cos \alpha \cos \gamma$ . Аналогично  $DN = AC \cos \gamma \cos \alpha$ .

**Четырехугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства. Трапеция. Средняя линия трапеции и ее свойства. Площади четырехугольников.**

**Понятие о симметрии**

83. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  угол  $BAD$  равен  $60^\circ$ . Точки  $A_1$  и  $A_2$  симметричны точке  $A$  относительно прямых  $CB$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что  $\angle BCD = 60^\circ$ , если известно, что точки  $A_1, A_2, B$  и  $D$  лежат на одной прямой.

**Решение.** Пусть  $K$  и  $M$  — точки пересечения прямых  $CB$  и  $AA_1$ ,  $CD$  и  $AA_2$  (рис. 29). Из условия следует, что  $BK$  — ось симметрии треугольника  $ABA_1$ , поэтому  $AB = BA_1$  и  $BK$  — биссектриса угла  $ABA_1$ . Отсюда следует, что  $\angle CBD = \angle KBA_1 = \frac{1}{2} \angle A_1BA = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle ABD)$ . Аналогично  $\angle CDB = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle ADB)$ . Тогда  $\angle BCD = 180^\circ - \angle CBD - \angle CDB = \frac{1}{2} (\angle ABD + \angle ADB) = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle BAD) = 60^\circ$ .

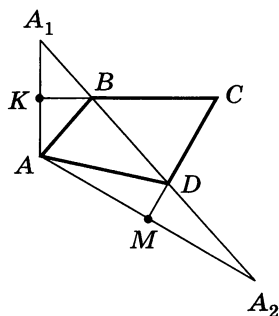


Рис. 29

84. Серединные перпендикуляры к сторонам  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$  пересекаются на стороне  $AD$ . Докажите, что если  $\angle A = \angle D$ , то диагонали четырехугольника  $ABCD$  равны.

**Решение.** Пусть  $K$  — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$  (рис. 30). Тогда  $AK = KB$ ,  $CK = KD$  и  $\angle KBA = \angle BAK = \angle KDC = \angle KCD$ . Отсюда  $\angle AKB = \angle CKD$ , значит,  $\angle AKC = \angle BKD$ . Но тогда  $\triangle AKC = \triangle BKD$  (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно,  $AC = BD$ .

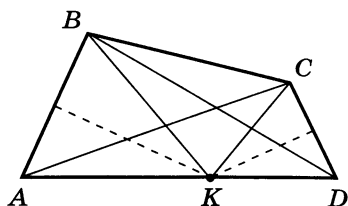


Рис. 30

**Окружность и круг. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник. Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности**

85. В окружность вписан прямоугольный треугольник  $ABC$  с гипотенузой  $AB$ . На большем катете  $BC$  взята точка  $D$  так, что  $AC = BD$ , а точка  $E$  — середина дуги  $AB$ , содержащей точку  $C$ . Найдите угол  $DEC$ .

**Ответ:**  $90^\circ$ .

**Решение.** Точка  $E$  — середина дуги  $AB$  (рис. 31), поэтому  $AE = BE$ . Кроме того, вписанные углы  $CAE$  и  $EBC$ , опирающиеся на одну дугу, равны. Также по условию  $AC = BD$ . Значит, треугольники  $ACE$  и  $BDE$  равны, откуда  $\angle CEA = \angle BED$ . Но тогда  $\angle DEC = \angle BEA = 90^\circ$ , так как  $\angle BEA = \angle BCA$ .

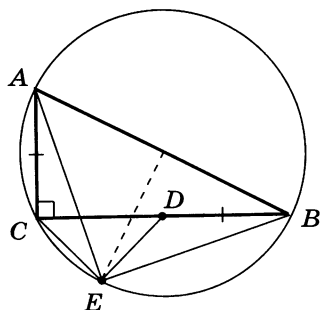


Рис. 31

86. На боковой стороне  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) выбрана точка  $D$  так, что  $CD = CA$ . Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , совпадает с центром окружности, описанной около треугольника  $ADC$ .

**Решение.** Центр  $O$  вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника  $ABC$  (рис. 32). Но биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является и его высотой, и медианой. Значит, точка  $O$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $AC$ . Аналогично  $O$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $AD$ , т. е. является центром окружности, описанной около треугольника  $ADC$ .

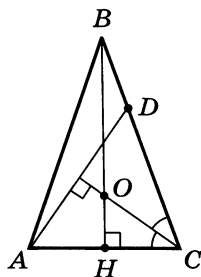


Рис. 32

87. В неравнобедренном остроугольном треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BD$ . На продолжении  $DB$  за точку  $B$  выбрана точка  $K$  так, что  $\angle CAK = \angle BCA$ . Докажите, что окружность, проходящая через точку  $B$  и касающаяся прямой  $AC$  в точке  $C$ , пересекает  $BD$  в ортоцентре (точке пересечения высот) треугольника  $AKC$ .

**Решение.** Пусть построенная окружность пересекает  $BD$  в точке  $H$  (рис. 33) и  $CH$  пересекает  $AK$  в точке  $N$ . По теореме об угле между касательной и хордой  $\angle NCA = \frac{1}{2} \angle CH = \angle CBH = \angle CBD = 90^\circ - \angle BCD = 90^\circ - \angle BCA = 90^\circ - \angle KAC = 90^\circ - \angle NAC$ . Значит,  $\angle CNA = 90^\circ$ , т. е.  $CN$  — высота  $\triangle AKC$ , и тогда  $H$  — ортоцентр треугольника  $AKC$ .

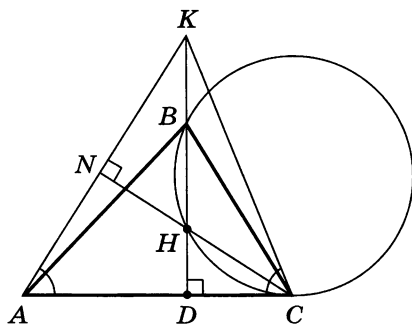


Рис. 33

88. Докажите, что любой прямоугольный треугольник с гипотенузой  $c$  можно закрыть тремя одинаковыми кругами радиуса  $\frac{c}{4}$ .

**Решение.** Проведем в прямоугольном треугольнике медиану из вершины прямого угла и средние линии, параллельные катетам. Они пересекут его на четыре рав-

ных прямоугольных треугольника с гипотенузами, равными  $\frac{c}{2}$ , причем у двух из них общей гипотенузой будет медиана исходного треугольника.

Построим три круга радиуса  $\frac{c}{4}$  с центрами в серединах гипотенуз этих четырех треугольников. Каждый из них будет описанным для соответствующих треугольников и потому целиком закроет их. Поэтому вместе эти круги целиком закроют исходный треугольник (рис. 34).

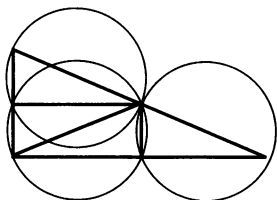


Рис. 34

**Задачи на построение с помощью циркуля и линейки. Вектор. Угол между векторами. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов**

89. Клетки доски  $2001 \times 2001$  раскрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета так, что угловые клетки черные. Для каждой пары разноцветных клеток рисуется вектор, идущий из центра черной клетки в центр белой. Докажите, что сумма всех нарисованных векторов равна нулю.

**Решение.** Для любой черной клетки, не лежащей в центре квадрата, и любой белой клетки существует симметричная им пара из черной и белой клеток. Сумма двух векторов, порожденных каждой из пар, равна нулю (рис. 35). А для центральной клетки (она черного цвета) все выходящие из нее векторы разбиваются на пары с нулевой суммой, так как все белые клетки разбиваются на пары клеток, симметричных относительно центра квадрата (рис. 36).

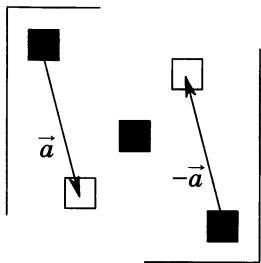


Рис. 35

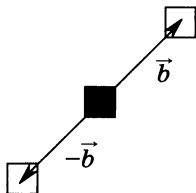


Рис. 36

**Гомотетия. Преобразования плоскости:  
параллельный перенос, симметрия, поворот.**

(Данная тема предлагается только  
для третьего этапа.)

90. Парабола  $y = -x^2 + b_1x + c_1$  и парабола  $y = -x^2 + b_2x + c_2$  касаются параболы  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a > 0$ . Докажите, что прямая, проходящая через точки касания, параллельна общей касательной к первым двум параболам.

**Первое решение.** Пусть  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  — данные параболы,  $KL$  — общая касательная к  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  касается  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  в точках  $A$  и  $B$  (рис. 37).

Пусть  $l$  — касательная к  $\Pi_3$ , параллельная  $KL$ ,  $C$  — точка касания. Тогда гомотетия  $H_1$  с центром в точке  $A$  и коэффициентом  $k = -a$  переводит параболу  $\Pi_1$  в параболу  $\Pi_3$ , при этом касательная  $KL$  к параболе  $\Pi_1$  переходит в параллельную касательную к параболе  $\Pi_3$ , т. е. в  $l$ . Следовательно, гомотетия  $H_1$  переводит  $K$  в  $C$ . Аналогично гомотетия  $H_2$  с центром в точке  $B$  и коэффициентом  $k = -a$  переводит  $L$  в  $C$ . Итак,  $CA : AK = CB : BL = a$  и, значит,  $AB \parallel KL$ .

**Второе решение.** Вычтем из всех трех квадратных трехчленов, задающих параболы, функцию  $f(x) = a_3x + b_3$ , где  $y = a_3x + b_3$  — уравнение прямой  $AB$ . Тогда получим новые параболы  $\Pi'_1$ ,  $\Pi'_2$ ,  $\Pi'_3$  (рис. 38), при этом  $\Pi'_1$  и  $\Pi'_2$  по-прежнему будут касаться параболы  $\Pi'_3$ ,

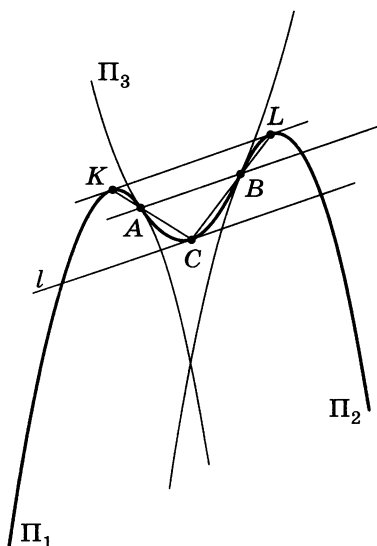


Рис. 37

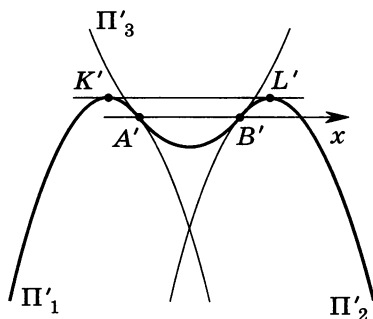


Рис. 38

так как у этих пар парабол по-прежнему будет ровно по одной общей точке  $A'$  и  $B'$ .

Точки  $A'$  и  $B'$  лежат на оси  $Ox$ , поэтому рисунок симметричен относительно серединного перпендикуляра к отрезку  $A'B'$ . Из этого следует, что  $K'L' \parallel A'B'$  и, значит,  $KL \parallel AB$ .

91. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $\omega$ . Продолжения противоположных сторон этого четырехугольника пересекаются в точках  $K$  и  $N$ . Докажите, что окружность, описанная около треугольника  $AKN$ , касается окружности  $\omega$  тогда и только тогда, когда окружность, описанная около треугольника  $CKN$ , касается окружности  $\omega$ .

**Первое решение.** Обозначим через  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  соответственно окружности, описанные около треугольников  $CKN$  и  $AKN$  (рис. 39). Докажем, что если  $\omega_1$  касается  $\omega_2$ , то  $\omega_2$  касается  $\omega$ . Пусть  $l_1$  — касательная к  $\omega_1$  и  $\omega$  в точке  $C$ , а  $l_2$  — касательная к  $\omega$  в точке  $A$ . Будем через  $\angle STl_i$  обозначать угол между прямыми  $ST$  и  $l_i$  ( $S$  и  $T$  — какие-либо точки). Тогда  $\angle KNC = \angle KCl_1 = \angle BCl_1 = \angle CDB \Rightarrow BD \parallel KN \Rightarrow \angle NKD = \angle BDA = \angle Bal_2 = \angle NAl_2 \Rightarrow l_2$  касается  $\omega_2$ .

Обратное аналогично.

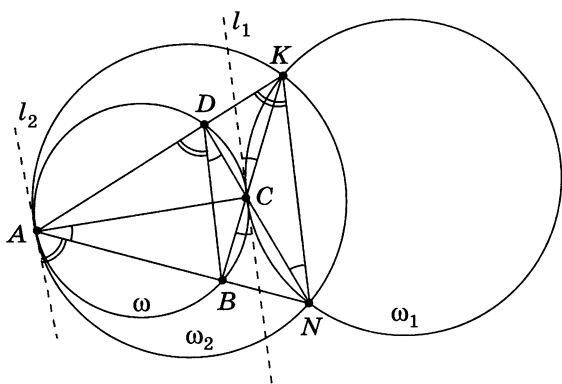


Рис. 39

**Второе решение.** Пусть  $r$ ,  $r_1$  и  $r_2$  — соответственно радиусы окружностей  $\omega$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Пусть окружность  $\omega_2$  касается окружности  $\omega$  в точке  $A$ . Тогда гомотетия  $H_1$  с центром в точке  $A$  и коэффициентом  $k = \frac{r_2}{r}$  переводит  $\omega$  в  $\omega_2$ , следовательно,  $H_1(D) = K$ ,  $H_1(B) = N$ , откуда  $KN \parallel DB$  и  $KN = kDB$ . Но тогда гомотетия  $H_2$  с центром  $C$  и коэффициентом  $k' = -k$  переводит  $\triangle CDB$  в  $\triangle CNK$  и, следовательно,  $H_2$  переводит описанную

окружность около  $\triangle CDB$  в описанную окружность около  $\triangle CNK$ , т. е.  $H_2(\omega) = \omega_1$ . А это означает, что окружности  $\omega$  и  $\omega_1$  касаются, так как центр гомотетии лежит на одной из них.

Обратное аналогично.

## **Специальные олимпиадные темы**

### ***Логические задачи.***

#### ***Истинные и ложные утверждения***

92. За круглым столом сидят  $2n$  ( $n > 5$ ) человек — рыцари и лжецы. Лжецы на любой вопрос дают ложный ответ, рыцари — правдивый. Каждый из них знает, кто рыцарь, а кто лжец. Каждый из них дал ответы на два вопроса: «Кто его сосед слева», «Кто его сосед справа». Мудрецу, который знает, что лжецы за столом присутствуют, но их меньше, чем рыцарей, сообщили количество ответов «Рыцарь» и ответов «Лжец», и он точно назвал количество рыцарей. Сколько ответов «Рыцарь» получил мудрец? Объясните ответ.

**Ответ:** 4.

**Решение.** Друг про друга два сидящих рядом рыцаря (Р), как и два сидящих рядом лжеца (Л), дают ответы «Р» и «Р», а сидящие рядом Р и Л — ответы «Л» и «Л». Если число Л меньше  $n - 1$ , то в группе подряд сидящих Р можно заменить крайнего Р на Л, и мы получим тот же набор ответов при другом количестве Р. Также можно заменить Л на Р, если рядом окажутся по крайней мере два Л. Итак, Л ровно  $n - 1$ , и никакие двое из них не сидят рядом. Тогда размещение за столом имеет вид либо —Р—Л—Р— ... —Л—РРР—Л—, либо —Р—Л—Р— ... —Л—РР—Л— ... —Р—Л—РР—Л— ... —Л—. В обоих случаях получаем 4 ответа «Р».

#### ***«Оценка + пример»***

93. На полке стоят 666 книг по черной и белой магии, причем никакие 2 книги по белой магии не стоят через 13 книг (т. е. между ними не может стоять 13 книг). Какое наибольшее число книг по белой магии может стоять на полке?

**Ответ:** 336.

**Решение.** Разобьем книги на цепочки книг, идущих через 13: 1-я, 15-я, 29-я, ...; 2-я, 16-я, ...; ...; 14-я, 28-я, ... Из того, что  $666 = 14 \cdot 47 + 8 = (8 + 6) \cdot 47 + 8$ ,

следует, что мы получим 8 цепочек по 48 книг и 6 цепочек по 47 книг. По условию в каждой из цепочек книги по белой магии не могут быть соседними. Значит, в любой цепочке длины 48 (а таких цепочек восемь) их наибольшее количество равно 24, и в цепочке длины 47 (а таких цепочек шесть) их также может быть 24 (цепочка начинается и заканчивается такой книгой). Всего  $(8 + 6) \cdot 24 = 14 \cdot 24 = 336$  книг.

94. Сумма четырех натуральных чисел равна 1995. Какое наименьшее значение может принимать их НОК?

**Ответ:** 570.

**Решение.** Пусть  $a \leq b \leq c \leq d$  — натуральные числа, сумма которых равна 1995, и  $N = \text{НОК}(a, b, c, d)$ . Заметим, что все числа равны быть не могут, так как 1995 не делится на 4. Тогда ясно, что  $2a \leq N$ ,  $b \leq N$ ,  $c \leq N$ ,  $d \leq N$ . Умножая первое неравенство на  $\frac{1}{2}$  и складывая с остальными, получим  $a + b + c + d < \left(\frac{7}{2}\right)N$ ,

т. е.  $N \geq \frac{2}{7}(a + b + c + d) = 570$ .

Если  $A = \frac{1995}{7} = 285$ ,  $b = c = d = 2a = 570$ , то  $a + b + c + d = 1995$  и  $N = 570$ .

95. Центр города представляет из себя квадрат  $5 \times 5$  км<sup>2</sup>, состоящий из 25 кварталов размером  $1 \times 1$  км<sup>2</sup>, границы которых — улицы, образующие 36 перекрестков. Какое наименьшее количество полицейских необходимо поставить на перекрестках так, чтобы до каждого из перекрестков какой-то из полицейских мог бы добраться, проехав на машине не более 2 км?

**Ответ:** 4 полицейских.

**Решение.** Рассмотрим угловой перекресток А. До него полицейский может добраться, если он находится на одном из 6 перекрестков, примыкающих к этому углу (рис. 40). Аналогичные рассуждения для трех оставшихся углов показывают, что для выполнения условия задачи необходимо наличие по крайней мере четырех полицейских. Приведем пример такой расстановки четырех полицейских (рис. 41).

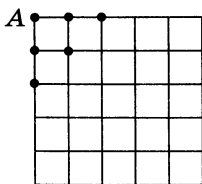


Рис. 40

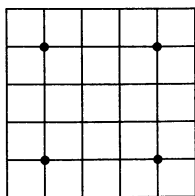
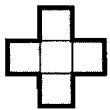


Рис. 41



## Построение примеров и контрпримеров

96. Как изготовить прямоугольную коробку площади 16, чтобы в нее можно было поместить два пирож-

ных указанной формы (  )?

(Пирожное состоит из пяти квадратов  $1 \times 1$ ).

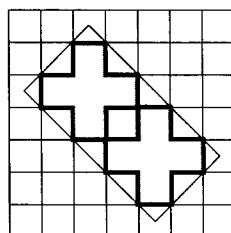


Рис. 42

Ответ: см. рисунок 42.

**Решение.** Выделенный в центре рисунка 42 прямоугольник состоит из 11 полных квадратики  $1 \times 1$ , а также 8 половинок и 4 четвертушек квадратиков, поэтому его площадь равна

$$11 + 8 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 16.$$

97. Найдите два последовательных 100-значных числа, таких, что сумма цифр каждого из них — точный квадрат.

**Решение.** Подойдут, например, числа

$$N = 100 \dots \underbrace{0009999999899}_{90 \text{ цифр}} \text{ и } N + 1 = 100 \dots \underbrace{0009999999900}_{90 \text{ цифр}}.$$

Сумма цифр числа  $N$  равна 81, а сумма цифр числа  $N + 1$  равна 64.

## Принцип Дирихле

98. Натуральные числа 22, 23 и 24 обладают тем свойством, что в разложении каждого из них на простые множители каждый множитель входит в нечетной степени:  $22 = 2^1 \cdot 11^1$ ,  $23 = 23^1$ ,  $24 = 2^3 \cdot 3^1$ . Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел может обладать таким свойством?

Ответ: 7.

**Решение.** Пример: 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35. Теперь покажем, что восемью подряд идущих чисел с указанным свойством быть не может. Действительно, одно из этих чисел (обозначим его  $n$ ) делится на 8. Среди восьми наших чисел обязательно будет либо число  $(n - 4)$ , либо число  $(n + 4)$ . Оно делится на 4, но не делится на 8, что противоречит условию, так как делитель 2 входит в это число в четной степени.

## Разрезания

1. Можно ли из квадрата  $5 \times 5$  вырезать прямоугольник  $1 \times 6$ ?

**Ответ:** можно.

**Решение.** Вырежем из квадрата  $ABCD$  прямоугольник  $KLMN$ , как показано на рисунке 43 (сторона  $KL$  параллельна диагонали  $AC$ , а сторона  $NK = 1$ ). Покажем, что  $MN > 6$ . В прямоугольном треугольнике  $ANK$  катет  $AN = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Значит,  $ND = 5 - AN = 5 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ . А в

треугольнике  $NMD$  гипотенуза  $MN = \sqrt{2}ND = 5\sqrt{2} - 1$ . Покажем, что  $5\sqrt{2} - 1 > 6$ . Так как  $50 > 49$ , то  $2 \cdot 5^2 > 7^2$  и  $5\sqrt{2} > 7$ , из чего и следует доказываемое неравенство.

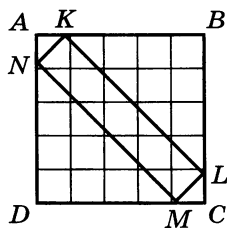


Рис. 43

10. Разрежьте клетчатый квадрат  $6 \times 6$  клеток на наибольшее число клетчатых прямоугольников, никакие два из которых не являются одинаковыми.

**Решение.** Пример разрезания на 8 попарно различных клетчатых прямоугольников показан на рисунке 44. Покажем, что мы не сможем разрезать квадрат  $6 \times 6$  более чем на 8 попарно различных клетчатых прямоугольников. Предположим, что существует требуемое разрезание более чем на 8 прямоугольников. Рассмотрим все клетчатые прямоугольники площади не больше 6. Их всего 8. Есть по одному прямоугольнику площади 1, 2, 3, 5 (это прямоугольники  $1 \times 1$ ,  $1 \times 2$ ,  $1 \times 3$  и  $1 \times 5$ ). Есть два прямоугольника площади 4 (это прямоугольники  $1 \times 4$  и  $2 \times 2$ ). Также есть два прямоугольника площади 6 (это прямоугольники  $1 \times 6$  и  $2 \times 3$ ). Суммарная площадь этих прямоугольников равна 31. Если существует разрезание квадрата более чем на 8 попарно различных клетчатых прямоугольников, то 8 наименьших по площади прямоугольников будут иметь суммарную площадь не меньше 31. Следующий прямоугольник должен иметь площадь больше 6. Но тогда суммарная площадь будет больше 37, что больше  $6^2$ .

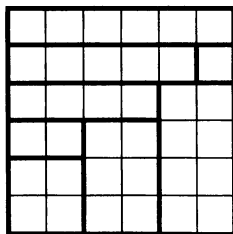


Рис. 44

## Раскраски

101. Можно ли покрасить все клетки доски  $2003 \times 2003$  в два цвета так, чтобы у каждой клетки были ровно две соседние по стороне клетки, покрашенные в тот же цвет, что и сама клетка?

**Ответ:** нельзя.

**Первое решение.** Предположим, что клетка 1 покрашена в черный цвет, тогда клетки 2 и 3 — черного цвета. Тогда клетки 5 и 6 — белого цвета, в противном случае у клетки 4 не будет ровно двух соседей одного с ней цвета. Тогда аналогично клетки 8 и 9 — черного цвета и так далее. Таким образом, клетки, соседние с диагональю, разбиваются на пары одного цвета (2—3, 5—6, 8—9, ...) (рис. 45). Рассматривая другую диагональ, мы получаем, что одноцветными окажутся пары клеток  $a-b$ ,  $c-d$ ,  $e-f$ , ... Но тогда у центральной клетки все соседи — одного цвета, так как одноцветными должны быть пары  $A-B$ ,  $C-D$ , а также  $A-C$ ,  $B-D$  (рис. 46). Противоречие.

1	2			...			$a$	
3	4	5				$c$		$b$
		6	7	8		$e$		$d$
			9				$f$	

Рис. 45

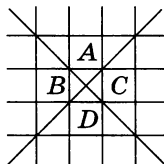


Рис. 46

**Второе решение.** Предположим, что требуемая раскраска существует. Рассмотрим какую-нибудь клетку  $a_1$ . Пусть она покрашена в первый цвет. Для клетки  $a_1$  найдутся две соседних клетки, покрашенных в первый цвет. Возьмем одну из них и назовем ее  $a_2$ . Для клетки  $a_2$ , кроме  $a_1$ , найдется ровно одна соседняя клетка первого цвета. Назовем ее  $a_3$ . Для клетки  $a_3$  найдем соседнюю клетку  $a_4$  первого цвета и так далее. Так как клеток на доске конечное количество, то в какой-то момент процесс выбора клеток закончится. Это произойдет, когда для клетки  $a_N$  нам придется выбрать клетку, которую мы уже выбрали ранее. Заметим, что это может быть только клетка  $a_1$ , так как у остальных клеток с  $a_2$  по  $a_{N-1}$  уже есть по две соседних выбранных клетки. То есть мы получили замкнутую цепочку клеток первого цвета  $a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_N - a_1$ . Все остальные клетки, соседние с клетками этой цепочки, — клетки второго цвета, так как в противном

случае у какой-то клетки цепочки оказалось бы более двух соседей первого цвета. То есть если мы вырежем эти клетки, то у любой оставшейся клетки по-прежнему будет ровно две соседних клетки, покрашенных в тот же цвет, что и сама клетка. Рассмотрим какую-нибудь оставшуюся клетку и аналогичным образом построим для нее замкнутую цепочку, содержащую эту клетку. Таким образом мы можем разбить всю доску на замкнутые одноцветные цепочки клеток.

Покажем теперь, что каждая такая цепочка состоит из четного числа клеток. Действительно, рассмотрим шахматную раскраску нашей доски и произвольную цепочку из  $K$  клеток  $x_1 - x_2 - x_3 - \dots - x_K - x_1$ . Соседние клетки в этой цепочке должны иметь разный цвет. Пусть для определенности клетка  $x_1$  будет черного цвета, тогда клетка  $x_2$  — белого,  $x_3$  — черного и так далее. Мы получим, что все клетки с нечетными номерами будут черными, а с четными номерами — белыми. Но так как клетки  $x_1$  и  $x_K$  соседние, то клетка  $x_K$  должна быть белого цвета, т. е.  $K$  — четно. Таким образом мы показали, что каждая цепочка состоит из четного числа клеток, но тогда и вся доска как объединение таких цепочек должна состоять из четного числа клеток. Однако число  $2003 \cdot 2003$  нечетное. Полученное противоречие завершает доказательство.

102. Можно ли раскрасить клетки доски  $8 \times 8$  в три цвета: 21 клетку в белый цвет, 21 клетку в синий цвет, 22 клетки в красный цвет так, чтобы ни на одной из диагоналей (не только на двух главных, но и на всех параллельных им) не оказалось одновременно клеток всех трех цветов?

**Ответ:** можно.

**Решение.** Раскрасим все клетки в шахматном порядке в белый и красный цвета, тогда все диагонали будут одноцветными. Затем перекрасим 11 любых белых клеток и 10 любых красных клеток в синий цвет. Полученная раскраска такова, что на одной диагонали не встретятся одновременно белые и красные клетки.

## *Игры*

103. На плоскости даны 11 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Два игрока по очереди проводят по одному отрезку с концами в этих точках (из каждой точки может выходить произвольное количество отрезков, но каждые две точки можно соединять только один раз). Выигрывает тот игрок, после чьего

хода из каждой точки выходит хотя бы один отрезок (при достижении такой ситуации игра заканчивается). Кто может обеспечить себе выигрыш в этой игре — тот, кто начинает, или его соперник?

**Ответ:** выигрывает второй игрок, т. е. соперник начинающего игроу.

**Решение.** Предположим, что в какой-то момент игры только от одной или двух точек не было ни одного отрезка. Тогда игрок, чей сейчас ход, в такой ситуации может выиграть одним ходом. Если от двух точек не было ни одного отрезка, то он должен соединить их отрезком. Если только от одной точки не было ни одного отрезка, то он должен провести отрезок от этой точки к какой-то другой. Таким образом, игрок, который сделает ход, после которого останется две или одна точка без отрезков, проигрывает. Игрок вынужден будет сделать такой проигрышный ход только в одном случае: перед его ходом есть три точки, из которых не ведет ни одного отрезка, а 8 остальных точек попарно соединены отрезками. То есть к этому моменту сдела-

но  $\frac{7 \cdot 8}{2} = 28$  ходов. Это означает, что 28-й ход сделал второй игрок. То есть проигрышный ход должен сделать первый игрок.

104. На столе доньшками вниз стоит 1001 пустой стакан. Два игрока по очереди переворачивают стаканы, в том числе и перевернутые ранее, по следующим правилам: за первый ход можно перевернуть не более одного стакана, за второй — не более двух и т. д. При этом за каждый ход необходимо перевернуть хотя бы 1 стакан. Выигрывает тот, после хода которого все стаканы расположены доньшками вверх. Кто может выиграть в этой игре независимо от ходов соперника?

**Ответ:** выигрывает второй игрок.

**Решение.** Опишем стратегию второго игрока. Пусть второй игрок переворачивает обратно те стаканы, которые перевернул первый, до тех пор, пока первый не сделает свой 500-й ход. Тогда перед ходом первого игрока каждый раз все 1001 стакан стоят доньшками вниз. И первый игрок имеет право перевернуть каждым своим ходом не более 999 стаканов (ровно 999 ему можно будет перевернуть только при своем 500-м ходе). Тогда пусть первый игрок при своем 500-м ходе перевернул несколько (не более 999) стаканов. Остались неперевернутыми не более 1000 стаканов. А так как второму игроку своим ходом можно перевернуть

1000 стаканов или меньше, то он просто переворачивает оставшиеся стаканы и выигрывает.

105. На столе лежит 2001 монета. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход первый может взять со стола любое нечетное число монет от 1 до 99, второй — любое четное число монет от 2 до 100. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре?

**Ответ:** выигрывает первый игрок.

**Решение.** Опишем стратегию первого игрока. Первым ходом он должен взять со стола 81 монету. Каждым следующим ходом, если второй берет  $x$  монет, то первый должен взять  $101 - x$  монет. Он всегда может это сделать, потому что если  $x$  — четное число от 2 до 100, то  $(101 - x)$  — нечетное число от 1 до 99. Так как  $2001 = 101 \cdot 19 + 81 + 1$ , то через 19 таких «ответов» после хода первого на столе останется 1 монета, и второй не сможет сделать очередной ход, т. е. проигрывает.

106. В левом нижнем углу доски  $7 \times 7$  стоит фишка. Два игрока по очереди передвигают фишку на одну из соседних по стороне клеток. Проигрывает тот игрок, после хода которого фишка попадает в клетку, в которой она уже побывала. Кто выигрывает при правильной игре?

**Ответ:** выигрывает второй игрок.

**Решение.** Опишем выигрышную стратегию второго игрока. Разобьем все клетки доски (кроме начальной) на пары, как показано на рисунке 47. На каждый ход первого в одну из клеток некоторой пары второй ходит в другую клетку той же пары. Таким образом, у второго игрока всегда есть ответный ход. Значит, второй игрок выигрывает.

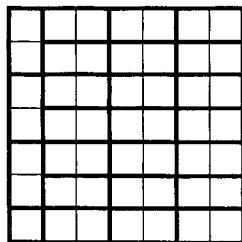


Рис. 47

107. Дан клетчатый прямоугольник  $1 \times 1000$ . Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход играющий может покрасить клетки какого-то прямоугольника  $1 \times 1$ ,  $1 \times 3$  или  $1 \times 5$  клеток (два раза покрасить одну и ту же клетку нельзя). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от игры соперника?

**Ответ:** выигрывает второй игрок.

**Первое решение.** Заметим, что игра закончится, когда будут покрашены все клетки. При этом за каждый ход красится нечетное число клеток. Это означает, что после хода первого будет покрашено нечетное число клеток, а после хода второго — четное. Так как всего клеток 1000, то после каждого хода первого будет оставаться нечетное число непокрашенных клеток, т. е. хотя бы одна, и второй всегда сможет сделать ход. Это означает, что проигрывает первый.

**Второе решение.** Предложим выигрышную стратегию для второго игрока. Пусть он красит прямоугольники симметрично относительно центра прямоугольника. Такой ответный ход возможен во всех случаях, кроме случая, в котором первый покрасит прямоугольник, содержащий центр доски. В этом случае второй должен отвечать так, чтобы после его хода множество покрашенных клеток было симметрично относительно центра прямоугольника (рис. 48). (Темным цветом показаны ходы первого игрока, светлым — ответы второго.)



Рис. 48

### *Инвариант*

108. На доске нарисована таблица  $9 \times 9$ , в левом верхнем углу которой записано число 1. Сережа последовательно заполняет оставшиеся клетки таблицы числами по следующему правилу: он выбирает пару клеток  $A$  и  $B$ , имеющих общую сторону, таких, что  $A$  уже заполнена, а  $B$  нет, и в клетку  $B$  записывает одно из чисел  $3x$  или  $x - 2$ , если в клетке  $A$  записано число  $x$ . Когда Сережа заполнил всю таблицу, он посчитал сумму всех чисел, записанных в таблице. Мог ли он получить ноль?

**Ответ:** не мог.

**Решение.** Заметим, что если число  $x$  нечетное, то и число  $3x$ , и число  $x - 2$  тоже нечетные, поэтому все записанные числа нечетные. После заполнения всей таблицы в ней записано 81 нечетное число. Но сумма нечетного числа нечетных чисел не может равняться четному числу. То есть Сережа не мог получить ноль.

109. На столе лежит правильный треугольник  $ABC$ , сделанный из жести. Его разрешается «катать» по столу,

переворачивая через любую сторону. Докажите, что если после нескольких таких операций треугольник вернулся на свое место, то и все его вершины тоже вернутся на свои места.

**Решение.** Нарисуем на плоскости точки, в которых могут оказаться вершины треугольника, получится треугольная решетка. Раскрасим узлы решетки так, как показано на рисунке 49 в цвета  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Заметим, что если вначале треугольник лежал так, как показано на рисунке, то его соответствующие вершины путешествуют по соответствующим цветам. Значит, если он вернулся на место, то его вершины заняли исходную позицию.

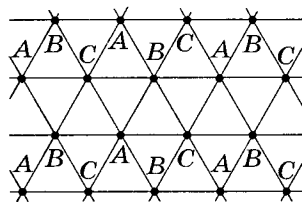


Рис. 49

110. По кругу висят 250 лампочек. Вначале все лампочки включены. Разрешается либо переключить (из включенного состояния в выключенное или наоборот) любые 4 последовательные лампочки, либо взять 5 последовательных лампочек и переключить все, кроме средней. Можно ли с помощью таких операций выключить все лампочки?

**Ответ:** нельзя.

**Решение.** Пусть лампочки будут двух цветов: красного и синего, и цвета лампочек будут чередоваться. Тогда у нас по 125 лампочек каждого цвета. Будем рассматривать только красные лампочки. Заметим, что любая операция переключения затрагивает ровно 2 красные лампочки. Будем считать количество включенных красных лампочек. Сначала их 125. Если операция затрагивает 2 включенные красные лампочки, то общее число включенных красных лампочек уменьшится на 2. Если операция затрагивает 2 выключенные красные лампочки, то общее число включенных красных лампочек увеличится на 2. Если операция затрагивает 1 включенную и 1 выключенную красные лампочки, то общее число включенных красных лампочек не изменится. Таким образом, мы получаем, что всегда будут включенными нечетное число красных лампочек. Значит, выключить даже все красные лампочки не удастся.

111. На доске написаны числа 1, 2 и 4. Разрешается стереть с доски два числа  $a$  и  $b$ , а вместо них записать



числа  $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$  и  $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ . Можно ли с помощью таких операций получить на доске числа  $\sqrt{2}$ ,  $2\sqrt{2}$  и 3?

**Ответ:** нельзя.

**Решение.** Заметим, что при данной операции не меняется сумма квадратов чисел, записанных на доске:

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2 + b^2.$$

Но у начальной тройки чисел (1, 2 и 4) сумма квадратов равна 21, а у той, которую мы хотим получить ( $\sqrt{2}$ ,  $2\sqrt{2}$  и 3), сумма квадратов равна 19. Поэтому указанную тройку получить нельзя.

### *Элементы комбинаторики*

112. Каких натуральных чисел от 1 до 1 000 000 больше: делящихся на 11, но не делящихся на 13 или делящихся на 13, но не делящихся на 11?

**Ответ:** чисел, делящихся на 11, но не делящихся на 13, среди чисел от 1 до 1 000 000 больше, чем чисел, делящихся на 13, но не делящихся на 11.

**Решение.** Действительно, пусть количества этих чисел равны  $A$  и  $B$  соответственно, а количество чисел от 1 до 1 000 000, кратных и 11, и 13, равно  $C$ . Тогда  $A + C$  — количество чисел, делящихся на 11, а  $B + C$  — количество чисел, делящихся на 13. Ясно, что  $A + C > B + C$ . Поэтому  $A > B$ .

113. Каких пятизначных чисел больше: тех, у которых цифры идут в строго возрастающем порядке, или тех, у которых цифры идут в строго убывающем порядке? (Например, в первую группу входит число 12 459, но не входят числа 12 495 и 12 259).

**Ответ:** больше тех, у которых цифры идут в убывающем порядке.

**Первое решение.** Запишем число первой группы в обратном порядке. Мы получим число второй группы, причем из разных чисел первой группы получаются разные числа второй группы. В то же время числа второй группы, оканчивающиеся на 0, например 98 760, не могли быть получены «переворотом» из чисел первой группы (число 06789 = 6789 — не пятизначное). Значит, во второй группе чисел больше.

**Второе решение.** Числа первой группы получаются из числа 123 456 789 вычеркиванием четырех цифр, т. е. их  $C_9^4 = 126$ , а числа второй группы — из числа

9 876 543 210 вычеркиванием пяти цифр, т. е. их  $C_{10}^5 = 252$ .

114. Электронные часы показывают время от 00.00.00 до 23.59.59. Сколько времени в течение суток на табло часов горит число, которое читается одинаково слева направо и справа налево?

**Ответ:** 96 секунд.

**Решение.** Если на табло горят цифры  $ab.cd.mn$ , то  $a = 0, 1, 2, 0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 5, 0 \leq d \leq 9, 0 \leq m \leq 5, 0 \leq n \leq 9$ . Поэтому если  $a = n, b = m, c = d$ , то симметричное число на табло однозначно определяется по цифрам  $a, b$  и  $c$ , где  $a = 0, 1, 2, 0 \leq b \leq 5, 0 \leq c \leq 5$ . При этом если  $a = 0$  или 1, то  $b$  и  $c$  — любые цифры от 0 до 5, количество таких наборов равно  $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ . Если же  $a = 2$ , то  $b = 0, 1, 2, 3, 0 \leq c \leq 5$  и количество таких наборов равно  $4 \cdot 6 = 24$ . Всего  $72 + 24 = 96$  наборов, каждый из которых горит одну секунду.

115. Каких треугольников с целочисленными сторонами больше: имеющих периметр 1997 или имеющих периметр 2000?

**Ответ:** таких треугольников равные количества.

**Решение.** Пусть натуральные числа  $k \geq n \geq m$  — длины сторон треугольника с периметром 1997. Тогда натуральные числа  $k + 1, n + 1, m + 1$  будут длинами сторон треугольника периметра 2000. Такой треугольник существует, так как из неравенства  $m + n > k$  следует неравенство  $(m + 1) + (n + 1) > (k + 1)$ . Значит, каждому треугольнику периметра 1997 соответствует треугольник периметра 2000. Поэтому утверждение задачи будет доказано, если мы докажем, что и каждому треугольнику периметра 2000 соответствует треугольник периметра 1997. Пусть натуральные числа  $K \geq N \geq M$  — длины сторон треугольника периметра 2000. Тогда, во-первых, все его стороны больше 1. Действительно, каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон, поэтому если какая-то сторона имеет длину 1, то две другие должны быть равны между собой и в этом случае периметр треугольника — нечетное число. Во-вторых,  $M + N > K$ , откуда  $(M - 1) + (N - 1) \geq (K - 1)$ . Но в случае равенства мы получаем, что сумма  $M + N + K$  нечетна, а она равна 2000. Значит, сумма двух меньших чисел среди чисел  $M - 1, N - 1$  и  $K - 1$  больше третьего, и эти числа являются длинами сторон некоторого треугольника.

**Диофантовы уравнения  
(уравнения в целых числах)**

116. Решите уравнение в натуральных числах:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2^9.$$

**Ответ:** нет решений.

**Решение.** Предположим, что существует решение этого уравнения. Из того, что правая часть уравнения четна, следует, что либо все числа  $a, b, c$  четны, либо два нечетны, а одно четно. Предположим, что числа  $a$  и  $b$  нечетны, а число  $c$  четно. Заметим, что  $(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$ . То есть квадрат нечетного числа дает остаток 1 при делении на 4. Но тогда левая часть исходного уравнения будет давать остаток 2 при делении на 4, а правая его часть будет делиться на 4. Противоречие. Значит, все числа  $a, b, c$  четны:  $a = 2a_1, b = 2b_1, c = 2c_1$ . И наше уравнение переписывается в виде  $(2a_1)^2 + (2b_1)^2 + (2c_1)^2 = 2^9$ . Откуда  $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 2^7$ . Рассуждая далее аналогично, мы получим, что должно существовать решение в натуральных числах уравнения  $a_4^2 + b_4^2 + c_4^2 = 2$ . Однако данное уравнение, очевидно, не имеет решений в натуральных числах, откуда следует, что и исходное уравнение не имеет решений в натуральных числах.

117. Решите в целых числах уравнение  $2ab + 3a + b = 0$ .

**Ответ:** (0; 0), (1; -1), (-1; -3), (-2; -2).

**Решение.** Умножив обе части уравнения на 2, преобразуем уравнение следующим образом:  $(2a+1)(2b+3) = 3$ . Число 3 раскладывается в произведение двух целых чисел четырьмя способами:  $3 = 1 \cdot 3 = 3 \cdot 1 = (-1) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-1)$ . В первом случае  $2a+1=1, 2b+3=3$ , т. е.  $a=0, b=0$ . Во втором случае  $2a+1=3, 2b+3=1$ , т. е.  $a=1, b=-1$ . В третьем случае  $2a+1=-1, 2b+3=-3$ , т. е.  $a=-1, b=-3$ . В четвертом случае  $2a+1=-3, 2b+3=-1$ , т. е.  $a=-2, b=-2$ .

118. Существуют ли такие натуральные числа  $x$  и  $y$ , что

$$x^2 - y^3 = 2003^{2004}?$$

**Ответ:** существуют.

**Решение.** Если  $a$  и  $b$  — натуральные числа, такие, что  $a^2 - b^3 = 1$ , то, очевидно, достаточно взять  $(x, y) = (2003^{\frac{2004}{2}} a, 2003^{\frac{2004}{3}} b)$ . Но такие  $a$  и  $b$  существуют:  $a=3, b=2$ . Таким образом, мы пришли к равенству

$$(2003^{\frac{2004}{2}} \cdot 3)^2 - (2003^{\frac{2004}{3}} \cdot 2)^3 = 2003^{2004}.$$

**Числа и вычисления****Делимость. Простые и составные числа.****Разложение числа на простые множители.****Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и их степеней. Взаимно простые числа.****Целые числа. Рациональные числа.****Иррациональные числа**

119. Натуральные числа  $p$ ,  $q$  и  $r$  таковы, что  $p + q$ ,  $q + r$  и  $r + p$  — простые. Докажите, что среди чисел  $p$ ,  $q$  и  $r$  есть равные.

**Решение.** Среди чисел  $p$ ,  $q$  и  $r$  найдутся два одинаковой четности — скажем,  $p$  и  $q$ , поэтому  $p + q$  четно. Но это простое число, поэтому  $p + q = 2$ , откуда  $p = q = 1$ .

120. Докажите, что в произведении  $P = 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 100!$  можно вычеркнуть один из сомножителей так, чтобы произведение оставшихся было полным квадратом.

**Решение.** Нужно вычеркнуть  $50!$ . Из равенства  $(2k)! = (2k - 1)! \cdot 2k$  следует, что данное произведение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & (1!)^2 \cdot 2 \cdot (3!)^2 \cdot 4 \cdot (5!)^2 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (99!)^2 \cdot 100 = \\ & = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \dots \cdot 99!)^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 100 = \\ & = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \dots \cdot 99!)^2 \cdot 2^{50} \cdot 50! = \\ & = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \dots \cdot 99! \cdot 2^{25})^2 \cdot 50!. \end{aligned}$$

121. Существует ли такое  $x$ , что значения выражений  $\operatorname{tg} x + \sqrt{3}$  и  $\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}$  — целые числа?

**Ответ:** не существует.

**Решение.** Пусть  $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = n$  и  $\operatorname{ctg} x + \sqrt{3} = m$ , где  $n$  и  $m$  — целые числа. Тогда  $\operatorname{tg} x = n - \sqrt{3}$ ,  $\operatorname{ctg} x = m - \sqrt{3}$ , следовательно,  $(n - \sqrt{3})(m - \sqrt{3}) = 1$ , откуда  $(n + m)\sqrt{3} = nm + 2$ . Число  $\sqrt{3}$  иррациональное, поэтому это равенство возможно только в случае  $n + m = nm + 2 = 0$ . Полученное равенство возможно только для иррациональных  $n$  и  $m$  ( $n = \pm\sqrt{2}$ ,  $m = \mp\sqrt{2}$ ).

**Замечание.** Если в условии задачи заменить  $\sqrt{3}$  на  $\sqrt{2}$ , то число  $x$ , удовлетворяющее условию задачи, существует.

122. Пусть  $A$  — множество таких натуральных чисел, которые записываются только с помощью цифр 1, 5 и 9, причем каждая цифра используется не менее одного раза. Может ли сумма 1001 различного числа из множества  $A$  быть полным квадратом?

**Ответ:** не может.

**Решение.** Заметим, что числа 1, 5, 9 имеют вид  $4k + 1$ . Тогда каждое число из  $A$  представимо в виде  $100a + (4b + 1)10 + (4c + 1) = 4m + 3$  (например,  $1959 = 19 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 9$ ). То есть каждое число из  $A$  имеет остаток 3 при делении на 4. Тогда и сумма 1001 числа из  $A$  также будет иметь остаток 3 при делении на 4, так как  $1001 = 4 \cdot 250 + 1$ . Однако квадраты четных чисел делятся на 4, а квадраты нечетных чисел имеют остаток 1 при делении на 4, так как  $(2t + 1)^2 = 4(t^2 + t) + 1$ . Поэтому сумма 1001 различного числа из  $A$  не может быть полным квадратом.

123. Существует ли такое число  $x$ , что все три числа  $x - \frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 1}$  и  $\frac{1}{x^2 + 1} - 2x$  являются целыми?

**Ответ:** не существует.

**Решение.** Предположим, что существует такое число  $x$ , что все три числа, данные в условии, целые. Тогда их сумма, равная  $-x$ , тоже целая. Поэтому (см. первое число из условия)  $\frac{1}{x}$  — целое число. Это возможно только при  $x = \pm 1$ . Но тогда  $\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}$  и второе и третье числа не могут быть целыми.

## Выражения и их преобразования

**Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители.**

*Теорема Безу*

124. Дан многочлен  $P(t) = t^2 - 4t$ . Докажите, что при всех  $x \geq 1$ ,  $y \geq 1$  выполняется неравенство  $P(x + y) \geq P(2xy)$ .

**Первое решение.**  $P(x^2 + y^2) - P(2xy) = (x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) - 4x^2y^2 + 8xy = (x^2 - y^2)^2 - 4(x - y)^2 = (x - y)^2((x + y)^2 - 4) \geq 0$ , так как  $x + y \geq 2$ .

**Второе решение.** Рассмотрим многочлен  $Q(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$ . Заметим, что  $Q(t)$  монотонно возрастает при  $t \geq 2$  и  $P(a) \geq P(b) \Leftrightarrow Q(a) \geq Q(b)$ . Теперь утверждение задачи следует из того, что  $x^2 + y^2 \geq 2xy \geq 2$  при  $x \geq 1, y \geq 1$ .

125. При каких  $n \geq 1$  существует многочлен  $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  с действительными коэффициентами, такой, что при всех  $x \in \mathbb{R}$   $P_n(x) > -3$  и  $P_n(-2) = P_n(0) = P_n(2) = 0$ ?

**Ответ:**  $n$  чётно,  $n \geq 6$ .

**Решение.** Из условия следует, что  $n > 2$ , так как линейная функция, принимающая в двух точках равные значения, — константа, а квадратичная функция не может принимать равные значения в трех точках. Число  $n$  чётно, так как при нечётных  $n$   $P_n(x) \rightarrow -\infty$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Далее, при чётных  $n$  ( $n \geq 6$ ) такой многочлен существует:  $P_n(x) = x^{n-4} \cdot (x+2)^2(x-2)^2$ . Этот многочлен неотрицателен при всех  $x$  и принимает нулевые значения при  $x = 0, \pm 2$ . Покажем, что при  $n = 4$  такого многочлена нет. Пусть такой многочлен  $P_4(x)$  существует. Тогда он делится нацело на  $x, x+2$  и  $x-2$ , значит, имеет вид  $P_4(x) = x(x+2) \times (x-2)(x-a)$ . Но тогда при  $a \leq 0$   $P_4(1) = -3(1-a) \leq -3$ , а при  $a > 0$   $P_4(-1) = -3(1+a) < -3$ .

## Арифметическая и геометрическая прогрессии

126. Найдите все непостоянные целочисленные арифметические прогрессии  $a_1, a_2, a_3$ , для которых

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3.$$

**Ответ:**  $a_1 = -n, a_2 = 0, a_3 = n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ .

**Решение.** Пусть  $d$  — разность прогрессии, тогда  $a_1 = a_2 - d, a_3 = a_2 + d$ , и, значит,  $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2, a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = 3a_2^3 + 6a_2d^2$ , т. е.  $3a_2 = 3a_2^3 + 6a_2d^2, 3a_2(a_2^2 + 2d^2 - 1) = 0$ . Отсюда либо  $a_2 = 0$  и  $a_1 = -n, a_3 = n$ , либо  $a_2^2 + 2d^2 = 1$ , но последнее возможно только при  $a_2 = \pm 1, d = 0$  ( $a_2$  и  $d$  — целые числа).

127. Возрастающая арифметическая прогрессия содержит два натуральных числа и квадрат меньшего из них. Докажите, что она содержит и квадрат второго числа.

**Решение.** Пусть числа  $a, b, a^2$  входят в прогрессию. Тогда  $b = a + nd, a^2 = a + md$ . Отсюда  $b - a = nd$ . Верно

равенство  $b^2 = a^2 + b^2 - a^2 = a^2 + (b - a)(b + a) = a + md + nd(b + a) = a + kd$ , т. е.  $b^2$  также входит в прогрессию.

128. Числа  $\frac{1}{a+b}$ ,  $\frac{1}{a+c}$  и  $\frac{1}{b+c}$  образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа  $a^2$ ,  $b^2$  и  $c^2$  также образуют арифметическую прогрессию.

**Решение.** По условию  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{2}{a+c}$ , т. е.  
 $\frac{a+c+2b}{(a+b)(b+c)} = \frac{2}{a+c}$ . Умножив обе части равенства на  $(a+b)(b+c)(a+c)$  и приведя подобные, получаем  $a^2 + c^2 = 2b^2$ , что и требовалось доказать.

### Корень натуральной степени и его свойства.

#### Свойства степени с рациональным показателем

129. Докажите неравенство

$$a^n + b^n > (a+b)^n,$$

где  $n$  — рациональное число,  $a, b$  — действительные числа, такие, что  $a \cdot b < 0$ ,  $a + b > 0$ ,  $n > 1$ .

**Решение.** Докажем вначале, что

$$(x+y)^n > x^n + y^n, \quad (1)$$

если  $x, y > 0$ ,  $n > 1$ . Для этого заметим, что  $\alpha + \beta = 1$ ,  $\alpha, \beta > 0$ ,  $n > 1$  следует

$$\alpha^n + \beta^n < 1. \quad (*)$$

Положив в этом равенстве  $(*)$   $\alpha = \frac{x}{x+y}$ ,  $\beta = \frac{y}{x+y}$  и

умножив обе части на  $(x+y)^n$ , получим (1). Докажем теперь неравенство задачи. Пусть для определенности  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Поскольку  $a^n + b^n \geq a^n - |b|^n$ , достаточно доказать, что  $a^n - |b|^n > (a - |b|)^n$ . Последнее неравенство следует из (1), если в нем положить  $x = |b|$ ,  $y = a - |b|$ .

## Тригонометрия

### Основные тригонометрические тождества.

**Формулы приведения. Преобразования тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций: ограниченность, периодичность**

130. Известно, что для некоторого  $x$  выполняются равенства

$$\cos 3x = a \sin 2x \quad \text{и} \quad \sin 3x = b \cos 4x,$$

где  $a$  и  $b$  — рациональные числа. Докажите, что  $\sin 3x$  — рациональное число.

**Решение.** Перемножив данные равенства, получаем

$$\frac{1}{2} \sin 6x = ab \sin 2x \cos 4x, \text{ т. е.}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (3 \sin 2x - 4 \sin^3 2x) &= \frac{1}{2} \sin 2x (3 - 4 \sin^2 2x) = \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x (1 + 2 \cos 4x) = ab \sin 2x \cos 4x. \end{aligned}$$

Теперь если  $\sin 2x = 0$ , то  $\cos 4x = 1 \Rightarrow \sin 3x = b$  — рациональное число.

Если же  $\sin 2x \neq 0$ , то  $\frac{1}{2} + \cos 4x = ab \cos 4x \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (ab - 1) \cos 4x = \frac{1}{2}$ . Данное равенство возможно только при  $ab - 1 \neq 0$  и тогда  $\cos 4x = \frac{1}{2(ab - 1)} \Rightarrow \sin 3x =$   
 $= \frac{b}{2(ab - 1)}$  — рациональное число.

131. Известно, что для некоторых  $x, y, z$  выполняется  $\sin y = z \sin x$  и  $\sin 2y = z^2 \sin 2x$ . Докажите, что  $\sin 4y = z^4 \sin 4x$ .

**Решение.** Если  $z = 0$ , то  $\sin y = 0$ ,  $y = \pi n$  и все равенства выполнены при любых  $x$ . Если  $\sin x = 0$ , то  $\sin y = 0$ ,  $\sin 2x = \sin 2y = \sin 4x = \sin 4y = 0$  и при любом  $z$  все равенства выполнены. Если  $z \neq 0$ ,  $\sin x \neq 0$ , то получаем  $\cos y = z \cos x$ , откуда  $1 = \sin^2 y + \cos^2 y = z^2 (\sin^2 x + \cos^2 x)$ , т. е.  $z^2 = 1 = z^4$ . Тогда  $\sin 2y = \sin 2x$ ,  $\sin y = \pm \sin x \Rightarrow \cos 2y = 1 - 2 \sin^2 y = \cos 2x \Rightarrow \sin 4y = \sin 4x = z^4 \sin 4x$ .

132. Решите неравенство

$$\sin x \leq \operatorname{tg} x \leq \operatorname{ctg} x \leq \cos x.$$

**Ответ:** решений нет.

**Решение.** Из условия следует, что  $-1 \leq \operatorname{tg} x \leq \operatorname{ctg} x \leq 1$ .  $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ , поэтому либо  $|\operatorname{tg} x|$ , либо  $|\operatorname{ctg} x|$  не меньше 1. Тогда если неравенство выполнено, то либо  $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x = 1$ , либо  $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x = -1$ . Но в обоих этих случаях  $|\sin x| = |\cos x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  и неравенство, данное в условии, не выполняется. Значит, у него нет решений.



## Уравнения и неравенства

**Уравнения с одной переменной. Квадратные уравнения. Теорема Виета. Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения, их системы. Тригонометрические уравнения. Неравенства с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Показательные и логарифмические неравенства. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Простейшие уравнения, неравенства и системы с параметрами. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних. Системы уравнений**

133. Дискриминант приведенного квадратного трехчлена  $P(x)$  положителен. Сколько корней может иметь уравнение

$$P(x) + P(x + \sqrt{D}) = 0?$$

**Ответ:** один.

**Первое решение.** Пусть  $P(x) = x^2 + px + q$  и  $D = p^2 - 4q$ . Тогда

$$P(x) + P(x + \sqrt{D}) = x^2 + px + q + (x + \sqrt{D})^2 + p(x + \sqrt{D}) + q = 2x^2 + 2(p + \sqrt{D})x + 2q + D + p\sqrt{D} = 0.$$

Посчитаем четверть дискриминанта получившегося квадратного уравнения. Она равна

$$(p + \sqrt{D})^2 - 2(2q + D + p\sqrt{D}) = p^2 - 4q - D = 0.$$

То есть уравнение имеет ровно один корень.

**Второе решение.** Если  $x_1 < x_2$  — корни квадратного трехчлена, то  $x_2 - x_1 = \sqrt{D}$ , откуда следует, что график  $y = P(x + \sqrt{D})$  получается из графика  $y = P(x)$  сдвигом влево вдоль оси  $Ox$  на расстояние  $\sqrt{D}$ , равное расстоянию между точками пересечения графика  $y = P(x)$  с осью  $Ox$ . Это означает, что графики  $y = P(x)$  и  $y = P(x + \sqrt{D})$  пересекают ось  $Ox$  в общей точке с абсциссой  $x = x_1$  и симметричны относительно прямой  $x = x_1$ . Поэтому график  $y = P(x) + P(x + \sqrt{D})$  пересекает ось  $Ox$  в точке с абсциссой  $x = x_1$  и симметричен относительно прямой  $x = x_1$ . Значит, квадратный трехчлен  $P(x) + P(x + \sqrt{D})$ , во-первых, имеет корень  $x = x_1$ , во-вторых, не может иметь других корней, так как все его корни должны быть симметричны относительно точки  $x = x_1$  и наличие других корней означало бы, что их не меньше трех.

134. Про квадратные трехчлены  $f_1$  и  $f_2$  известно, что они имеют корни, а  $(f_1 - f_2)$  корней не имеет. Докажите, что  $f_1 + f_2$  имеет корни.

**Первое решение.** Предположим противное:  $f_+ = f_1 + f_2$  и  $f_- = f_1 - f_2$  оба не имеют корней. Есть два варианта — они одного знака или они разных знаков (если у многочлена нет корней, то он принимает значения одного знака). В первом случае их сумма также постоянного знака, но  $f_+ + f_- = 2f_1$  имеет корни — противоречие. Во втором случае их разность должна иметь постоянный знак, но  $f_+ - f_- = 2f_2$  тоже имеет корни — противоречие.

**Второе решение.** Пусть  $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ ,  $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ . По условию  $D_1 = b_1^2 - 4a_1c_1 \geq 0$ ,  $D_2 = b_2^2 - 4a_2c_2 \geq 0$  и  $D_- = (b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2) < 0$ . Из последнего неравенства следует, что  $2b_1b_2 > b_1^2 + b_2^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)$ , поэтому  $D_+ = (b_1 + b_2)^2 - 4(a_1 + a_2)(c_1 + c_2) > 2b_1^2 + 2b_2^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2) - 4(a_1 + a_2)(c_1 + c_2) = 2(b_1^2 - 4a_1c_1) + 2(b_2^2 - 4a_2c_2) \geq 0$ .

135. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} \operatorname{tg} z, \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} \operatorname{ctg} z. \end{cases}$$

**Ответ:**  $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n_1; \frac{\pi}{4} + 2\pi m_1; \frac{\pi}{4} + \pi k_1\right)$ ,  $n_1, m_1, k_1 \in \mathbb{Z}$  и  $\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n_2; \frac{5\pi}{4} + 2\pi m_2; \frac{3\pi}{4} + \pi k_2\right)$ ,  $n_2, m_2, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

**Решение.** Очевидно, что  $\operatorname{tg} z \neq 0$ , так как в противном случае  $\operatorname{ctg} z$  не определен.

Пусть  $\operatorname{tg} z = a > 0$ . Сложив оба уравнения системы, мы получим  $\sin x + \sin y + \cos x + \cos y = \sqrt{2} \operatorname{tg} z + \sqrt{2} \operatorname{ctg} z$ . Заметим, что  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$ . Аналогично  $\sin y + \cos y \leq \sqrt{2}$ . Причем равенства достигаются только при  $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$  и  $y = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$ . То есть левая часть не больше  $2\sqrt{2}$ . Рассмотрим теперь правую часть. Она равна  $\left(a + \frac{1}{a}\right)\sqrt{2} \geq 2\sqrt{2}$ , причем равенство достигается при  $\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg} z = 1$ , т. е. при  $z = \frac{\pi}{4} + \pi k$ . Таким образом,  $(\sin x + \cos x) + (\sin y + \cos y) \leq 2\sqrt{2} \leq \sqrt{2}(\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z)$ . Уравнение имеет решения, только когда оба неравенства обращаются в равенства. Очевидно, что найденные  $x, y$  и  $z$  являются решением системы.

Пусть теперь  $\operatorname{tg} z < 0$ . Аналогичным образом находим решения:  $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$ ,  $y = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m$ ,  $z = \frac{3\pi}{4} + \pi k$ .

136. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0. \end{cases}$$

**Ответ:** система несовместна.

**Решение.** Перемножив равенства  $z = -x - y$  и  $\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ , получаем  $1 = \frac{(x+y)^2}{xy} \Rightarrow x^2 + xy + y^2 = 0$ .

Здесь  $D = -3y^2 \leq 0$ , поэтому уравнение может иметь решение только при  $y = 0$ , но из второго уравнения системы  $y \neq 0$ .

137. Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  — действительные числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} a + b + c = 2, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2. \end{cases}$$

Докажите, что среди этих чисел найдутся два, отличающиеся не менее чем на 1.

**Решение.** Заметим, что  $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a+b+c)^2 = 3 \cdot 2 - 2^2 = 2$ . Сделаем замену  $x = a - b$ ,  $y = b - c$ ,  $z = c - a$ . Имеем

$$x + y + z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2.$$

Тогда среди чисел  $x$ ,  $y$ ,  $z$  найдутся либо 2 неотрицательных числа, либо 2 неположительных. Пусть это числа  $y$  и  $z$ . Тогда  $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y+z)^2 - 2yz = 2x^2 - 2yz = 2$ ,  $x^2 = 1 + yz \geq 1$ ,  $(a-b)^2 \geq 1$ ,  $|a-b| \geq 1$ .

138. Пусть  $ax^2 + 2bx + c$ ,  $cx^2 + 2ax + b$ ,  $bx^2 + 2cx + a$  — квадратные трехчлены с положительными коэффициентами, причем любые два из них имеют общий корень. Докажите, что  $a = b = c$ .

**Первое решение.** Из условия следует, что каждый из этих трехчленов имеет хотя бы один корень, поэтому дискриминанты этих трехчленов неотрицательны, т. е.  $b^2 \geq ac$ ;  $a^2 \geq bc$ ;  $c^2 \geq ab$ . Заметим, что если хотя бы одно из этих неравенств строгое, то при их перемножении получим неверное неравенство  $b^2 \cdot a^2 \cdot c^2 > ac \cdot bc \cdot ab$ , поэтому  $b^2 = ac$ ;  $a^2 = bc$ ;  $c^2 = ab$ . Разделив первое равенство на второе, получим  $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a}{b}$ , т. е.  $a = b$ . Аналогично можно показать, что  $b = c$ , а значит,  $a = b = c$ .

**Второе решение.** Предположим, что в совокупности эти три квадратных трехчлена имеют три различных корня  $x_1 < x_2 < x_3$ . Тогда в точке  $x_2$  сумма этих трехчленов принимает отрицательное значение, так как в этой точке два из них обращаются в нуль, а один из них отрицателен (его корнями являются числа  $x_1$  и  $x_3$ ). Но сумма этих трехчленов равна  $(a + b + c)(x + 1)^2$  и принимает только неотрицательные значения. Получили противоречие.

Если же в совокупности корней меньше трех (два или один), то все три трехчлена имеют общий корень, который равен  $-1$ , так как сумма этих трехчленов равна  $(a + b + c)(x + 1)^2$ . Поэтому  $2b = a + c$ ,  $2a = b + c$ ,  $2c = a + b$ . Вычитая из первого равенства второе, получаем, что  $2(b - a) = a - b$ , т. е.  $a = b$ . Аналогично можно показать, что  $b = c$ , а значит,  $a = b = c$ .

## **Функции**

**Числовые функции и их свойства: периодичность, четность и нечетность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, промежутки знакопостоянства, ограниченность. Понятие об обратной функции. Свойства графиков взаимно обратных функций. Тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс. Свойства и графики тригонометрических функций. Показательная функция, ее свойства и график. Логарифмическая функция, ее свойства и график. Степенная функция, ее свойства и график. Производная, ее геометрический и механический смысл. Применение производной к исследованию функций, нахождению их наибольших и наименьших значений и построению графиков. Построение и преобразование графиков функций. Касательная и ее свойства**

139. Дан график функции  $y = ax^4 - x^2 + bx + c$  (рис. 50). Найдите знаки чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

**Ответ:**  $a > 0$ ,  $b < 0$ ,  $c > 0$ .

**Решение.** При  $x \rightarrow +\infty$   $y \rightarrow +\infty$ , значит,  $a > 0$ . График пересекает ось  $Oy$  в точке с положительной ординатой, значит,  $c = y(0) > 0$ . В этой же точке функция убывает, значит,  $y'(0) < 0$ . Но  $y' = 4ax^3 - 2x + b$ , т. е.  $y'(0) = b < 0$ .

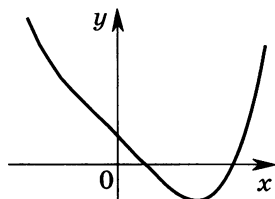


Рис. 50

140. На рисунке 51 изображены графики трех квадратных трехчленов. Могут ли это быть трехчлены  $ax^2 + bx + c$ ,  $cx^2 + ax + b$ ,  $bx^2 + cx + a$ ?

**Ответ:** не могут.

**Решение.** Предположим противное. Из рисунка 52 видно, что все трехчлены имеют по два корня, следовательно,  $a^2 > 4bc$ ,  $b^2 > 4ca$  и  $c^2 > 4ab$ , причем  $a > 0$ ,  $b > 0$  и  $c > 0$  (так как ветви парабол направлены вверх). Перемножая полученные неравенства, приходим к противоречию:  $a^2b^2c^2 > 64a^2b^2c^2$ .

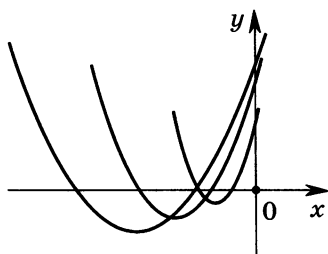


Рис. 51

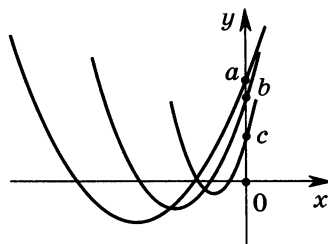


Рис. 52

141. На листе нарисованы координатные оси и ветви гиперболы  $y = \frac{k}{x}$  ( $k$  неизвестно, масштаб

по координатным осям также не указан). На одной из ветвей отмечена точка. С помощью циркуля и линейки постройте касательную к гиперболе в отмеченной точке.

**Решение.** Пусть  $A$  и  $B$  — проекции отмеченной точки  $K$  на координатные оси (рис. 53). Покажем, что касательная  $l$  к гиперболе параллельна  $AB$ .

Действительно, пусть  $K\left(x_0, \frac{k}{x_0}\right)$ ,  $A(x_0, 0)$ ,  $B\left(0, \frac{k}{x_0}\right)$  —

координаты этих точек, тогда  $\operatorname{tg} \angle BAO = \frac{k}{x_0^2}$ . С другой

стороны,  $\operatorname{tg} \angle KCO = -f'(x_0) = -\left(-\frac{k}{x_0^2}\right) = \frac{k}{x_0^2} = \operatorname{tg} \angle BAO$ .

Значит,  $l \parallel AB$ , и построение очевидно.

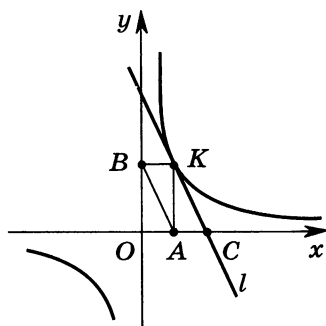


Рис. 53

142. Функция  $f(x)$ , определенная при всех действительных  $x$ , удовлетворяет следующему условию: уравнение  $f(x) = px + q$  имеет решение то-

гда, и только тогда, когда имеет решение уравнение  $x^2 = px + q$ . Докажите, что  $f(x) = x^2$ .

**Решение.** Разрешимость уравнения  $f(x) = px + q$  означает, что прямая  $y = px + q$  пересекается с графиком функции  $y = f(x)$ .

Предположим, что для некоторого  $x_0$   $f(x_0) < x_0^2$ . Тогда точка  $(x_0; f(x_0))$  лежит ниже графика параболы  $y = x^2$ , и поэтому через точку  $(x_0; f(x_0))$  можно провести прямую, не пересекающуюся с ней. Поэтому уравнение  $f(x) = px + q$  имеет корень  $x_0$ , а уравнение  $x^2 = px + q$  корней не имеет.

Следовательно,  $f(x) \geq x^2$  для всех  $x$ . Покажем, что неравенство  $f(x_0) > x_0^2$  тоже невозможно. Проведем касательную  $y = px + q$  к параболе в точке  $(x_0, x_0^2)$  (ее уравнение  $y = 2x_0x - x_0^2$ ). Тогда уравнение  $x^2 = px + q$  имеет единственный корень  $x_0$ . С другой стороны, при всех  $x \neq x_0$  имеем  $x^2 > px + q$ .

Следовательно,  $f(x) \geq x^2 > px + q$  при  $x \neq x_0$  и  $f(x_0) > x_0^2 = px_0 + q$ , т. е.  $f(x) > px + q$  для всех  $x$  и уравнение  $f(x) = px + q$  решений не имеет. Получили противоречие. Итак,  $f(x) = x^2$ .

## Планиметрия

**Признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников. Неравенство треугольника. Площадь треугольника. Многоугольники. Правильные многоугольники**

143. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$  и  $DAB$ , равны. Докажите, что  $AC = BD$ .

**Решение.** Пусть  $r$  — радиусы указанных в условии окружностей. Тогда (рис. 54)  $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{CDA} = \frac{1}{2} r \cdot (AB + BC + CA) + \frac{1}{2} r \cdot (CD + DA + AC) = \frac{1}{2} r \cdot P + r \cdot AC$ , где  $S_{ABCD}$  и  $P$  — площадь и периметр четырехугольника  $ABCD$ . Аналогично  $S_{ABCD} = S_{BCD} + S_{DAB} = \frac{1}{2} r \cdot P + r \cdot BD$ , откуда следует  $AC = BD$ .

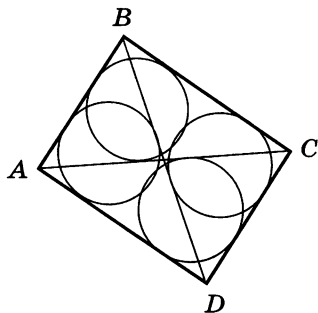


Рис. 54

144. Пусть  $P$  — периметр,  $R$  — радиус описанной окружности,  $h_1, h_2, h_3$  — длины высот произвольного треугольника. Докажите, что
- $$P > \sqrt{2R}(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{h_3}).$$

**Решение.** Из формул  $S = \frac{1}{2}ah_1 = \frac{abc}{4R}$  следует, что  $bc = 2Rh_1$ , откуда  $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc} = \sqrt{2R} \cdot \sqrt{h_1}$ . Аналогично  $\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{2R} \cdot \sqrt{h_2}$ ,  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{2R} \cdot \sqrt{h_3}$ . Сложив эти неравенства, получаем утверждение задачи.

**Окружность. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.**

*Угол между касательной и хордой.*

*Пропорциональные отрезки в окружности.*

*Преобразование плоскости: параллельный перенос, симметрия, поворот, гомотетия.*

*(Данная тема предлагается только для третьего этапа.)*

145. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BK$  и на сторонах  $BA$  и  $BC$  взяты соответственно точки  $M$  и  $N$  так, что  $\angle AKM = \angle CKN = \frac{1}{2} \angle ABC$ . Докажите, что прямая  $AC$  касается окружности, описанной около треугольника  $MBN$ .

**Решение.** Пусть  $\angle ABC = 2\alpha$ , тогда  $\angle MKN = \pi - \angle AKM - \angle CKN = \pi - 2\alpha$ , т. е.  $\angle MBN + \angle MKN = \pi$  (рис. 55). Значит, четырехугольник  $MBNK$  вписанный, т. е. окружность, описанная около треугольника  $MBN$ , проходит также через точку  $K$ . Проведем через

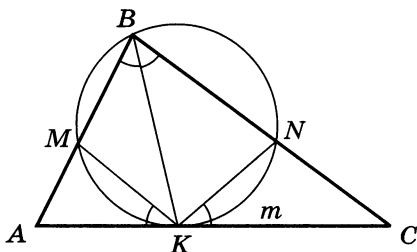


Рис. 55

точку  $K$  касательную  $l$  к этой окружности, тогда угол между  $l$  и хордой  $KN$  измеряется половиной дуги  $KmN$ , т. е. равен углу  $KBN$ . Но  $\angle CKN = \angle KBN$ . Значит,  $l$  совпадает с  $KC$ , т. е.  $KC$  — касательная.

146. Три точки пересечения высот, медиан и биссектрис остроугольного треугольника  $ABC$  лежат на окружности с хордой  $AC$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  правильный.

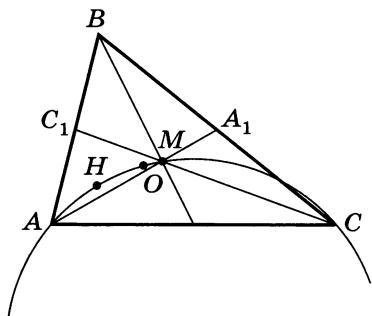


Рис. 56

**Решение.** Пусть  $H, O, M$  — соответственно точки пересечения высот, биссектрис и медиан  $\triangle ABC$  (рис. 56) и  $\angle ABC = \alpha$ . Тогда  $\angle AHC = \pi - \alpha$  (углы с перпендикулярными сторонами) и  $\angle AOC = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$  ( $\angle AOC = \pi - \angle OAC - \angle OCA =$

$= \pi - \frac{1}{2} \angle BAC - \frac{1}{2} \angle BCA = \pi - \frac{1}{2} (\pi - \alpha)$ ), значит,  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ,

так как  $\pi - \alpha = \angle AHC = \angle AOC = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$  (вписанные, опирающиеся на одну дугу  $AC$ ). Отсюда  $\angle AMC = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ , т. е.  $\angle A_1MC_1 + \angle A_1BC_1 = \pi$ , и, значит,

$A_1MC_1B$  — вписанный четырехугольник. Тогда по теореме о секущих  $CC_1 \cdot CM = CB \cdot CA_1$ , т. е.  $m \cdot \frac{2}{3} m = a \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow CC_1 = CB \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Опустим из точки  $C$

перпендикуляр  $CC_2$  на  $AB$ . Тогда  $CC_2 = CB \frac{\sqrt{3}}{2}$  ( $\angle CBC_2 = \frac{\pi}{3}$ ), т. е.  $CC_2 = CC_1$ . Но  $CC_1$  — наклонная  $\Rightarrow CC_1 > CC_2$ , если  $C_1 \neq C_2$ . Значит, медиана  $CC_2$  является и высотой  $\Rightarrow BC = AC \Rightarrow \triangle ABC$  равносторонний ( $\angle B = \frac{\pi}{3}$ ).

147. В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $BM$ . Может ли радиус окружности, вписанной в треугольник  $BCM$ , быть в два раза меньше радиуса окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ ?

**Ответ:** не может.



**Первое решение.** Пусть  $\omega_1$  и  $\omega$  — данные окружности (рис. 57),  $r_1$  и  $r$  — их радиусы,  $r = 2r_1$ . Тогда из формулы  $S = rp$  и равенства  $S_{BMC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$  следует, что периметры треугольников  $ABC$  и  $BMC$  должны быть равны. Но  $P_{ABC} = AB + BC + CM + MA = (AB + AM) + BC + CM > BM + BC + CM = P_{BMC}$ .

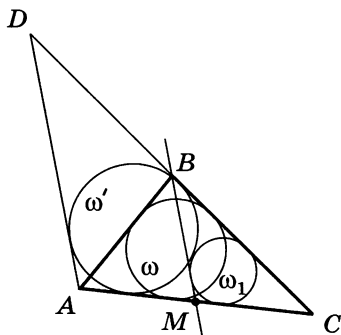


Рис. 57

**Второе решение.** Построим треугольник  $ADC$ , в котором  $BM$  — средняя линия (см. рис. 57). Он подобен  $\triangle BMC$  с коэффициентом 2, т. е. радиус  $r'$  вписанной в него окружности  $\omega'$  равен  $2r_1$ , но  $r' > r$  (окружности  $\omega$  и  $\omega'$  вписаны в один угол  $C$ , но  $\omega'$  касается более удаленной от вершины угла  $C$ , чем  $AB$ , прямой  $AD$ ).

## Вектор. Свойства векторов

148. Из центра клетки, отмеченной на рисунке 58, проведены векторы в центры всех клеток таблицы  $5 \times 8$ , кроме двух. Сторона клетки равна 1. Какую наименьшую длину может иметь сумма всех проведенных векторов?

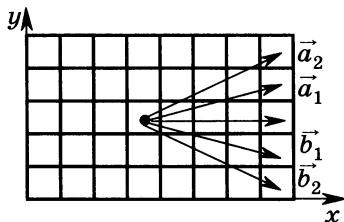


Рис. 58

**Ответ:** 12.

**Решение.** Вначале проведем векторы в центры всех клеток таблицы. Тогда все векторы, кроме пяти, изображенных на рисунке 58, разбиваются на пары с нулевой суммой. Значит, сумма  $S$  всех векторов равна  $(20; 0)$ , а искомая сумма  $\vec{S}_1$  равна  $(20 - x_1 - x_2; -y_1 - y_2)$ , где  $\vec{a} = (x_1, y_1)$  и  $\vec{b} = (x_2, y_2)$  — векторы, не вошедшие в сумму. Тогда  $|\vec{S}_1| = \sqrt{(20 - x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$  минимальна, если число  $x_1 + x_2$  максимально, а число  $|y_1 + y_2|$  минимально. Это выполняется для двух пар векторов:  $\vec{a}_1$  и  $\vec{b}_1$ ,  $\vec{a}_2$  и  $\vec{b}_2$ , для которых  $x_1 + x_2 = 8$ ,  $y_1 + y_2 = 0$ .

## Стереометрия

**Взаимное расположение прямых в пространстве. Свойства параллельности и перпендикулярности прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах**

149. В пространстве выбраны 9 точек так, что они лежат на четырех прямых, параллельных прямой  $a$ , а также на трех прямых, параллельных прямой  $b$ ,  $b \nparallel a$ . Докажите, что эти 9 точек лежат в одной плоскости.

**Решение.** Данные 9 точек лежат на четырех прямых, параллельных  $a$ , значит, на одной из них — прямой  $c$ , по крайней мере 3 точки. Но никакие 2 из этих 3 точек не могут оказаться на одной прямой, параллельной  $b$ , так как  $b \nparallel a$ . Значит, все три прямые, параллельные  $b$ , пересекают  $c$ . Это означает, что они лежат в одной плоскости.

**Взаимное расположение двух плоскостей. Свойства параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла**

150. Все боковые грани четырехугольной пирамиды — прямоугольные треугольники с вершиной прямого угла на основании пирамиды. Может ли основание высоты пирамиды быть внутренней точкой ее основания?

**Ответ:** не может.

**Решение.** Пусть  $SABCD$  — данная пирамида (рис. 59). Предположим, что вершины прямых углов боковых

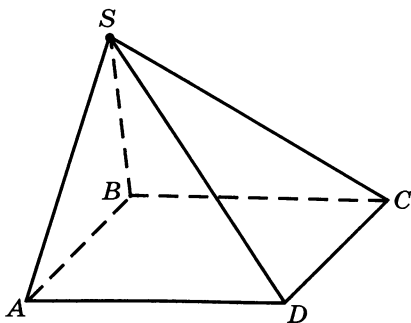


Рис. 59

граней пирамиды являются четырьмя различными точками. Без ограничения общности можно считать, что  $\angle SAB = \angle SBC = \angle SCD = \angle SDA = \frac{\pi}{2}$ . Тогда  $SB > SA$ ,  $SC > SB$ ,  $SD > SC$  и  $SA > SD$ . Отсюда  $SA > SA$  — противоречие. Значит, хотя бы одна из вершин основания пирамиды является вершиной прямого угла для двух боковых граней. Пусть, например, это вершина  $A$ , тогда ребро  $SA$  перпендикулярно двум пересекающимся прямым  $AB$  и  $AD$  основания пирамиды, следовательно,  $SA$  — высота пирамиды.

151. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб. Основание высоты пирамиды — точка пересечения диагоналей ромба. Докажите, что для любой точки на основании пирамиды сумма расстояний до двух противоположащих боковых граней равна сумме расстояний до двух других боковых граней.

**Решение.** Пусть  $SABCD$  — данная пирамида,  $SO$  — ее высота (рис. 60). Точка  $O$  — точка пересечения диагоналей ромба — равноудалена от его сторон, поэтому из теоремы о трех перпендикулярах двугранные углы с ребрами  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  равны между собой. Пусть они равны  $\alpha$ . Тогда для любой точки  $P$  на основании пирамиды  $PP_1 = PQ_1 \sin \alpha$ , где  $PP_1$  — расстояние от точки  $P$  до грани  $SAB$ ,  $PQ_1$  — расстояние от точки  $P$  до ребра  $AB$ . Аналогично  $PP_2$ ,  $PP_3$ ,  $PP_4$  — расстояния до остальных трех боковых граней,  $PQ_2$ ,  $PQ_3$ ,  $PQ_4$  — расстояния до ребер  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  соответственно. Утверждение задачи следует из того, что для ромба  $PQ_1 + PQ_3 = PQ_2 + PQ_4 = 2r$ , где  $r$  — радиус окружности, вписанной в ромб.

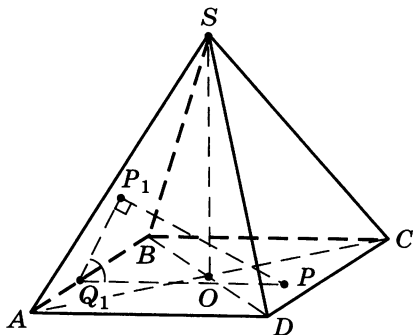


Рис. 60

**Замечание.** Указанную четырехугольную пирамиду можно рассматривать как пересечение двух треугольных призм, ортогональные сечения которых — равные равнобедренные треугольники. Утверждение задачи тогда сразу следует из того, что для любой точки на основании равнобедренного треугольника сумма расстояний до боковых сторон одинакова.

152. В треугольной пирамиде боковые грани, имеющие площади 5, 5, 8, наклонены под равными углами к основанию. Площадь основания 9. Найдите объем пирамиды.

**Ответ:** 6.

**Решение.** Пусть угол между боковыми гранями и основанием  $\alpha$ . Спроектируем боковые грани на основание и запишем равенство площадей:  $9 = (5 + 8 + 5) \cos \alpha$  (из условия следует, что вершина  $S$  проектируется внутрь  $\triangle ABC$ , рис. 61). Отсюда  $\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$ . Пусть

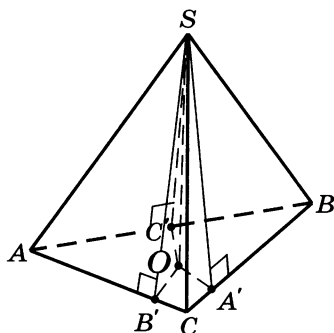


Рис. 61

$SA', SB', SC'$  — высоты боковых граней,  $SO$  — высота пирамиды. Тогда  $SO = SA' \sin \alpha = SB' \sin \alpha = SC' \sin \alpha \Rightarrow SA' = SB' = SC' = h$ . Далее,  $\frac{1}{2} SA' \cdot BC = 5 \Rightarrow BC = \frac{10}{h}$ . Аналогично  $AC = \frac{10}{h}$ ,  $AB = \frac{16}{h}$ . Высота равнобедренного  $\triangle ABC$  рав-

на  $\sqrt{\left(\frac{10}{h}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{h}\right)^2} = \frac{6}{h}$ ; поэтому  $S_{ABC} = \frac{48}{h^2}$ .

Итак,  $\frac{48}{h^2} = 9$ ,  $h = \frac{4}{\sqrt{3}}$ ,  $SO = h \sin \alpha = h \sin 60^\circ = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$ ,  $V = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABC} = 6$ .

153. Докажите, что если  $\alpha, \beta, \gamma$  — плоские углы трехгранного угла (углы между его ребрами), то

$$\sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\beta}{2} > \sin \frac{\alpha}{2}.$$

**Решение.** Отложим от вершины  $S$  трехгранного угла на ребрах отрезки  $SA = SB = SC = 1$  (рис. 62). Пусть  $A_1, B_1, C_1$  — соответственно середины отрезков  $BC, CA$  и  $AB$ . Тогда из равнобедренного треугольника  $BSC$

$$BA_1 = BS \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \angle BSC\right) = \sin \frac{\alpha}{2},$$

т. е.  $BC = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ . Аналогично

$$CA = 2 \sin \frac{\beta}{2}, \quad AB = 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Но по неравенству треугольника  $BC < CA + AB$ , т. е.  $2 \sin \frac{\alpha}{2} < 2 \sin \frac{\beta}{2} + 2 \sin \frac{\gamma}{2}$ . Утверждение доказано.

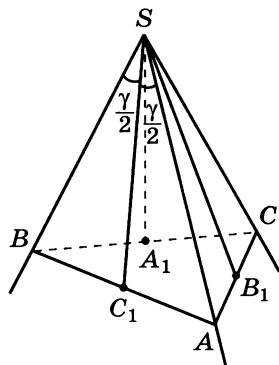


Рис. 62

### Параллелепипед. Пирамида. Призма

154. Площадь проекции грани  $ABB_1A_1$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  на плоскость, перпендикулярную диагонали  $AC_1$ , равна  $S$ . Чему равна площадь проекции параллелепипеда на эту плоскость?

**Ответ:**  $3S$ .

**Решение.** Покажем, что проекцией параллелепипеда будет центрально-симметричный шестиугольник  $A'_1 B'_1 B' C' D' D'_1$  с центром симметрии  $A' (C'_1)$  (рис. 63). Действительно, параллельный перенос на вектор  $\overrightarrow{AC_1}$  переводит грань  $ABCD$  в центрально-симметричный параллелограмм  $A_1 B_1 C_1 D_1$ , поэтому проекции этих граней — центрально-симметричные параллелограммы  $A'B'C'D'$  и  $A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$ . То же верно и для других пар параллельных граней параллелепипеда, значит,  $A'$  — центр симметрии. Равновеликость всех получившихся на рисунке 63 треугольников следует из их равенства.

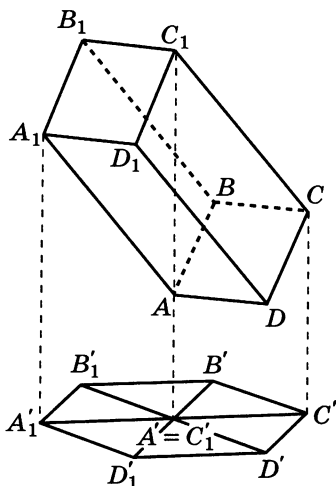


Рис. 63

155. Площадь проекции некоторого параллелепипеда  $P$  на плоскость одной из его граней равна площади этой грани, площадь проекции  $P$  на плоскость другой грани в полтора раза больше площади этой грани, наконец, площадь проекции  $P$  на плоскость третьей грани в два раза больше площади этой грани. Найдите углы в этих гранях параллелепипеда  $P$ .

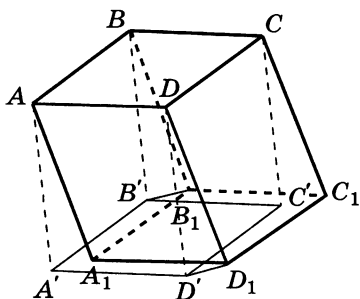


Рис. 64

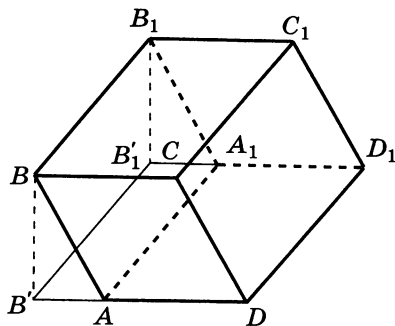


Рис. 65

**Ответ:** I —  $45^\circ$  и  $135^\circ$ , II и III — все углы по  $90^\circ$ .

**Решение.** Пусть  $A_1B_1C_1D_1$  — первая грань данного параллелепипеда  $A_1B_1C_1D_1ABCD$ ,  $A'B'C'D'$  — проекция грани  $ABCD$  на плоскость  $A_1B_1C_1$  (рис. 64). Тогда из условия следует, что параллелограммы  $A'B'C'D'$  и  $A_1B_1C_1D_1$  совпадают, значит, ребра  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  перпендикулярны плоскости  $A_1B_1C_1$  и, следовательно, четыре другие грани — прямоугольники. Тогда площадь проекции  $P$  на плоскость  $A_1ADD_1$  есть сумма площадей этой грани и проекции грани  $A_1ABB_1$  (рис. 65), т. е.  $S_2 = AD \cdot AA_1 + AB \cos \varphi \cdot AA_1$ , где  $\varphi$  — угол между плоскостями граней  $A_1ABB_1$  и  $A_1ADD_1$ . Отсюда  $AD + AB \cos \varphi = 1,5AD$ . Аналогично  $AB + AD \cos \varphi = 2AB$ , т. е.  $AB \cos \varphi = \frac{1}{2} AD$ ,  $AD \cos \varphi = AB$ , откуда  $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}$ ,  $\cos \varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\varphi = 45^\circ$  или  $\varphi = 135^\circ$ , так как  $\varphi$  — это угол  $D$  в грани  $ABCD$ .

### Декартовы координаты в пространстве.

#### Расстояние между точками. Вектор в пространстве

156. В основании правильной пирамиды лежит многоугольник с нечетным числом сторон. Можно ли расставить стрелки на ребрах этой пирамиды (по одной на каж-

дом ребре) так, чтобы сумма полученных векторов оказалась равной  $\vec{0}$ ?

**Ответ:** нельзя.

**Решение.** Пусть стрелки как-то расставлены. Спроектируем все получившиеся векторы на прямую, содержащую высоту  $SO$  пирамиды. Проекции векторов, лежащих в основании, равны  $\vec{0}$ , а проекции векторов, лежащих на боковых ребрах, равны  $\vec{SO}$  или  $-\vec{SO}$ . Из нечетности числа векторов, лежащих на боковых ребрах, следует, что сумма их проекций не может равняться  $\vec{0}$ , поэтому не может равняться  $\vec{0}$  и сумма всех полученных векторов.

157. На каждом из ребер куба с ребром длины 1 и на одной из главных диагоналей (длины  $\sqrt{3}$ ) выбраны направления. Какую наименьшую длину может иметь сумма полученных 13 векторов?

**Ответ:**  $\sqrt{3}$ .

**Решение.** Выберем базис из трех векторов, идущих по ребрам куба так, чтобы вектор диагонали равнялся  $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ . Тогда четыре вектора будут равны  $\pm\vec{e}_1$ , еще четыре —  $\pm\vec{e}_2$ , еще четыре —  $\pm\vec{e}_3$ . Таким образом, сумма  $\vec{S}$  векторов имеет вид  $k\vec{e}_1 + m\vec{e}_2 + n\vec{e}_3$ , где  $k, m, n$  — целые нечетные числа, а  $|\vec{S}| = \sqrt{k^2 + m^2 + n^2} \geq \sqrt{3}$ , так как  $k^2 \geq 1, m^2 \geq 1, n^2 \geq 1$ .

Очевидно, что, разбив пары параллельных ребер куба на противоположно направленные векторы, мы получим, что  $k = m = n = 1$  и  $|\vec{S}| = \sqrt{3}$ .

## Специальные олимпиадные темы

### «Оценка + пример»

158. Какое наименьшее число попарно непересекающихся кругов, не содержащих данную точку  $O$ , можно расположить на плоскости так, чтобы любой луч, выходящий из  $O$ , пересекал не менее трех из них?

**Ответ:** семь кругов.

**Решение.** Разобьем полный угол с вершиной в данной точке на 7 равных углов (далее они называются секторами). Рассмотрим угол, составленный из трех сосед-

них секторов, и впишем в него круг. Рассмотрим далее угол, составленный из трех следующих секторов, и тоже впишем в него круг. Прделаем это построение 7 раз, следя за тем, чтобы каждый следующий круг не пересекался с предыдущими (для этого, например, его можно выбирать значительно бóльших размеров, чем предыдущие). Так как каждый сектор входит в три из семи построенных углов, лучи, входящие в него, пересекают три соответствующих круга.

Докажем, что шестью кругами обойтись нельзя. Пусть имеется 6 кругов, не содержащих данную точку  $O$ . Рассмотрим окружность с центром в  $O$ , не пересекающую этих кругов. Для каждого круга рассмотрим на окружности дугу, высеченную касательными к нему, проведенными из точки  $O$ . Заметим, что луч с началом в точке  $O$  пересекает круг тогда и только тогда, когда точка пересечения этого луча с построенной окружностью принадлежит соответствующей дуге. Значит, луч пересекает три круга тогда и только тогда, когда точка его пересечения с окружностью принадлежит сразу трем дугам. Но каждая дуга меньше  $180^\circ$ . В сумме они дают меньше  $6 \cdot 180^\circ = 1080^\circ = 3 \cdot 360^\circ$  и, значит, не могут покрыть окружность в три слоя. Поэтому найдется точка на окружности, принадлежащая не более чем двум дугам. Соответствующий луч пересекает не более двух кругов.

159. На плоскости выбираются  $n$  векторов. От начала координат откладываются всевозможные суммы по одному, два, ...,  $n$  из выбранных векторов и отмечаются концы этих сумм. При каком наименьшем  $n$  можно выбрать векторы так, чтобы среди отмеченных точек нашлись как 4 вершины квадрата, так и 3 вершины правильного треугольника?

**Ответ:**  $n = 3$ .

**Решение.** Два вектора дают 3 точки на плоскости, поэтому с их помощью квадрат получить нельзя. Искомой тройкой будут, например, векторы  $\vec{a} = (2; 0)$ ;  $\vec{b} = (1; \sqrt{3})$ ;  $\vec{c} = (0; 2)$  (рис. 66). Вершины квадрата дают векторы  $\vec{b}$ ,  $\vec{b} + \vec{c}$ ,  $\vec{b} + \vec{c} + \vec{a}$ ,  $\vec{b} + \vec{a}$ , а вершины правильного треугольника — векторы  $\vec{c}$ ,  $\vec{c} + \vec{b}$ ,  $\vec{c} + \vec{a}$ .

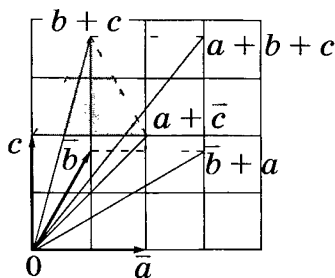


Рис. 66



## Построение примеров и контрпримеров

160. На доске написано число 123. Каждую минуту его увеличивают на 102. Разрешается в любой момент времени произвольно переставлять цифры у написанного числа. Можно ли добиться того, чтобы на доске всегда было написано трехзначное число?

**Ответ:** можно.

**Решение.** Например, так:  $123 \rightarrow 225 \rightarrow 327 \rightarrow 429 \rightarrow 531$  (поменяем местами цифры)  $135 \rightarrow 237$  (поменяем местами цифры)  $327 \rightarrow \dots$  — получили цикл.

161. Существует ли многочлен  $P(x)$ , такой, что  $P(1) = 1$ ,  $P(2) = 2$  и  $P(n)$  иррационально для любого целого  $n$ , отличного от 1 и 2?

**Ответ:** существует.

**Решение.** Искомым является, например, многочлен  $P(x) = \sqrt{2}(x-1)(x-2) + x$ , так как сумма иррационального числа  $\sqrt{2}(n-1)(n-2)$  ( $n \neq 1, 2$ ) и целого числа  $n$  иррациональна.

## Принцип Дирихле

162. Внутри правильного треугольника со стороной 5 расположены 76 точек. Докажите, что можно так выбрать круг радиуса  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ , что внутри него окажется не менее 4 из этих точек.

**Решение.** Разобьем треугольник на 25 правильных треугольников со стороной 1 так, как показано на рисунке 67. Тогда хотя бы в одном из треугольников окажется не менее четырех данных точек, так как  $(3 \cdot 25 < 76)$ . Но такой треугольник можно вписать в круг радиуса  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

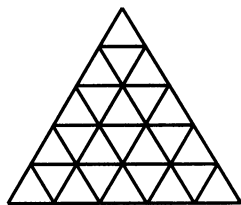


Рис. 67

163. Докажите, что из 26 различных натуральных чисел, не превосходящих 50, всегда можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое.

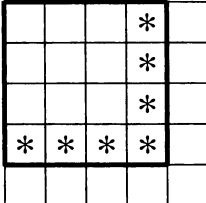
**Решение.** Представим каждое из чисел в виде  $2^k \cdot m$ , где  $m$  — нечетное число. Так как наши числа не больше 50, то  $m$  может принимать значения 1, 3, 5, ..., 49 — всего 25 значений. Значит, по принципу Дирихле какое-то значение будет приниматься по крайней мере дважды. Пусть оно равно  $2t + 1$ . Но тогда большее из чисел вида  $2^a \cdot (2t + 1)$  делится на меньшее  $2^b \cdot (2t + 1)$ .

## Раскраски

164. Можно ли в квадрате  $5 \times 5$  закрасить 16 клеток так, чтобы в любом квадрате  $2 \times 2$  было закрашено не более двух клеток?

**Ответ:** нельзя.

**Решение.** Пусть можно осуществить закраску квадрата, описанную в условии. Выделенный на рисунке 68 (левый верхний) квадрат  $4 \times 4$  можно разрезать на четыре квадрата  $2 \times 2$ . В каждом из них, по предположению, закрашено не более двух клеток, всего в квадрате  $4 \times 4$  — не более 8, значит, в отдельном «уголке», состоящем из правого столбца и нижней строки — не менее 8 закрашенных клеток. Заметим, что тогда их ровно 8, так как в противном случае в правом нижнем квадрате  $2 \times 2$  закрашены по крайней мере 3 клетки.



			*	
			*	
			*	
*	*	*	*	

Рис. 68

Далее, каждая из отмеченных звездочкой клеток входит в квадрат  $2 \times 2$ , уже имеющий две закрашенные клетки, поэтому все эти клетки не закрашены. Таким образом, в левом верхнем квадрате  $3 \times 3$  закрашено ровно 8 клеток, но тогда в нем есть квадраты  $2 \times 2$  с тремя закрашенными клетками.

## Игры

165. Двое играют в следующую игру. Есть три кучки камней. В первой из них лежит 7 камней, во второй — 9 камней, в третьей — 11 камней. Ходят по очереди. За один ход разрешается либо взять из любой кучки 1 камень, либо взять по 1 камню из любых двух кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может выиграть в этой игре независимо от ходов соперника?

**Ответ:** выигрывает второй игрок.

**Решение.** Выигрывает тот, после чьего хода в кучках не осталось камней. Опишем выигрышную стратегию второго игрока. Если первый игрок первым ходом взял 1 камень из какой-нибудь кучки, то второму следует взять по 1 камню из двух других кучек. Если же первый игрок первым ходом взял по 1 камню из каких-то двух кучек, то второму следует взять 1 камень из оставшейся кучки. Таким образом, после хода второго в первой кучке будет лежать 6 камней, во второй — 8 камней, в третьей — 10 камней. То есть

в каждой кучке будет лежать четное число камней. Каждым следующим ходом второй должен брать столько же камней и из тех же кучек, что и первый. То есть после каждого хода второго в каждой кучке будет оставаться четное число камней. Второй всегда сможет сделать ход, так как после хода первого в тех кучках, из которых он брал камни, будет оставаться нечетное число камней, т. е. хотя бы по одному. А так как второй всегда сможет сделать ход, то именно он заберет последние камни из кучек и выиграет.

166. Двое играющих по очереди красят клетки квадрата  $8 \times 8$ . За один ход игрок красит своим цветом одну клетку. Перекрашивать клетки нельзя. Первый стремится закрасить своим цветом квадрат  $2 \times 2$ . Может ли второй помешать первому независимо от его игры?

**Ответ:** может.

**Решение.** Разобьем доску так, как показано на рисунке 69.

Опишем стратегию второго игрока. Если первый покрасил клетку какого-либо прямоугольника  $2 \times 1$ , то второму следует покрасить оставшуюся клетку этого прямоугольника.

Если первый покрасил клетку, не входящую в какой-нибудь прямоугольник, то второму следует покрасить клетку, которая также не входит ни в какой прямоугольник (это

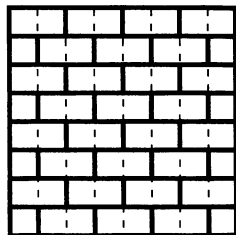


Рис. 69

всегда можно сделать, так как таких клеток четное количество). Так как в любой квадрат  $2 \times 2$  входит ровно один прямоугольник разбиения, то первый никогда не сможет закрасить квадрат  $2 \times 2$ .

### *Метод математической индукции*

167. На доске написаны числа от 1 до  $n$ ,  $n \geq 3$ . Разрешается стереть любые два числа одной четности и вместо них записать на доску их полусумму. Эта операция продолжается до тех пор, пока на доске не останется одно число. Докажите, что в конце на доске могло остаться любое число от 2 до  $n - 1$ .

**Решение.** Докажем утверждение по индукции. Для  $n = 3$  оно верно:  $\{1, 2, 3\} \rightarrow \left\{\frac{1+3}{2}, 2\right\} \rightarrow \{2\}$ . Пусть оно

верно для  $n = m$ , т. е. из чисел от 1 до  $m$  можно получить любое число от 2 до  $m - 1$ . Рассмотрим набор  $\{1, \dots, m, m + 1\}$ . По предположению индукции из его

части  $1, \dots, m$  можно получить любое число от 2 до  $m - 1$ . Значит, последним мы можем оставить на доске любое число из набора  $\frac{m+1+(m-1)}{2} = m$ ,  $\frac{m+1+m-3}{2} = m-1, \dots, \frac{m+1+k}{2} = p$ , где  $k=3$ , если  $m$  четно, и тогда  $p = \frac{m+4}{2}$ , и  $k=2$ , если  $m$  нечетно, и тогда  $p = \frac{m+3}{2}$ .

Теперь рассмотрим множество  $\{2, 3, \dots, m+1\}$ . Из него указанными операциями можно получить в итоге любое число от 3 до  $m$  (здесь все числа на 1 больше, чем в наборе  $\{1, \dots, m\}$ , а среднее арифметическое чисел  $a+1$  и  $b+1$  на 1 больше среднего арифметического чисел  $a$  и  $b$ ). Значит, последним мы можем оставить на доске любое число из набора  $\frac{1+3}{2} = 2, \frac{1+5}{2} = 3, \dots, \frac{1+l}{2} = s$ , где  $l = m-1$ , если  $m$  четно, и тогда  $s = \frac{m}{2}$ , и  $l = m$ , если  $m$  нечетно, и тогда  $s = \frac{1+m}{2}$ .

Итак, если  $m$  четно, то мы получили в итоге любое число от 2 до  $m$ , а если нечетно, то любое число, кроме  $a = \frac{m+2}{2}$ . Но число  $a$  можно получить, разбив вначале все числа, кроме  $a$ , на пары  $(1, m+1), (2, m), \dots, (a-1, a+1)$ , где средние арифметические чисел в парах равны  $a$ .

### Геометрические свойства графиков функций

168. В параболу  $y = x^2$  вписан прямоугольный треугольник (т. е. все вершины треугольника лежат на параболе), гипотенуза которого параллельна оси  $Ox$ . Докажите, что высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1.

**Решение.** Пусть  $A(-x_1; x_1^2)$ ,  $B(x_1; x_1^2)$ ,  $C(x_2; x_2^2)$  — вершины треугольника (рис. 70).

**Первое решение.**  $\angle ACB = 90^\circ \Leftrightarrow C \in \omega$ , где  $\omega$  — окружность с диаметром  $AB$ . Ее уравнение  $x^2 + (y - x_1^2)^2 = x_1^2$ , поэтому  $x_2^2 + (x_2^2 - x_1^2)^2 = x_1^2$ , откуда, в силу  $x_2^2 - x_1^2 \neq 0$ ,  $x_1^2 - x_2^2 = 1$ , т. е.  $y_A - y_C = 1$ .

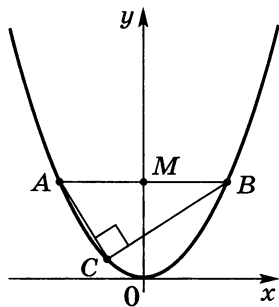


Рис. 70

**Второе решение.**  $\angle ACB = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (-x_1 - x_2; x_1^2 - x_2^2) (x_1 - x_2; x_1^2 - x_2^2) = 0 \Leftrightarrow x_2^2 - x_1^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2 = 0 \Rightarrow y_A - y_C = 1$ .

169. Параболы вида  $y = -x^2 + bx + c$  проходят через одну точку. Докажите, что вершины всех таких парабол лежат на одной параболе.

**Первое решение.** Пусть параболы проходят через точку  $O(x_0; y_0)$ . Тогда  $y_0 = -x_0^2 + bx_0 + c$ , откуда  $c = y_0 + x_0^2 - bx_0$ .

Вершина каждой из парабол имеет координаты:  $x_B = -\frac{b}{-2} = \frac{b}{2}$ ,  $y_B = -\frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{2} + c = \frac{b^2}{4} + c = \frac{b^2}{4} + y_0 + x_0^2 - bx_0$ .

Значит,  $y_B = x_B^2 - 2x_0x_B + y_0 + x_0^2$ , т. е. вершины парабол лежат на параболе  $y = x^2 - 2x_0x + (y_0 + x_0^2)$ .

**Замечание.** Вычисления упростятся, если перенести начало координат в точку  $(x_0; y_0)$ . Вид данных парабол при таком параллельном переносе не изменится.

**Второе решение.** Построим параболу  $\Pi_0$  вида  $a = x^2 + Ax + B$  с вершиной в данной точке  $O$  (рис. 71). Пусть  $V$  — вершина одной из данных парабол  $\Pi$ . Тогда при симметрии относительно точки  $M$  — середины отрезка  $OV$  — парабола  $\Pi$  переходит в параболу  $\Pi_0$  (парабола однозначно определяется вершиной и коэффициентом при  $x^2$ ). Поэтому точка  $O$ , являющаяся одновременно точкой, принадлежащей параболе  $\Pi$ , и вершиной параболы  $\Pi_0$ , перейдет в точку, принадлежащую параболе  $\Pi_0$  и в вершину параболы  $\Pi$ . Значит,  $V$  лежит на параболе  $\Pi_0$ .

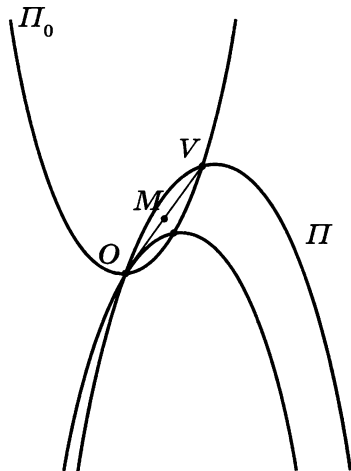


Рис. 71

### Элементы комбинаторики

170. У Васи есть три банки с красками разного цвета. Сколькими различными способами он может покрасить забор, состоящий из 10 досок, так, чтобы любые две соседние доски были разных цветов и при этом он использовал краски всех трех цветов?

**Ответ:** 1530 способами.

**Решение.** Посчитаем сначала число способов, которыми можно покрасить забор так, чтобы любые две соседние доски были покрашены в различные цвета. Первую доску можно покрасить любой из трех красок, вторую — одной из двух оставшихся. Третью — одной из двух красок, отличающихся по цвету от второй доски и т. д. То есть число способов равно  $3 \cdot 2^9 = 1536$ . В полученное число вошли и способы покраски забора в два цвета. Число таких способов равно 6 (первую доску можно покрасить тремя способами, а вторую — двумя, далее покраска определяется однозначно). Итого  $1536 - 6 = 1530$  способов.

171. У правильного 5000-угольника покрашена 2001 вершина. Докажите, что можно выбрать три покрашенные вершины, которые являются вершинами равнобедренного треугольника.

**Решение.** Занумеруем вершины 5000-угольника числами от 1 до 5000 по часовой стрелке. После чего разобьем вершины на 1000 пятерок следующим образом: в первую пятерку выберем вершины с номерами 1, 1001, 2001, 3001 и 4001, во вторую — с номерами 2, 1002, 2002, 3002 и 4002 и т. д. Заметим, что вершины каждой пятерки образуют правильный пятиугольник. Покажем, что в какую-то пятерку попали по крайней мере 3 покрашенные вершины. Действительно, если в каждой пятерке не более двух покрашенных вершин, то всего покрашено не более 2000 вершин. Значит, найдутся три вершины, попавшие в одну пятерку. Они лежат в вершинах равнобедренного треугольника, так как в правильном пятиугольнике любые три вершины являются вершинами равнобедренного треугольника.

172. Две команды играют в футбол до 10 голов (встреча прекращается, как только какая-то забьет 10 голов). В процессе игры пишется протокол, в который вносится счет после каждого изменения счета, например  $0 : 0, 0 : 1, 0 : 2, 1 : 2, \dots, 5 : 10$ . Сколько разных протоколов может получиться?

**Ответ:**  $C_{20}^{10} = 184\,756$ .

**Решение.** В каждом протоколе допишем в конце голы, которые забила бы проигравшая команда, чтобы сделать счет  $10 : 10$ . Назовем это протоколом  $10 : 10$ . Легко понять, что разным исходным протоколам соответствуют разные протоколы  $10 : 10$  и каждый протокол  $10 : 10$  можно так получить (просто уберем из него все мячи, забитые проигравшей командой после того, как другая забила 10 голов). Число же протоколов  $10 : 10$

равно  $C_{20}^{10} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \dots \cdot 11}{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1} = 184\,756$ , так как это просто число способов выбрать 10 мячей, забитых одной командой из всех 20 мячей, забитых по порядку в матче.

### **Диофантовы уравнения** (уравнения в целых числах)

173. Существуют ли такие натуральные числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  (причем  $x$  нечетное), что выполняется равенство  $x^{10} + y^{10} = z^{11}$ ?

**Ответ:** существуют.

**Решение.** Положим  $y = \alpha x$ . Тогда  $x^{10} + y^{10} = x^{10} + (\alpha x)^{10} = x^{10}(1 + \alpha^{10})$ . Взяв теперь  $\alpha = 2$  и  $x = 2^{10} + 1$ , получим  $y = 2^{11} + 2$  и  $z = 2^{10} + 1$ . Найденные числа удовлетворяют условию задачи.

174. Решите в простых числах уравнение

$$2^p - q^2 = 1999.$$

**Ответ:**  $p = 11$ ,  $q = 7$ .

**Решение.** Данная пара чисел  $p = 11$  и  $q = 7$  обращает уравнение в верное равенство. Для любой другой пары  $q \not\equiv 7$  и  $p \not\equiv 3$ , так как  $p > 11$ . Поэтому  $p = 3k + 1$  или  $p = 3k + 2$  и остаток от деления  $2^p$  на 7 равен 2 (при  $p = 3k + 1$ ) или 4 (при  $p = 3k + 2$ ). А  $q^2$  при делении на 7 дает в остатке 1, 2 или 4, поэтому  $q^2 + 1999$  при делении на 7 дает в остатке 5, 6 или 1, т. е. равенство  $2^p = q^2 + 1999$  при  $q \neq 7$  невозможно.

### **Последовательности** (Данная тема предлагается только для третьего этапа.)

175. Дана последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , где  $a_n = n^2 + n + 1$  при любом  $n \geq 1$ .

Докажите, что произведение любых двух соседних членов этой последовательности также является ее членом.

**Решение.** Утверждение задачи вытекает из цепочки равенств

$$\begin{aligned} a_{k-1}a_k &= ((k-1)^2 + (k-1) + 1)(k^2 + k + 1) = \\ &= (k^2 - k + 1)(k^2 + k + 1) = k^4 + k^2 + 1 = a_{k^2}. \end{aligned}$$

### **Принцип крайнего**

*(Данная тема предлагается только для третьего этапа.)*

176. Докажите, что у любого выпуклого многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон.

**Решение.** Предположим, что нашелся выпуклый многогранник, у которого любые две грани имеют разное число сторон. Рассмотрим у него грань с наибольшим числом сторон. Пусть их  $n$ . Тогда у этой грани есть  $n$  соседних граней, причем все они различны, так как многогранник выпуклый. Но у этих граней может быть от 3 до  $n - 1$  сторон, т. е. по принципу Дирихле из них можно выбрать две с одинаковым числом сторон. Полученное противоречие завершает доказательство.

177. Докажите, что число  $S = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  ни при каких  $n > 1$  не является целым.

**Решение.** Пусть  $2^k$  ( $k \geq 1$ ) — наибольшая степень двойки среди чисел от 1 до  $n$ . Тогда все остальные, кроме  $2^k$ , числа от 1 до  $n$  не делятся на  $2^k$  (из двух ближайших чисел, делящихся на  $2^k$ , одно делится на  $2^{k+1}$ ). Поэтому после приведения к общему знаменателю получим дробь, у которой знаменатель имеет вид  $m \cdot 2^k$ , где  $m$  — нечетное число. Числитель этой дроби является суммой  $n - 1$  четного числа и числа  $m$ , которое дает слагаемое  $\frac{1}{2^k}$ . Числитель — нечетное число, знаменатель — четное, значит, дробь  $S$  несократима, и число  $S$  не может быть целым.

### **Основы теории графов**

*(Данная тема предлагается только для третьего этапа.)*

178. В стране 64 города. Широта и долгота каждого города измеряются целым числом градусов от 1 до 8. Два города соединены двусторонним авиарейсом тогда и только тогда, когда они либо имеют одинаковую широту, а их долгота отличается на  $1^\circ$ , либо имеют одинаковую долготу, а их широта отличается на  $1^\circ$ . Какое наибольшее число авиарейсов можно отменить, чтобы из любого города в любой другой можно было попасть, совершив не более 14 перелетов?

**Ответ:** 48 авиарейсов.



**Решение.** Городов всего 64, поэтому, чтобы попасть из любого города в любой другой город, необходимо не менее 63 авиарейсов (каждый авиарейс добавляет к городам, в которые можно добраться из данного города, не более одного города). Покажем, что если будет только 63 авиарейса, то найдется два таких города, что путь из одного в другой потребует не менее 15 перелетов.

При 63 авиарейсах, используя каждый рейс не более одного раза и только в одну сторону, можно из любого города в любой другой попасть только одним способом. Пусть  $A$  и  $C$ ,  $B$  и  $D$  — пары городов в диагонально противоположных вершинах «большого квадрата».

Рассмотрим кратчайший путь из  $A$  в  $B$ . Если он пересекает меридиан  $4^\circ 30'$ , т. е. попадает в некоторую точку  $E \in \Pi$  (III), то путь состоит не менее чем из  $4 + 7 + 4 = 15$  перелетов (рис. 72). Это следует из того, что за один перелет широта или долгота изменяется на  $1^\circ$ , а нам требуется увеличить широту на  $7^\circ$  и на пути  $A \rightarrow E$  ( $E \rightarrow B$ ) изменить долготу по крайней мере на  $4^\circ$ .

Рассмотрим путь  $A \rightarrow B \rightarrow C$  (как мы показали выше, он не заходит в область II) и выделим из него кратчайший путь из  $A$  в  $C$ . Он обязан пройти только через области I, IV и III. Аналогично, выделяя из пути  $A \rightarrow D \rightarrow C$  кратчайший, получим, что он обязан прой-

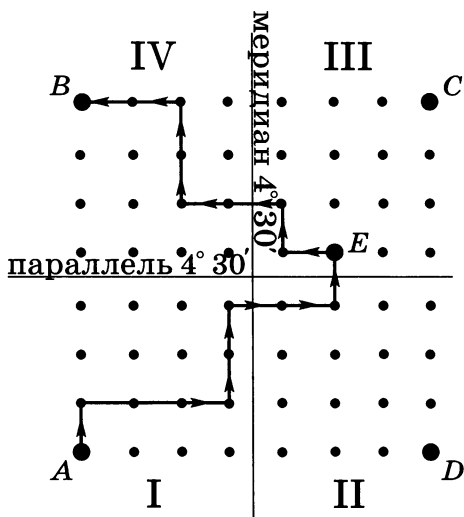


Рис. 72

ти только через области I, II, и III. Таким образом, из A в C ведут два различных пути. Противоречие.

Итак, нужно не менее 64 авиарейсов, т. е. можно закрыть не более  $8 \cdot 7 \cdot 2 - 64 = 48$  авиарейсов.

Пример, как это можно сделать, показан на рисунке 73. В любой из четырех групп в центральный город

(на рисунке отмечены точками) можно добраться, совершив не более 6 перелетов,

а из любого центрального города до любого центрального города можно добраться, совершив не более двух перелетов. Значит, из любого города в любой другой через центральные можно добраться, совершив не более  $6 \cdot 2 + 2 = 14$  перелетов.

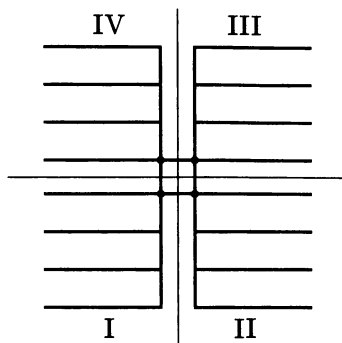


Рис. 73

179. В турнире по футболу, проведенному среди 20 команд из разных городов, каждая команда провела одну встречу дома и не более двух встреч на выезде. Докажите, что можно было так составить расписание игр, чтобы каждая команда играла не более одной игры в день и весь турнир прошел бы за три дня.

**Решение.** Проведем доказательство индукцией по числу  $n$  команд. Если  $n = 2$ , то все очевидно.

Допустим, что есть команда A, игравшая только дома. Тогда условие задачи останется справедливым, если убрать команду A. Значит, для оставшихся команд по предположению индукции можно составить расписание игр на три дня. По условию с A играла (на выезде) единственная команда B. Она сыграла на выезде еще не более чем с одной командой C и один раз сыграла дома с некоторой командой D. Поэтому игру A с B можно провести в день, когда B не играла ни с C, ни с D. В этом случае все доказано.

Предположим теперь, что каждая команда сыграла хотя бы одну игру в гостях. Тогда каждая команда сыграла ровно по одной игре дома и в гостях, так как суммарное количество игр, сыгранных всеми командами дома, равно суммарному количеству игр, сыгранных всеми командами в гостях. Значит, все команды разбиваются на группы таким образом, что в группе из  $k$  команд  $A_1, A_2, \dots, A_k$  команда  $A_1$  сыграла дома с  $A_2$ ,  $A_2$  — дома с  $A_3$  и т. д.,  $A_{k-1}$  — с  $A_k$ ,  $A_k$  — с  $A_1$ . Тогда

в каждой группе пару  $A_1, A_2$  относим к первому дню, пару  $A_2, A_3$  — ко второму, пару  $A_3, A_4$  — к первому и т. д. Если  $k$  четное, то все пары будут расписаны по двум дням, если же  $k$  нечетное, то последнюю пару  $A_k, A_1$  отнесем в третий день. Прodelав это для всех групп, мы получим расписание на три дня.

### **Комбинаторная геометрия**

*(Данная тема предлагается только для третьего этапа.)*

180. На плоскости расположены 2000 точек, любые три из которых являются вершинами треугольника площади меньше 1. Верно ли, что все точки можно закрыть треугольником площади 4?

**Ответ:** верно.

**Решение.** Рассмотрим все треугольники с вершинами в данных точках и выберем из них треугольник наибольшей площади (один из них, если таких треугольников несколько). Пусть это треугольник  $ABC$  (рис. 74). Проведем через его вершины прямые, параллельные его противоположным сторонам. Они образуют треугольник  $A_1B_1C_1$ , стороны которого вдвое больше соответствующих сторон треугольника  $ABC$ , поэтому его площадь меньше 4. Покажем, что все 2000 точек должны лежать внутри или на сторонах треугольника  $A_1B_1C_1$ . Действительно, пусть это не так, и некоторая точка  $M$  лежит вне этого треугольника. Тогда точка  $M$  и одна из вершин треугольника  $A_1B_1C_1$  лежат по разные стороны относительно одной из сторон этого треугольника. Пусть, например, точка  $M$  и вершина  $C_1$  лежат по разные стороны относительно прямой  $A_1B_1$ . Но тогда высота треугольника  $MA_1B_1$ , опущенная на сторону  $A_1B_1$ , больше высоты треугольника  $CA_1B_1$ , опущенной на ту же сторону. Значит, треугольник  $ABC$  не наибольшей площади. Противоречие.

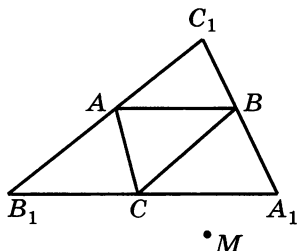


Рис. 74

181. Даны две системы прямоугольников на плоскости I и II. Известно, что любые два прямоугольника из различных систем имеют общую точку и стороны их параллельны. Докажите, что либо все прямоугольники в одной системе имеют общую точку, либо существуют две прямые, первая из которых пересекает все прямоугольники системы I, а вторая — все прямоугольники системы II.

**Решение.** Из условия задачи следует, что все прямоугольники обеих систем имеют параллельные стороны. Проведем две перпендикулярные прямые  $P_1$  и  $P_2$ , параллельные разным сторонам прямоугольника из системы (рис. 75). Спроектируем все прямоугольники обеих систем на прямую  $P_1$ .

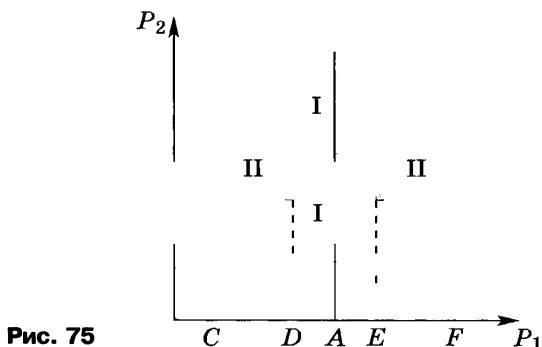


Рис. 75

Возможны два случая.

1) Проекция прямоугольника системы I имеет общую точку A, и проекции прямоугольников системы II имеют общую точку B. Тогда прямая, параллельная  $P_2$  и проходящая через A, пересекает все прямоугольники из системы I, а такая же прямая, проходящая через B, пересекает все прямоугольники системы II. В этом случае все доказано.

2) Есть две проекции прямоугольников  $[C, D]$  и  $[E, F]$ , например, из системы II, не имеющие общей точки. Тогда по условию задачи любая проекция прямоугольника из системы I должна содержать точки D и E. Следовательно, как и выше, все прямоугольники системы I можно пересечь прямой  $Q_2$ , параллельной  $P_2$ . Рассмотрим теперь проекцию на прямую  $P_2$ . Если выполняется первый случай, то все доказано.

Поэтому будем считать, что либо есть проекции из системы I, не имеющие общей точки, либо такие же проекции из системы II.

В первом случае, как и выше, есть прямая  $Q_1$ , параллельная  $P_1$  и пересекающая все прямоугольники системы II. Таким образом, получим две перпендикулярные прямые  $Q_1$  и  $Q_2$ , причем  $Q_1$  пересекает все многоугольники системы II, а  $Q_2$  — все прямоугольники системы I. Во втором случае есть прямая  $Q_1$ , параллельная  $P_1$  и пересекающая все прямоугольники I системы.

Точка P пересечения прямых  $Q_2$  и  $Q_1$  будет общей для всех прямоугольников системы I. Все доказано.

## СОДЕРЖАНИЕ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ЭТАПОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

Как отмечалось ранее, основными целями начальных (самых массовых) этапов олимпиады являются выявление талантливых школьников, обладающих творческими способностями, развитие у них интереса к систематическим занятиям математикой. Основной целью заключительных этапов олимпиады является определение наиболее одаренных в области математики школьников. В соответствии с этим качественно меняется содержание олимпиады. Если на начальных ее этапах основу вариантов составляют «одноходовые задачи», когда решение задания предполагает одну догадку, сопровождаемую несложными техническими деталями, а круг используемых разделов математики практически не выходит за рамки стандартной школьной программы, то на заключительных этапах участник должен владеть «техникой доказательства»: умение находить для решения задачи несколько логических шагов. При этом каждый шаг может быть технически достаточно сложным (например, необходимо использовать комбинаторный подсчет, математическую индукцию, делать оценки). Более того, решение каждой из таких задач требует применения методов из различных разделов математики. Еще раз отметим, что овладение техникой такого уровня уже не может проходить на обычных школьных занятиях. Для этого требуется самостоятельная подготовка и работа в кружках или на факультативах.

Обязательным становится изучение некоторых дополнительных разделов элементарной математики, входящих в программу кружков и факультативов. К ним относятся некоторые разделы:

1) теории чисел (вычеты, малая теорема Ферма, китайская теорема об остатках);

2) теории графов;

3) геометрии (преобразования плоскости, в том числе гомотетия, инверсия и аффинные преобразования, теоремы Чебы, Менелая, Птолемея, Эйлера);

4) алгебры (методы доказательства неравенств, теорема Виета для многочленов произвольной степени);

5) комбинаторной геометрии (представление о выпуклой оболочке множества на плоскости, принцип крайнего).

Ниже приведены примеры заданий, иллюстрирующих такие разделы элементарной математики или использующие указанные теоремы и методы.

**182.** Можно ли построить на координатной плоскости бесконечно много прямых так, чтобы любые две пересекались в целочисленной точке и никакие три не проходили через одну точку?

**Ответ:** можно.

**Решение.** Например, можно взять все прямые вида  $y = a_i x + a_i^2$  с различными целыми  $a_i$ . Прямые  $y = ax + a^2$  и  $y = bx + b^2$  пересекаются в точке с абсциссой  $x = (a^2 - b^2) : (a - b) = a + b$ . Это число целое, поэтому ордината тоже целая. Теперь достаточно выбрать такие значения  $a_i$ , чтобы все суммы  $a_i + a_j$  были различны. Достаточно взять, например,  $a_i = 10^i$ .

183. Ко дню Российского флага продавец украшает витрину 12 горизонтальными полосами ткани трех цветов (белой, синей, красной). При этом он выполняет два условия:

- 1) одноцветные полосы не должны висеть рядом;
- 2) каждая синяя полоса должна висеть между белой и красной.

Сколькими способами он может это сделать?

**Ответ:** 288 способами.

**Решение.** Будем называть белые и красные полосы ткани *зелеными*.

Обозначим  $T_n$  количество способов, которыми можно украсить витрину при наличии  $n$  полос ткани. Первой полосой может быть только *зеленая*.

Если вторая полоса синяя, то далее должны следовать  $n - 2$  полосы, причем первая из них *зеленая*. Всего способов так развесить полосы  $T_{n-2}$ .

Если вторая полоса тоже *зеленая*, то вместе с ней оставшихся полос  $n - 1$  и развесить их можно  $T_{n-1}$  способами. Итак,

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2}. \quad (*)$$

Очевидно, что  $T_1 = 2$  (одна полоса может быть либо белой, либо красной),  $T_2 = 2$  (две полосы могут быть либо белой и красной, либо красной и белой).

Все последующие  $T_n$  считаются по формуле (\*):

$$\begin{aligned} T_3 &= T_2 + T_1 = 4, & T_4 &= T_3 + T_2 = 6, & T_5 &= T_4 + T_3 = 10, \\ T_6 &= T_5 + T_4 = 16, & T_7 &= T_6 + T_5 = 26, & T_8 &= T_7 + T_6 = 42, \\ T_9 &= T_8 + T_7 = 68, & T_{10} &= T_9 + T_8 = 110, \\ T_{11} &= T_{10} + T_9 = 178, & T_{12} &= T_{11} + T_{10} = 288. \end{aligned}$$

184. Есть бусы, состоящие из  $p^n$  бусинок ( $p$  — простое число,  $n$  — натуральное число,  $n > 2$ ). Делаются ходы. За один ход бусы разбиваются на равные по длине куски, в каждом куске порядок следования бусинок меняется на обратный, и куски возвращаются на свои места. Любой ли порядок следования бусинок можно получить с помощью таких ходов?

**Ответ:** не любой.

**Решение.** Будем обозначать через  $AB$  количество бусинок на меньшей из двух дуг с концами в бусинках  $A$  и  $B$ . Покажем, что если до хода  $AB = p^{n-1} - 1$ , то и после хода  $AB = p^{n-1} - 1$ , из чего отрицательный ответ на вопрос задачи вытекает очевидным образом. Пусть  $d$  — число кусков, на которые мы делим бусы. Так как  $p^n$  делится на  $d$ , то  $d = p^k$ . Если  $k = 0$ , то кусок всего один, и  $AB$  не меняется. Если  $k > 0$ , то длина  $l$  куска равна  $\frac{p^n}{d} = p^{n-k} \leq p^{n-1}$ , следовательно,  $A$  и  $B$  лежат в разных кусках. Между ними лежит  $\frac{p^{n-1}}{p^{n-k}} - 1 = p^{k-1} - 1$  кусков. Занумеруем их так, чтобы кусок, где лежит бусинка  $A$ , был под номером 0, а кусок, где лежит бусинка  $B$ , — под номером  $p^{k-1}$ . Пусть  $A$  в своем куске стоит на месте  $t$ , а  $B$  — на месте  $r$ , тогда  $AB = p^{n-k} - t + (p^{k-1} - 1)p^{n-k} + r - 1 = (r - t) + p^{n-1} - 1$ , а, с другой стороны,  $AB = p^{n-1} - 1$ , значит,  $t = r$ . Отсюда следует, что после перестановки бусинок в кусках их номера  $A$  и  $B$  в своих кусках будут также равными, и потому  $AB$  останется равным  $p^{n-1} - 1$ , что и требовалось доказать.

185. Числа  $2^{1000}$  и  $5^{1000}$  выписаны одно за другим в десятичной записи. Сколько всего цифр выписано?

**Ответ:** 1001 цифра.

**Решение.** Пусть  $2^{1000}$  —  $m$ -значное число и  $5^{1000}$  —  $n$ -значное число. Это означает, что  $10^{m-1} < 2^{1000} < 10^m$  и  $10^{n-1} < 5^{1000} < 10^n$ . Перемножив эти неравенства, мы получим  $10^{n+m-2} < 10^{1000} < 10^{m+n}$ . Откуда следует, что искомое число цифр  $m + n = 1000 + 1 = 1001$ .

186. Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде  $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$ , где  $a$  и  $b$  — натуральные числа.

**Ответ:** нельзя представить в указанном виде число 1 и числа на 2 больше степеней двойки.

**Решение.** Пусть  $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1} = N$ . Рассмотрим число

$$N - 2 = \frac{a}{b} - 1 + \frac{a+1}{b+1} - 1 = \frac{a-b}{b} + \frac{a-b}{b+1},$$

$$N - 2 = (a-b) \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} \right).$$

Так как  $b$  и  $b+1$  — взаимно простые числа, а  $N - 2$  — целое число, то  $a - b = k \cdot b \cdot (b+1)$ .

Следовательно,

$$N - 2 = k((b + 1) + b), \quad N - 2 = k(2b + 1).$$

Если  $k = 0$ , то  $N = 2$ . Если же  $k \neq 0$ , то из условия  $b \neq 0$  следует, что число  $N - 2$  должно иметь нечетный делитель, отличный от 1. Таким образом,  $N - 2 \neq -1$ ,  $N - 2 \neq 2^p$ ,  $p \geq 0$ .

Завершает доказательство проверка того, что любое число  $N \geq 2$ ,  $N \neq 2 + 2^p$  представимо в указанном виде: если  $2b + 1$  — нечетный делитель числа  $N - 2$ , то подходит пара  $\{a, b\}$ , где  $a = b + k \cdot b \cdot (b + 1)$ ,  $k = (N - 2) : (2b + 1)$ .

7. Найдите все пары простых чисел вида  $\{a^n - 1, a^n + 1\}$ , где  $a, n$  — натуральные числа,  $n > 1$ .

**Ответ:**  $\{3, 5\}$ .

**Решение.** Так как  $a^n - 1$  делится на  $a - 1$  и  $a^n - 1$  — простое число, то  $a = 2$ . Далее, при нечетном  $n$  число  $2^n + 1$  делится на 3; следовательно,  $n = 2k$ . Но тогда  $a^n - 1 = (2k + 1)(2k - 1)$ . Значит,  $2^k - 1 = 1$ ,  $k = 1$ ,  $n = 2$ .

18. Существуют ли нечетные числа  $x, y, z$ , такие, что  $xy + 1, yz + 1, zx + 1$  — полные квадраты?

**Ответ:** не существуют.

**Решение.** Пусть такие числа существуют. Тогда  $xy + 1 = u^2$ ,  $yz + 1 = v^2$ ,  $zx + 1 = w^2$ , где  $u, v, w$  — четные числа, т. е.  $u = 2a$ ,  $v = 2b$ ,  $w = 2c$ . Таким образом,  $xy = 4a^2 - 1$ ,  $yz = 4b^2 - 1$ ,  $zx = 4c^2 - 1$ . Перемножив эти равенства, получим  $(xyz)^2 = 4A - 1$ , где  $A$  — некоторое натуральное число. Мы пришли к противоречию, так как квадрат нечетного числа при делении на 4 дает в остатке 1.

**замечание.** Существует бесконечно много таких троек  $(x, y, z)$  четных натуральных чисел, что  $xy + 1, yz + 1, zx + 1$  — полные квадраты.

Пример:  $(2, 4, 12)$ .

89. В классе 20 учеников. Каждый дружит не менее чем с 10 другими. Докажите, что в этом классе можно выбрать две тройки учеников так, чтобы любой ученик из одной тройки дружил с любым учеником из другой тройки.

**Решение.** Пронумеруем всех учеников в этом классе натуральными числами от 1 до 20 и обозначим через  $F(i, j, k)$  число общих друзей у  $i$ -го,  $j$ -го и  $k$ -го учеников, а сумму всех таких чисел  $F$  через  $S$ . Тогда, чтобы доказать утверждение задачи, достаточно показать, что для некоторых  $i, j$  и  $k$   $F(i, j, k) \geq 3$ .

Всего чисел  $F$  будет  $C_{20}^3 = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = 1140$ . Так как у каждого ученика не менее 10 друзей в классе, то при под-



счете числа  $S$  каждого ученика мы учитываем не менее  $C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$  раз, поэтому  $S \geq 120 \cdot 20 = 2400$ .

Таким образом, сумма 1140 целых чисел не меньше 2400, поэтому одно из чисел  $F$  не меньше 3, что и требовалось доказать.

190. В стране 100 дорог (каждая дорога соединяет ровно два города, на всех дорогах двустороннее движение), и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Докажите, что найдутся 40 дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.

**Решение.** Заметим прежде всего, что из одного города выходит не более двух дорог. Выйдем из одного города и будем идти, зачеркивая пройденные дороги. Тогда или мы вернемся в исходную точку, и образуется цикл (рис. 76), либо мы не вернемся, и тогда образуется путь (рис. 77).

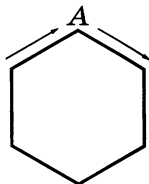


Рис. 76

Из условия следует, что любой цикл нечетной длины должен содержать не менее 5 дорог. Пусть в стране  $m$  путей и циклов четной длины, содержащих

$k_1, \dots, k_m$  дорог соответственно, и  $n$  циклов нечетной длины, содержащих  $l_1, \dots, l_n$  дорог соответственно.



Рис. 77

Тогда в любом пути и четном цикле с  $k_i$  дорогами можно выбрать не менее  $\frac{k_i}{2}$  дорог, никакие две из которых не выходят из одного города, а в любом нечетном цикле с  $l_i$  дорогами можно выбрать  $\frac{l_i - 1}{2}$  дорог, никакие две из которых не выходят из одного города. Таким образом, в стране найдется по крайней мере

$$\begin{aligned} S &= \frac{k_1}{2} + \dots + \frac{k_m}{2} + \frac{l_1 - 1}{2} + \dots + \frac{l_n - 1}{2} = \\ &= \frac{k_1 + \dots + k_m + l_1 + \dots + l_n}{2} - \frac{n}{2} \end{aligned}$$

дорог, никакие две из которых не выходят из одного города. Тогда из равенства  $k_1 + \dots + k_m + l_1 + \dots + l_n = 100$  следует, что  $S = 50 - \frac{n}{2} \geq 40$ , так как все  $n$  циклов имеют длину не менее 5 и, значит,  $5n \leq 100$ .

191. На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построены квадраты  $AKLB$  и  $BNPC$ . Докажите, что если  $BM$  — медиана треугольника  $LBN$ , то  $BM \perp AC$ .

The diagram shows a rhombus \$KPNL\$. Inside, points \$A, B, C, H, M, N\$ are marked. Lines connect \$A\$ to \$B\$ and \$C\$, \$B\$ to \$H\$ and \$M\$, and \$C\$ to \$H\$ and \$N\$. A central point \$B\$ is connected to \$A, C, H, M\$. Points \$L\_1\$ and \$M\_1\$ are located on segments \$CN\$ and \$BN\$ respectively.

есть  $A_i B_j$ ,  $B_j B_i$ ,  $B_i A_j$ , образующие ломаную, длина которой больше  $A_i A_j$ . А расстояние  $A_i A_j$  сохранилось. Значит,  $2S_1 < S$ .

**Замечание.** Кажется, что задача имеет значительно более простое решение, основанное на неравенстве  $A_i A_j + A_i B_i + A_j B_j + B_i B_j > 2A_i A_j$ . Ошибочность этого «решения» заключается в том, что каждый отрезок  $A_i B_i$  будет входить в несколько различных сумм, например, еще и в неравенстве  $A_i A_{j+1} + A_i B_i + A_{j+1} B_{j+1} + B_i B_{j+1} > 2A_i A_{j+1}$ .

194. Произвольную точку  $P$  плоскости отразили симметрично относительно прямой, содержащей сторону  $BC$  треугольника  $ABC$ , и полученную точку отразили симметрично относительно середины стороны  $BC$ . Обозначим через  $A'$  полученную точку. Аналогично, отражая точку  $P$  симметрично относительно сторон  $CA$  и  $AB$ , а затем их середин, построим точки  $B'$  и  $C'$ . Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  подобны.

**Решение. Лемма.** Точка  $P_1$  симметрична точке  $P$  относительно  $AB$ . Точка  $P_2$  симметрична  $P_1$  относительно середины  $AB$ . Тогда  $P$  и  $P_2$  симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку  $AB$ .

**Доказательство.** Пусть  $Q$  — середина  $PP_2$ , а  $M$  — середина  $AB$  (рис. 79). Тогда  $QM \parallel PP_1 \Rightarrow QM \perp AB$ . Так как точка  $P_2$  находится на таком же расстоянии от  $AB$ , что и точка  $P$ , то  $PP_2 \parallel AB \Rightarrow QM \perp PP_2$ , следовательно,  $P$  и  $P_2$  симметричны. Лемма доказана. ■

Пусть точка  $O$  — центр описанной окружности  $\triangle ABC$ . Проведем окружность с центром  $O$  и радиусом  $OP$  (рис. 80). Из леммы следует, что точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  явля-

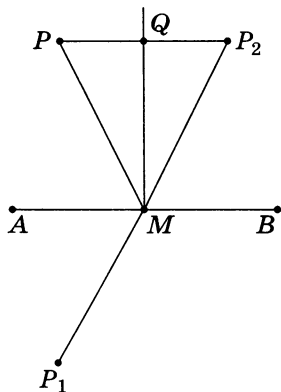


Рис. 79

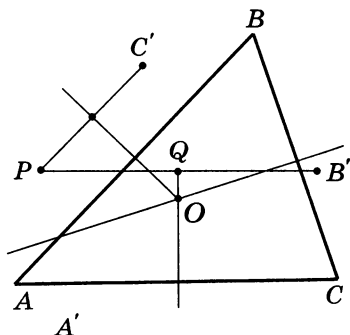


Рис. 80

ются точками, симметричными точке  $P$  относительно серединных перпендикуляров  $\triangle ABC$ . Значит,  $OP = OA' = OB' = OC' \Rightarrow$  четырехугольник  $A'B'C'P$  вписанный.

Пусть для определенности точка  $P$  лежит на дуге  $A'C'$ , не содержащей точки  $B'$ . Докажем, что  $\angle BAC = \angle B'A'C'$ .  $\angle B'A'C' = \angle B'PC'$  как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. По лемме  $PB' \parallel AC$  и  $PC' \parallel AB \Rightarrow \angle B'PC' = \angle CAB$ . Аналогично  $\angle BCA = \angle B'C'A' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

195. В выпуклом многоугольнике  $P_1$  содержится выпуклый многоугольник  $P_2$ . Докажите, что при любой гомотетии относительно точки  $x \in P_2$  с коэффициентом  $k = -\frac{1}{2}$  по крайней мере одна вершина  $P_2$  не выйдет за пределы  $P_1$ .

**Решение.** Рассмотрим треугольник  $ABC$  с вершинами в вершинах многоугольника  $P_2$ , содержащих точку  $X$  — центр рассматриваемой гомотетии  $H$ . Очевидно, что такой треугольник существует. Покажем, что одну из его вершин гомотетия  $H$  оставляет внутри  $\triangle ABC$ . Отсюда будет следовать утверждение задачи, так как  $P_2$  лежит в  $P_1$ .

Проведем через точку  $O$  пересечения медиан  $\triangle ABC$  прямые, параллельные сторонам (рис. 81). Тогда точка  $X$  окажется внутри одного из треугольников, отсекаемых этими прямыми. Пусть, например, точка  $X$  лежит в закрашенной части ( $\triangle A'C'B$ ). Тогда

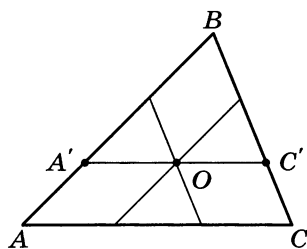


Рис. 81

при гомотетии с центром в  $X$  и коэффициентом  $k = -\frac{1}{2}$  точка  $B$  не выйдет за треугольник  $ABC$ . Аналогично для других частей. Утверждение задачи доказано.

196. Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . На продолжениях стороны  $AC$  за точку  $C$ ,  $CB$  за точку  $B$ ,  $BA$  за точку  $A$  взяты соответственно точки  $B_1$ ,  $A_1$ ,  $C_1$  так, что треугольник  $A_1B_1C_1$  подобен треугольнику  $ABC$ . Докажите, что ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника  $A_1B_1C_1$  совпадает с центром окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

**Решение.** Пусть  $H$  — ортоцентр  $\triangle A_1B_1C_1$ . Тогда  $B_1H \perp A_1C_1$ ,  $C_1H \perp A_1B_1$ , поэтому  $\angle B_1HC_1 = \pi - \angle B_1A_1C_1$  (рис. 82). Но по условию  $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ , поэтому  $\angle B_1HC_1 = \angle B_1AC_1$  и, следовательно, точки  $B_1$ ,  $H$ ,  $A$  и  $C_1$  лежат на одной окружности. Отсюда следует, что  $\angle CAH = \angle B_1C_1H$ . Аналогично  $\angle ABH = \angle C_1A_1H$ ,  $\angle BCH = \angle A_1B_1H$ . Таким образом,  $\angle ACH = \angle ACB - \angle BCH = \angle A_1C_1B_1 - \angle A_1B_1H = \angle B_1C_1H = \angle CAH$ . Итак,  $\angle ACH = \angle CAH$ , следовательно,  $HA = HC$ . Аналогично  $HA = HB$ , т. е.  $HA = HB = HC$ , утверждение доказано.

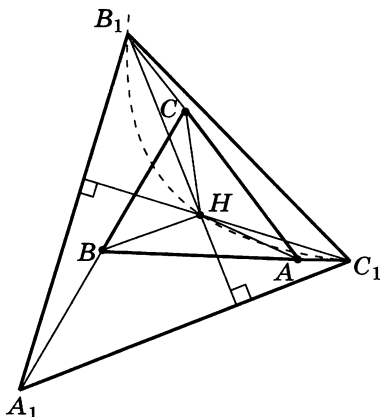


Рис. 82

197. Найдите геометрическое место точек (ГМТ)  $P$ , лежащих внутри куба  $ABCA'B'C'D'$ , для которых в каждую из шести пирамид  $PABCD$ ,  $PABB'A'$ ,  $PBCC'B'$ ,  $PCDD'C'$ ,  $PDA A'D'$ ,  $PA'B'C'D'$  можно вписать сферу.

**Ответ:** искомое ГМТ — объединение диагоналей  $AC'$ ,  $BD'$ ,  $CA'$ ,  $DB'$ .

**Лемма.** Пусть в треугольниках  $XYZ$  и  $X'Y'Z'$  равны стороны  $YZ$  и  $Y'Z'$ , а также высоты из вершин  $X$  и  $X'$ . Радиусы вписанных окружностей равны тогда и только тогда, когда либо  $\triangle XYZ = \triangle X'Y'Z'$ , либо  $\triangle XYZ = \triangle X'Z'Y'$ .

**Доказательство.** Если треугольники равны, то радиусы тоже равны. Докажем, что верно обратное. Построим треугольник  $X''YZ$ , равный треугольнику  $X'Y'Z'$  и лежащий в той же полуплоскости относительно  $YZ$ , что и  $X$ . Тогда либо  $X'' = X$  и лемма доказана, либо  $X''X \parallel YZ$ . Пусть  $V$  — точка, симметричная  $X$  относительно серединного перпендикуляра к  $YZ$ . Достаточно доказать, что  $V = X''$ .

Поскольку  $S = pr$ , то  $X''Y + X''Z = XY + XZ$ . Пусть  $U$  — точка, симметричная  $Z$  относительно  $XX''$ , тогда  $X''Y + X''U = XY + XU = YV + VU$ . Пусть для определенности  $X''$  лежит в той же полуплоскости относительно  $YU$ , что и  $V$ . Тогда один из треугольников  $YUX''$  и  $YUV$  содержится внутри другого; покажем, что их периметры могут совпадать, лишь когда  $X'' = V$  (рис. 83). Пусть для определенности  $X''$  лежит в  $\triangle YUV$ . Пусть луч  $YX''$  пересекает  $UV$  в точке  $W$ . Тогда  $YX'' + X''U \leq YX'' + X''W + WU = YW + WU \leq YV + VW + WU = YV + VU$ , оба равенства одновременно достигаются лишь при  $X'' = V$ , что и требовалось. Лемма доказана. ■

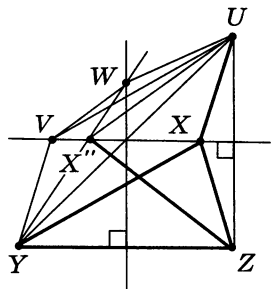


Рис. 83

Назовем *трехгранником* три непараллельные плоскости, параллельные некоторой прямой  $l$ . Рассмотрим сферу, вписанную в трехгранник. Тогда ее центр и точки касания лежат в одной плоскости, перпендикулярной  $l$ , и в сечении *трехгранника* и сферы этой плоскостью получается треугольник с его вписанной окружностью (пусть ее радиус равен  $r$ ). Все такие треугольники равны, поэтому ГМТ центров вписанных сфер есть прямая, параллельная  $l$  и лежащая на расстоянии  $r$  от каждой из плоскостей.

Рассмотрим пирамиду  $PABCD$ . Она описана тогда и только тогда, когда существует сфера, вписанная одновременно в *трехгранники*  $(PAB, PCD, ABCD)$  и  $(PAD, PBC, ABCD)$ , т. е. когда ГМТ их центров имеют общую точку. ГМТ центров этих сфер есть перпендикулярные прямые, которые, очевидно, пересекаются тогда, и только тогда, когда равны радиусы вписанных окружностей соответствующих треугольников. Заметим, что у этих треугольников равны основания и высоты к основаниям. Поэтому по лемме пирамида описана тогда и только тогда, когда треугольники равны.

Введем систему координат с центром в точке  $A$ , осями  $AB, AD, AA'$  и единицей измерения  $AB$ . Пусть точка  $P$  имеет координаты  $(x, y, z)$ . Понятно, что упомянутые треугольники равны тогда и только тогда, когда  $x = y$  или  $x = 1 - y$  (т. е. когда проекции соответствующих вершин на основания делят их в одном и том же отношении). Аналогично для остальных пяти пирамид получаем условия  $x = z$  или  $x = 1 - z$ ,  $y = z$  или  $y = 1 - z$ . Легко видеть, что из двух из этих условий сле-

дует третье. Условие  $x = y$  и  $x = z$  означает, что  $P \in AC'$ , для остальных трех случаев аналогично получаем три другие диагонали куба.

198. Сумма действительных чисел  $x$ ,  $y$  и  $z$  равна 3, а сумма их попарных произведений равна  $a$ . Докажите неравенство  $(x - 1)^2 \leq 4 \left(1 - \frac{a}{3}\right)$ .

**Решение.** Из условия задачи следует, что  $y + z = 3 - x$ , значит,  $x(3 - x) + yz = a$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} a &= -x^2 + 3x + yz \leq -x^2 + 3x + \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \\ &= -x^2 + 3x + \left(\frac{3-x}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

После домножения на 4 и раскрытия скобок получим

$$3(x - 1)^2 = 3x^2 - 6x + 3 \leq 4(3 - a).$$

Для завершения доказательства осталось лишь поделить на 3.

199. Пусть  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — неотрицательные числа, и выполняется равенство  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ . Докажите неравенство

$$x + y + z \leq \frac{3}{2}.$$

**Решение.** Рассмотрим выражение  $2(xy + yz + xz) + (x^2 + y^2 + z^2) - 2(x + y + z) + 1 = 2(xy + yz + xz) + (1 - 2xyz) - 2(x + y + z) + 1 = 2 - 2(x + y + z) + 2(xy + yz + xz) - 2xyz$  или, приведя левую часть рассмотренного выражения к квадрату, а правую часть данной цепочки равенств к произведению, получим  $(x + y + z - 1)^2 = 2(1 - x)(1 - y)(1 - z)$ . Далее, по неравенству Коши так как  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , то

$$2(1 - x)(1 - y)(1 - z) \leq 2 \left(\frac{3 - x - y - z}{3}\right)^3.$$

Положим  $t = x + y + z - 1$ . Тогда имеем неравенство

$$t^2 + 2 \left(\frac{t-2}{3}\right)^3 \leq 0.$$

Один корень многочлена  $t^2 + 2 \left(\frac{t-2}{3}\right)^3$  равен  $\frac{1}{2}$ , и поэтому

$$t^2 + 2 \left(\frac{t-2}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}(2t^2 + 15t^2 + 24t - 16) = \frac{1}{27}(2t - 1)(t + 4)^2$$

$$\text{или } \frac{1}{27}(2t - 1)(t + 4)^2 \leq 0, \text{ т. е. } 2t - 1 \leq 0 \quad (t \geq -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t + 4 \neq 0) \Rightarrow 2(x + y + z - 1) \leq 1 \Rightarrow x + y + z \leq \frac{3}{2}.$$

200. Существует ли многочлен  $P(x)$  2001-й степени, такой, что  $P(x^2 - 1)$  делится на  $P(x)$ ?

**Ответ:** существует. Например,  $P(x) = (x + a)^{2001}$ , где  $a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ .

**Решение.** Будем искать многочлен  $P(x)$  в виде  $P(x) = (x + a)^{2001}$ . Тогда  $P(x^2 - 1) = (x^2 - 1 + a)^{2001}$ ,  $P(x) = (x + a)^{2001}$  и условие должно выполняться, если  $(x^2 - 1 + a) \div (x + a)$ . Но  $x^2 - 1 + a = x^2 - a^2 + (a^2 + a - 1)$  делится на  $x + a$ , если  $a^2 + a - 1 = 0$ , т. е. при  $a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ .

201. На плоскости дано некоторое конечное семейство  $P$  кругов равного радиуса. Известно, что для любых трех кругов из  $P$  найдется прямая, пересекающая их все. Докажите, что если радиусы кругов увеличить в 2 раза, то найдется прямая, пересекающая все круги.

**Решение.** Можно считать, что все круги имеют радиус 1. Условие задачи означает, что для любого треугольника, образованного центрами кругов, одна из высот не превосходит 2. Действительно, расстояния от центров кругов до прямой не больше 1. Поэтому если  $O_1P_1$ ,  $O_2P_2$ ,  $O_3P_3$  — перпендикуляры, опущенные на прямую  $l$  из центров трех кругов (рис. 84),  $O_1$ ,  $O_2$  лежат по одну сторону от прямой  $l$  и точка  $K$  — точка пересечения  $O_3P_3$  с  $O_1O_2$ , то  $P_3K \leq \max\{O_1P_1, O_2P_2\}$ , т. е.  $P_3K \leq 1$ . Но тогда если  $O_3P$  — высота треугольника  $O_1O_2O_3$ , то  $O_3P \leq O_3K \leq O_3P_3 + P_3K \leq 2$  (неравенство  $O_3K < O_3P_3 + P_3K$  имеет место в том случае, когда все точки  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  лежат по одну сторону от  $l$ ). Возьмем теперь два центра  $A$  и  $B$  кругов семейства на максимально большом расстоянии. Тогда какой бы третий центр  $C$  ни взять, в треугольнике  $ABC$  минимальная высота  $h$  — это высота, опущенная на сторону  $AB$  (рис. 85).

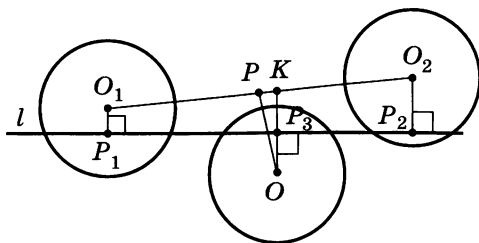


Рис. 84

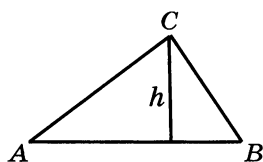


Рис. 85



По условию задачи  $h \leq 2$ , и поэтому круг с центром в точке  $C$  и радиусом 2 пересекает прямую  $AB$ . Значит, все круги радиуса 2 будут пересекать прямую  $AB$ .

202. Кузнечик прыгает параллельно любой стороне некоторого правильного семиугольника на расстояние один (всякий раз выбирается один из возможных 14 векторов, на который он может сместиться). На плоскости расположена круглая кормушка радиуса 0,01. Докажите, что кузнечик всегда может попасть в кормушку.

**Решение.** Вначале покажем, что если существует семиугольник, сколь угодно малых размеров, по вершинам которого может пройти кузнечик, то задача решена. В самом деле, возьмем такой семиугольник, что параллелограмм, построенный на двух сторонах этого семиугольника, помещается в круг диаметра 0,01. Запустим плоскость равными ему параллелограммами. Получим решетку, одна из вершин которой находится внутри кормушки.

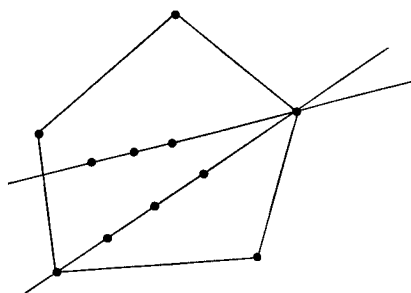
Осталось показать существование такого семиугольника. Пусть  $M$  — указанный в условии правильный семиугольник  $A_1 \dots A_7$ , а  $\vec{r}_1 = \vec{A_1 A_2}$ ,  $\vec{r}_2 = \vec{A_2 A_3}$ , ...,  $\vec{r}_7 = \vec{A_7 A_1}$ . Если отложить эти векторы от точки  $O$ , где находится кузнечик, то получится новый правильный семиугольник  $M'$ . Заметим, что сторона  $M'$  меньше стороны  $M$  в  $\frac{1}{k}$  раз, где  $k = 2 \sin \frac{\pi}{7} < 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1$ . Пройдя через точку  $O$ , кузнечик может сместиться параллельно любой стороне  $M'$  на расстояние  $k$ . Повторяя эту конструкцию  $n$  раз, мы получаем сдвиги вдоль стороны правильного  $k$ -угольника  $M^{(n)}$  на расстояние  $k^n$ . Число  $k^n$  при больших  $n$  становится сколь угодно малым.

203. На плоскости провели 2001 прямую так, что никакие две из них не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Эти прямые разбили плоскость на части. Какое наименьшее число частей, являющихся углами, может при этом получиться?

**Ответ:** 3.

**Решение.** Рассмотрим выпуклую оболочку всех точек пересечения этих прямых (т. е. выпуклый многоугольник наименьшей площади, содержащий все эти точки). Она является многоугольником, а многоугольник имеет не менее трех вершин. Каждая вершина этой оболочки — точка пересечения каких-то двух из проведенных прямых. Лучи этих прямых, выходящие из

этой вершины во внешнюю часть выпуклой оболочки, образуют угол (рис. 86).



**Рис. 86**

Значит, среди частей, на которые эти прямые разбивают плоскость, содержится не менее трех углов.

Приведем пример 2001 прямых, для которых частей, являющихся углами, ровно три. Две прямые — оси координат, а уравнения 1999 остальных прямых таковы:

$$\frac{x}{i} + \frac{y}{2000 - i} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, 1999).$$

# Олимпиада 2007/2008 учебного года

## III ЭТАП (РЕГИОНАЛЬНЫЙ)

### УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

#### ▼ 8 класс

- 8.1. Даны шестизначные числа  $A$  и  $B$ . Число  $A$  состоит из четных цифр, число  $B$  — из нечетных, а в числе  $C = A + B$  четные и нечетные цифры чередуются. Какое наибольшее значение может принимать  $C$ ? (*М. Мурашкин*)
- 8.2. В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$  и  $CC_1$ . Точка, симметричная середине стороны  $AC$  относительно прямой  $BC$ , обозначена через  $A_2$ , а точка, симметричная той же середине стороны  $AC$  относительно прямой  $AB$ , — через  $C_2$ . Докажите, что отрезки  $A_1A_2$  и  $C_1C_2$  параллельны. (*Л. Емельянов*)
- 8.3. Существуют ли попарно различные действительные числа  $a, b, c$ , такие, что  $a(b - c) = b(c - a) = c(a - b)$ ? (*В. Сендеров*)
- 8.4. Какое наименьшее количество ладей можно поставить на шахматной доске так, чтобы каждая не занятая ладьей клетка находилась под боем хотя бы трех из них? (Ладья бьет клетку, если клетка находится с ней в одной горизонтали или вертикали и между ними нет занятых клеток.) (*М. Мурашкин*)
- 8.5. Числа  $a, b, c$  и  $d$  таковы, что  $(a - b)(b - c)(c - d) \times (d - a) < 0$ . Число  $b$  — наибольшее из чисел  $a, b, c$  и  $d$ . Определите, какое из чисел  $a, b, c$  и  $d$  третье по величине. (*И. Рубанов*)
- 8.6. Лестница насчитывает 2008 ступенек, на каждой из них написано одно из чисел  $-2, -1, 1$  или  $2$ . Число на ступеньке указывает, на сколько ступенек следует с нее шагнуть (вверх, если число положительное, или вниз, если число отрицательное). Известно, что с какой бы ступеньки ни начинался путь, он не выйдет за пределы лестницы и обязательно пройдет через верх-

ную ступеньку. Может ли сумма всех чисел на ступеньках быть отрицательной? (М. Мурашкин)

- 8.7. На сторонах треугольника  $ABC$  отмечены точки:  $L$  на  $BC$ ,  $M$  на  $CA$  и  $N$  на  $AB$ . Через точку  $L$  проведены две прямые:  $l_c \parallel AB$  и  $l_b \parallel AC$ . Аналогично через точку  $M$  проведены прямые  $m_a \parallel BC$  и  $m_c \parallel AB$ , а через точку  $N$  — прямые  $n_b \parallel AC$  и  $n_a \parallel BC$ . Докажите, что если прямые  $m_a$ ,  $n_b$  и  $l_c$  пересекаются в одной точке, то прямые  $m_c$ ,  $n_a$  и  $l_b$  образуют треугольник, равный треугольнику  $ABC$ . (Л. Емельянов)
- 8.8. На окружности отмечены  $2n \geq 6$  точек, делящих ее на равные дуги. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. Ход состоит в том, чтобы обвести кружочками пару диаметрально противоположных точек и еще одну точку. Дважды обводить одну и ту же точку нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию? (Дайте ответ в зависимости от  $n$ .) (И. Рубанов)

## ▼ 9 класс

- 9.1. 99 последовательных натуральных чисел разбили произвольным образом на 33 группы по 3 числа, в каждой группе посчитали произведение чисел, у каждого из 33 полученных произведений посчитали сумму цифр. Могут ли все полученные суммы цифр быть равными? (Н. Агаханов)
- 9.2. Ненулевые числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $a^2(b + c - a) = b^2(c + a - b) = c^2(a + b - c)$ . Докажите, что  $a = b = c$ . (В. Сендеров)
- 9.3. Трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  описана около окружности. Известно, что  $\angle BCD = 2\angle BAD$ . Найдите отношение  $\frac{AB}{BC}$ . (М. Мурашкин)
- 9.4. Какое наименьшее количество ладей можно поставить на шахматной доске так, чтобы каждая не занятая ладьей клетка находилась под боем хотя бы трех из них? (Ладья бьет клетку, если клетка находится с ней в одной горизонтали или вертикали и между ними нет занятых клеток.) (М. Мурашкин)
- 9.5. Каждый из пассажиров автобуса получил билет с шестизначным номером, причем все номера билетов — последовательные числа. Какое наибольшее количество пассажиров могло ехать в автобусе, если ровно у  $\frac{1}{12}$  из них в номере билета есть цифра 7? (М. Мурашкин)

- 9.6. Лестница насчитывает 2008 ступенек, на каждой из них написано одно из чисел  $-2$ ,  $-1$ ,  $1$  или  $2$ . Число на ступеньке указывает, на сколько ступенек следует с нее шагнуть (вверх, если число положительное, или вниз, если число отрицательное). Известно, что с какой бы ступеньки ни начинался путь, он не выйдет за пределы лестницы и обязательно пройдет через верхнюю ступеньку. Может ли сумма всех чисел на ступеньках быть отрицательной? (*М. Мурашкин*)
- 9.7. На сторонах треугольника  $ABC$  отмечены шесть точек:  $C_1$  и  $C_2$  на  $AB$ ,  $A_1$  и  $A_2$  на  $BC$ ,  $B_1$  и  $B_2$  на  $CA$ . Известно, что  $A_1B_2 \parallel AB$ ,  $B_1C_2 \parallel BC$  и  $C_1A_2 \parallel AC$ . Докажите, что треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  равновелики. (*Л. Емельянов*)
- 9.8. Каждое натуральное число от  $1$  до  $n$  домножили на некоторую степень двойки с неотрицательным целым показателем, после чего все числа сложили. Полученная сумма также оказалась степенью двойки. При каких  $n$  такое возможно? (*М. Мурашкин, А. Кришеник*)

## ▼ 10 класс

- 10.1. 72 последовательных натуральных числа разбили произвольным образом на 18 групп по 4 числа, в каждой группе посчитали произведение чисел, у каждого из 18 полученных произведений посчитали сумму цифр. Могут ли все полученные суммы цифр быть равными? (*Н. Агаханов*)
- 10.2. На плоскости расставлены 200 точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Каждая точка помечена числом  $1$ ,  $2$  или  $3$ , после этого проведены все отрезки, соединяющие пары точек, помеченных различными числами. Каждый отрезок помечен числом ( $1$ ,  $2$  или  $3$ ), отличным от чисел в его концах. В результате оказалось, что каждое из трех чисел написано на плоскости ровно по  $n$  раз. Найдите  $n$ . (*П. Кожевников*)
- 10.3. На диаметре  $AB$  окружности  $\omega$  выбрана точка  $C$ . На отрезках  $AC$  и  $BC$  как на диаметрах построены окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. Прямая  $l$  пересекает окружность  $\omega$  в точках  $A$  и  $D$ , окружность  $\omega_1$  — в точках  $A$  и  $E$ , а окружность  $\omega_2$  — в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что  $MD = NE$ . (*П. Кожевников*)
- 10.4. У трехчлена  $x^2 - ax + b$  коэффициенты  $a$  и  $b$  — натуральные числа, а десятичная запись одного из корней начинается с  $2,008\dots$ . Найдите наименьшее возможное значение  $a$ . (*И. Богданов*)

- 0.5. Каждый пассажир автобуса получил билет с шестизначным номером, причем все номера билетов — последовательные числа. Какое наибольшее количество пассажиров могло поехать в автобусе, если ровно у  $\frac{1}{12}$  из них в номере билета есть цифра 7? (*М. Мурашкин*)
- 0.6. Натуральное число  $n$  обладает следующим свойством: для любых натуральных  $a$  и  $b$  число  $(a + b)^n - a^n - b^n$  делится на  $n$ . Докажите, что число  $a^n - a$  делится на  $n$  для любого натурального  $a$ . (*В. Сендеров*)
- 0.7. Пусть  $P$  — произвольная точка на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ . На сторонах  $AB$  и  $CB$  взяты точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $AM = AP$  и  $CN = CP$ . Перпендикуляры, проведенные в точках  $M$  и  $N$  к сторонам  $AB$  и  $BC$  соответственно, пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что  $\angle QIB = 90^\circ$ , где  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . (*Т. Емельянова*)
- 0.8. Может ли ладья обойти все клетки доски  $10 \times 10$ , побывав на каждой клетке ровно по разу, чередуя ходы длиной в одну и в две клетки? (Считается, что, делая ход в две клетки, ладья не проходит по промежуточной клетке.) (*А. Грибалко*)

## ▼ 11 класс

- 1.1. Натуральные числа  $n$  и  $k$ ,  $n > k$ , таковы, что число  $\frac{n!}{k!}$  оканчивается на 2008. Докажите, что число  $n$  также оканчивается на 2008. (Через  $n!$  обозначено произведение всех целых чисел от 1 до  $n$ :  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ .) (*Н. Агаханов*)
- 11.2. На диаметре  $AB$  окружности  $\omega$  выбрана точка  $C$ . На отрезках  $AC$  и  $BC$  как на диаметрах построены окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. Прямая  $l$  пересекает окружность  $\omega$  в точках  $A$  и  $D$ , окружность  $\omega_1$  — в точках  $A$  и  $E$ , а окружность  $\omega_2$  — в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что  $MD = NE$ . (*П. Кожевников*)
- 11.3. На плоскости даны  $n$  векторов, длина каждого не превосходит 1. Докажите, что можно выбрать  $\alpha$  и повернуть все векторы на угол  $\alpha$  (некоторые — по часовой стрелке, а некоторые — против) так, чтобы длина суммы векторов нового набора не превосходила 1. (*Д. Терешин*)
- 11.4. Пусть  $m$  — количество решений уравнения  $\sin x = ax + b$ , а  $n$  — количество решений уравнения  $x = a \cos x + b$  ( $a$  и  $b$  — положительные действительные числа, причем  $a \neq 1$ ). Какие значения может принимать выражение  $mn - m - n$ ? (*И. Богданов*)

- 11.5. Назовем тройку положительных чисел  $(a, b, c)$  *удобной*, если система неравенств  $ax^2 < bx + c$ ,  $bx^2 < cx + a$ ,  $cx^2 < ax + b$  имеет ровно два целых решения. Докажите, что тройка  $(a, b, c)$  *удобна* тогда и только тогда, когда  $a, b, c$  — длины сторон некоторого треугольника. (Н. Агаханов)
- 11.6. Найдите все такие пары натуральных чисел  $n, k$ , что  $n > 1$ ,  $k$  нечетно, и  $(n - 1)! + 1 = n^k$ . (В. Сендеров)
- 11.7. Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Сфера  $S$  с центром на диагонали  $AC_1$  пересекает ребра  $AB, AD, AA_1$  в точках  $K, L, M$  соответственно, а ребра  $C_1 D_1, C_1 B_1, C_1 C$  в точках  $K_1, L_1, M_1$  соответственно. Оказалось, что плоскости  $KLM$  и  $K_1 L_1 M_1$  параллельны, но треугольники  $KLM$  и  $K_1 L_1 M_1$  не равны. Докажите, что диагональ  $AC_1$  образует равные углы с ребрами  $AB, AD$  и  $AA_1$ . (П. Кожевников)
- 11.8. Шахматную доску разбили на двухклеточные прямоугольники. Каждый из них требуется закрасить каким-нибудь цветом так, чтобы любые две клетки доски, отстоящие друг от друга на ход коня, были раскрашены в разные цвета. Какого наименьшего числа цветов заведомо хватит для этого? (Ход коня состоит в перемещении на две клетки по горизонтали и одну по вертикали или же на две клетки по вертикали и одну по горизонтали.) (А. Грибалко)

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

### ▼ 8 класс

- 8.1. Ответ: 1 878 787.

Будем складывать числа  $A$  и  $B$  столбиком. Пронумеруем разряды справа налево. Так как последние цифры чисел  $A$  и  $B$  разной четности, то последняя цифра числа  $C$  нечетная. При этом из первого разряда обязан произойти перенос во второй разряд, иначе с конца цифра в числе  $C$  также была бы нечетной. Аналогично из третьего и пятого разрядов также должен произойти перенос в четвертый и шестой разряды. Заметим, что ни в одном из этих разрядов в числе  $C$  девятка стоять не может, так как единственный способ получить одновременно и девятку, и перенос в следующий разряд — это сложить две девятки и единицу, пришедшую из предыдущего разряда; однако в числе  $A$  нет девяток.

Если число  $C$  шестизначное, то оно не превосходит 999 999. Если же оно семизначное, то его седьмая

(с конца) цифра может быть только единицей. Значит, его четные цифры четные и не превышают 8, а нечетные по вышесказанному не больше 7. Таким образом, число  $C$  не может превышать 1 878 787. Это возможно, например, так:  $1\,878\,787 = 886\,868 + 991\,919$ .

- 8.2. Доказательство.** Обозначим середину стороны  $AC$  через  $K$ , а точку пересечения  $KA_2$  с  $BC$  через  $P$  (рис. 87). В прямоугольном треугольнике  $AA_1C$  отрезок  $KP$  — средняя линия, так как он проходит через середину  $AC$  и параллелен  $AA_1$  (поскольку  $KP \perp BC$  и  $AA_1 \perp BC$ ). Значит, прямоугольные треугольники  $PA_1A_2$  и  $PCK$  равны по двум катетам:  $A_1P = PC$  и  $KP = PA_2$ . Отсюда следует, что  $\angle PA_1A_2 = \angle PCK$ , т. е. отрезок  $A_1A_2$  параллелен стороне  $AC$ .

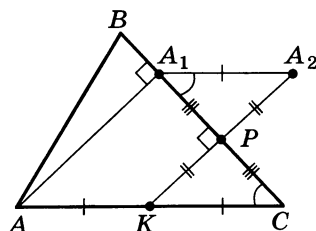


Рис. 87

Аналогично доказывается, что  $C_1C_2 \parallel AC$ . Поэтому  $A_1A_2 \parallel AC \parallel C_1C_2$ . ■

- 8.3. Ответ:** не существуют.

**Первое решение.** Обозначим  $x = a(b - c)$ ,  $y = b(c - a)$ ,  $z = c(a - b)$ . Так как  $x + y + z = 0$ , то  $x = y = z = 0$ . Значит, либо разность хотя бы в одной из скобок равна нулю, либо  $a = b = c = 0$ . В обоих случаях нашли два равных числа.

**Второе решение.** Пусть для определенности  $ab \geq ac$ ,  $ab \geq bc$ . Раскрывая скобки в равенстве  $a(b - c) = b(c - a)$ , получаем  $2ab = ac + bc$ . Значит,  $ab = ac = bc$ . Если все три числа  $ab$ ,  $ac$  и  $bc$  ненулевые, то сразу получаем  $a = b = c$ . Иначе если  $ab = ac = bc = 0$ , то хотя бы два из чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  должны быть нулями, т. е. должны быть равны.

**Замечание.** Легко видеть, что если  $a = b \neq 0$ , то  $a = b = c$ .

- 8.4. Ответ:** 16 ладей.

**Первое решение.** Нетрудно проверить, что расстановка на рисунке 88 удовлетворяет условию. Допустим, существует такая расстановка, когда ладей меньше чем 16. Если на какой-либо горизонтали нет ни одной ладьи, то каждая из ее клеток может находиться под боем не более двух ладей. Следовательно, на одной из горизонталей (назовем ее  $H$ )

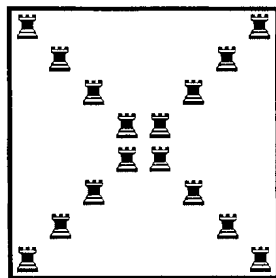


Рис. 88



должна стоять ровно одна ладья (назовем ее  $r$ ). Рассмотрим любую из семи свободных клеток на  $H$ . Сверху и снизу от нее должно находиться по ладье, поэтому ладей хотя бы  $1 + 2 \cdot 7 = 15$ . Значит, их ровно 15, причем семь из них стоят выше  $H$ , а другие семь — ниже.

На вертикали, где стоит  $r$  (назовем ее  $V$ ), больше ладей нет. Поэтому из аналогичных соображений на любой горизонтали, кроме  $H$ , стоят ровно две ладьи: одна левее  $V$ , другая правее (если их больше двух, то всего ладей уже 16). Значит, сверху от  $H$  стоит четное число ладей; но мы знаем, что их 7. Противоречие.

**Второе решение.** Приведем другое доказательство того, что меньше 16 ладей быть не может. Предположим противное. Разрежем доску на 4 квадрата  $4 \times 4$ . В одном из них будет не более трех ладей — пусть для определенности это левый верхний квадрат. Тогда в этом квадрате найдутся пустая строка и пустой столбец. Рассмотрим клетку на их пересечении. Она пуста, и ее не могут бить ладьи слева и сверху, так как столбец и строка пусты. Противоречие.

**8.5. Ответ:** третье по величине число —  $d$ .

Из условия следует, что  $a - b < 0$ ,  $b - c > 0$ . Поэтому  $(c - d)(d - a) > 0$ . Значит, либо  $c > d$  и  $d < a$ , либо  $c < d$  и  $d < a$ . Получаем в первом случае  $b > c > d > a$ , во втором случае  $b > a > d > c$ . В обоих случаях третье по величине число —  $d$ .

**Замечание.** В частности, мы показали, что при данных условиях все числа различны.

**8.6. Ответ:** может.

Например, сумма будет отрицательной, если числа на ступеньках равны (снизу вверх) 1, 2, -2, 2, -2, ..., 2, -2, -2 (на всех четных ступеньках, кроме 2008-й, написано 2, а на всех нечетных, кроме первой, написано -2). Если путь начнется со ступеньки с четным номером, то он пойдет вверх по четным ступенькам до 2008-й, а далее заикнется и не пройдет все ступеньки. Если же путь начнется со ступеньки с нечетным номером, то он пойдет по нечетным ступенькам до первой, далее пройдет через вторую и все четные, вплоть до 2008-й.

**8.7. Доказательство.** Обозначим через  $C_1$  точку пересечения  $n_a$  и  $l_b$ , а через  $A_1$  точку пересечения  $l_a$  и  $m_c$ . Пусть прямые  $m_a$ ,  $n_b$  и  $l_c$  пересекаются в точке  $P$ , а сторона  $AC$  пересекается с  $l_c$  и  $n_a$  в точках  $L_1$  и  $N_1$  соответственно (рис. 89). Четырехугольник  $C_1LCN_1$  — параллелограмм, так как  $C_1N_1 \parallel LC$  и  $C_1L \parallel N_1C$ . Значит,  $C_1L = N_1C$ .

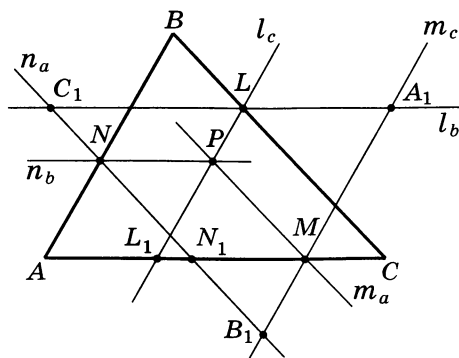


Рис. 89

Аналогично  $LA_1ML_1$  — параллелограмм, откуда  $LA_1 = L_1M$ .

Рассмотрим треугольники  $ANN_1$  и  $L_1PM$ . В них  $AN = L_1P$  (так как  $ANPL_1$  — параллелограмм), а из-за параллельности соответственных сторон треугольников имеем  $\angle ANN_1 = \angle L_1PM$  и  $\angle NAN_1 = \angle PL_1M$ . Тогда эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам, и  $AN_1 = L_1M = LA_1$ .

Получим  $C_1A_1 = C_1L + LA_1 = N_1C + AN_1 = AC$ . Теперь можно утверждать, что треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны по стороне и двум прилежащим углам. ■

**8.8. Ответ.** При  $n = 3k$  или  $n = 3k + 1$  выигрывает второй игрок, а при  $n = 3k + 2$  — первый.

В каждом случае мы приведем одну из возможных выигрышных стратегий для игрока.

Назовем обведенную точку *нечетной*, если противоположная ей не обведена. Ясно, что после каждого хода количество *нечетных* точек либо уменьшается на 1 (если игрок обвел точку, противоположную *нечетной*), либо увеличивается на 1 (в противном случае). В каждом случае выигрышная стратегия будет заключаться в уменьшении числа *нечетных* точек.

1. Приведем *стратегию второго игрока*, позволяющую ему выиграть при  $n = 3k$  или  $n = 3k + 1$ . После хода первого число *нечетных* точек нечетно, поэтому каждым своим ходом второй может уменьшить это число на 1. Тогда после каждого хода первого это число будет равно 1, а после хода второго — 0.

Покажем, что тогда второй всегда сможет сделать такой ход. Если первый уже сделал  $d$  ходов, то обведено  $6d - 3$  точек; но так как  $2n = 6k$  или  $2n = 6k + 2$ , то осталось хотя бы три необведенные точки, из которых одна *нечетная*. Значит, еще осталась пара необведенных противоположных точек, и второй всегда сможет сделать требуемый ход, а значит, выигрывает.

2. Теперь приведем *стратегию первого игрока*, позволяющую ему выиграть, если  $n = 3k + 2$ . Если после хода второго остались *нечётные* точки, то он уменьшает их число на 1, в противном случае он создаёт единственную *нечётную* точку. Тогда нетрудно видеть, что после каждого хода второго остаётся 0 или 2 *нечётные* точки, а после каждого хода первого — ровно одна. Покажем, что первый всегда сможет сделать такой ход. Если второй сделал  $d$  ходов, то обведено  $6d$  точек, а значит, осталось хотя бы 4 необведённые точки. При этом максимум две из них *нечётные*; поэтому осталась пара необведённых противоположных точек и ещё хотя бы одна необведённая, кроме них. Это и значит, что первый всегда сможет сделать ход и выигрывает.

## ▼ 9 класс

### 9.1. Ответ. Не могут.

Предположим, что это возможно и числа указанным образом разбиты на 33 тройки. Хотя бы в одной из троек присутствует число, делящееся на 9, поэтому сумма цифр хотя бы одного произведения (а значит, и всех произведений) делится на 9. Поэтому произведение чисел в любой тройке делится на 9, а следовательно, и на 3. Но среди 99 последовательных натуральных чисел ровно 33 делящихся на число 3 числа, поэтому в каждой тройке ровно одно такое число. Однако при этом 22 из них не делятся на 9, значит, и произведения в соответствующих тройках не делятся на 9. Противоречие.

**Замечание.** См. также задачу 10.1.

9.2. **Первое решение.** Первое равенство преобразуется к виду  $c(a^2 - b^2) + ab(a - b) - (a^3 - b^3) = 0$ , или  $(a - b)(c(a + b) - a^2 - b^2) = 0$ , откуда либо  $a = b$ , либо  $c(a + b) - (a^2 + b^2) = 0$ . В первом случае из второго равенства в условии задачи получаем  $a^2 + c^2 = 2ac$ ,  $(a - c)^2 = 0$ ,  $a = c$ . Значит, без ограничения общности можно рассматривать лишь случай  $c(a + b) = a^2 + b^2$ . Аналогично можно считать, что  $a(b + c) = b^2 + c^2$ ,  $b(c + a) = c^2 + a^2$ . Сложив последние три равенства, получаем  $2ab + 2bc + 2ca = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$ , или  $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$ , откуда опять же  $a = b = c$ . Утверждение задачи доказано.

**Второе решение.** Пусть  $|c| \leq |a|$ ,  $|c| \leq |b|$ . Как и выше, получаем равенство  $c(a + b) = a^2 + b^2$ .

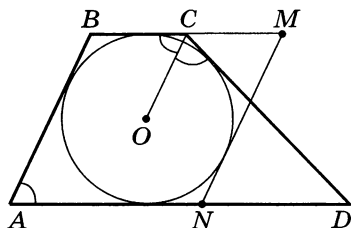
Имеем  $a^2 + b^2 = c(a + b) = ca + cb \leq |ca| + |cb| \leq a^2 + b^2$ . Отсюда  $ca = a^2$ ,  $cb = b^2$ , или  $c = a$ ,  $c = b$ , что и требовалось доказать.

**Замечание.** Школьники, знающие формулы Виета для уравнения третьей степени, могут решить эту задачу практически без вычислений. Достаточно доказать, что среди чисел  $a, b, c$  есть равные. Предположим противное. Тогда  $a, b, c$  — корни некоторого уравнения  $x^2(s - 2x) = t$ , где  $s = a + b + c$ . По формулам Виета  $a + b + c = \frac{s}{2}$ , значит,  $s = \frac{s}{2}$ ,  $s = 0$ , и  $-2a^3 = -2b^3 = -2c^3$ . Отсюда  $a = b = c$ . Противоречие.

**9.3. Ответ:**  $AB : BC = 2$ .

Обозначим через  $O$  центр окружности, вписанной в трапецию  $ABCD$  (рис. 90). Так как  $CO$  — биссектриса угла  $BCD$ , то  $\angle BCO = \frac{1}{2} \angle BCD = \angle BAD = 180^\circ - \angle ABC$ ,

откуда  $CO \parallel AB$ . Рассмотрим прямую  $MN$ , симметричную прямой  $AB$  относительно центра  $O$  ( $M$  и  $N$  — точки на прямых  $BC$  и  $AD$  соответственно). Она касается окружности и параллельна  $AB$ . Прямая  $CO$  равноудалена от сторон  $AB$  и  $MN$  параллелограмма  $ABMN$ , откуда  $BC = CM = \frac{BM}{2}$ . Параллелограмм  $ABMN$  является ромбом, так



**Рис. 90**

как описан около окружности, поэтому  $AB = BM$ , и, значит,  $\frac{AB}{BC} = \frac{BM}{BC} = 2$ .

**9.4. Ответ:** 16 ладей. См. решение задачи 8.4.

**9.5. Ответ:** 48 пассажиров.

Пусть  $k$  — число пассажиров, у которых в билете есть цифра 7. Тогда число всех пассажиров равно  $12k$ . Заметим, что среди любых десяти подряд идущих номеров есть один, содержащий семерку на конце. Значит,  $12k < 10(k + 1)$ , откуда  $2k < 10$ ,  $k < 5$ . При  $k = 4$  искомым набор номеров существует, например: 100 008, 100 009, 100 010, ..., 100 055.

**9.6. Ответ:** может. См. решение задачи 8.6.

**9.7.** Для решения будем использовать два очевидных факта.

1. Если точка  $M$  лежит на отрезке  $PQ$  и  $\frac{PM}{PQ} = x$ , то

$$\frac{QM}{PQ} = 1 - x.$$

2. Если точки  $A_1$  и  $C_1$  лежат соответственно на отрезках  $BC$  и  $AB$ , то

$$S_{A_1BC_1} = \frac{BA_1}{BA} \cdot \frac{BC_1}{BC} \cdot S_{ABC}.$$

Обозначим  $x = \frac{BA_1}{BC} = \frac{AB_2}{AC}$ ,

$$y = \frac{CB_1}{CA} = \frac{BC_2}{BA},$$

$$z = \frac{AC_1}{AB} = \frac{CA_2}{CB} \quad (\text{рис. 91}).$$

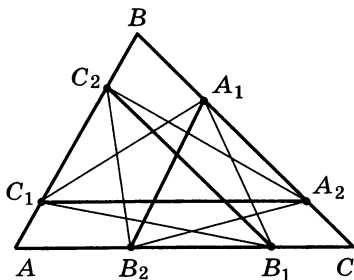


Рис. 91

Тогда  $S_{A_1BC_1} = x(1-z)S$ ,

$S_{C_1AB_1} = z(1-y)S$ ,  $S_{B_1CA_1} = y(1-x)S$ , где  $S$  — площадь треугольника  $ABC$ . Значит,

$$\begin{aligned} S_{A_1B_1C_1} &= S - S_{A_1BC_1} - S_{C_1AB_1} - S_{B_1CA_1} = \\ &= S(1 - x - y - z + xy + yz + zx). \end{aligned} \quad (*)$$

Находя аналогичным способом  $S_{A_2B_2C_2}$ , приходим к тому же выражению (\*) через  $S$  и  $x, y, z$ .

#### 9.8. Ответ: при всех натуральных $n$ .

Покажем, что можно некоторые числа домножить на  $1 = 2^0$ , а остальные — на  $2 = 2^1$  так, чтобы сумма стала степенью двойки.

Сумма всех чисел до домножения равна  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Пусть  $k$  — максимальное число, та-

кое, что  $2^k < \frac{n(n+1)}{2}$ . Тогда  $2^{k+1} \geq \frac{n(n+1)}{2} > 2^k$ , поэто-

му  $A = 2^{k+1} - \frac{n(n+1)}{2} < 2^k < \frac{n(n+1)}{2}$ . Покажем, что

можно выбрать несколько чисел из  $1, 2, \dots, n$  так, чтобы их сумма была равна  $A$ . Тогда, удвоив эти числа, мы увеличим сумму всех чисел на  $A$ , и она станет равна  $\frac{n(n+1)}{2} + A = 2^{k+1}$ , что и требовалось.

Пусть  $d$  — максимальное число, такое, что  $\frac{d(d-1)}{2} \leq A$ . Тогда  $d \leq n$ , так как  $A < \frac{n(n+1)}{2}$ . Далее,  $\frac{d(d-1)}{2} \leq A < \frac{d(d-1)}{2} + d$ , поэтому  $0 < B = \frac{d(d+1)}{2} - A \leq \frac{d(d+1)}{2} - \frac{d(d-1)}{2} = d$ . Таким образом,  $A = \frac{d(d+1)}{2} - B = (1 + 2 + \dots + d) - B$ , т. е.  $A$  есть сумма чисел от 1 до  $d$ , кроме  $B$ , что и требовалось.

## ▼ 10 класс

### 10.1. Ответ: не могут.

Предположим, что это возможно и числа указанным образом разбиты на 18 четверок. Хотя бы в одной из четверок присутствует число, делящееся на 9, поэтому сумма цифр хотя бы одного произведения (а значит, и всех произведений) делится на 9.

Поэтому произведение чисел в любой четверке делится на 9. Тогда в каждой четверке либо найдется число, делящееся на 9 (четверки 1-го типа), либо найдутся два числа, делящиеся на 3, но не делящиеся на 9 (четверки 2-го типа). Среди 72 последовательных натуральных чисел ровно 8 чисел, делящихся на 9, и ровно 16 чисел, делящихся на 3, но не делящихся на 9. Следовательно, имеется не более 8 четверок 1-го типа и не более 8 четверок 2-го типа; однако всего четверок  $18 > 8 + 8$ . Противоречие.

### 10.2. Ответ. $n = 199$ .

Пусть  $a$  точек помечены числом 1,  $b$  точек помечены числом 2 и  $c$  точек помечены числом 3. Тогда количества отрезков, помеченных числами 1, 2, 3, равны соответственно  $bc$ ,  $ca$  и  $ab$ . Получаем равенства  $n = a + bc = b + ca = c + ab$ . Отсюда  $(a + bc) - (b + ca) = (a - b)(1 - c) = 0$ . Аналогично  $(b - c)(1 - a) = (c - a)(1 - b) = 0$ .

Пусть среди чисел  $a, b, c$  нет двух чисел, равных 1. Тогда получаем, что  $a = b = c$ . Это невозможно, так как 200 не делится на 3. Если же два из чисел  $a, b, c$  равны 1, то третье равно 198; в этом случае равенства выполнены, и  $n = 199$ .

### 10.3. Так как $AB$ и $AC$ — диаметры окружностей $\omega$ и $\omega_1$ (рис. 92), то $\angle AEC = \angle ADB = 90^\circ$ . Центр $O$ окружности $\omega_2$ является серединой отрезка $BC$ . Пусть $K$ — основание перпендикуляра, опущенного из $O$ на $AD$ ;

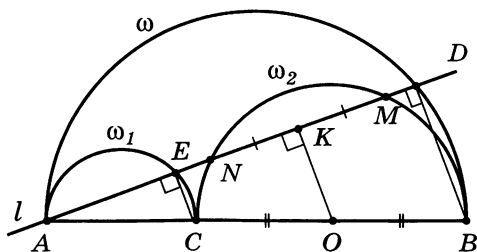


Рис. 92

тогда точка  $K$  является серединой хорды  $MN$ . С другой стороны,  $CE \parallel OK \parallel BD$ , и по теореме Фалеса точка  $K$  является серединой отрезка  $DE$ . Итак, отрезки  $MN$  и  $DE$  имеют общую середину, откуда следует утверждение задачи.

**10.4. Ответ:**  $a = 116$ .

Пусть  $x_0 = 2,008\dots$  — корень нашего уравнения. Обозначим  $\varepsilon = x_0 - 2 = 0,008\dots$ . Тогда  $0 = x_0^2 - ax_0 + b = (2 + \varepsilon)^2 - a(2 + \varepsilon) + b = (4 - 2a + b) + (4 - a)\varepsilon + \varepsilon^2$ , поэтому число  $t = -(4 - 2a + b) = (4 - a)\varepsilon + \varepsilon^2$  является целым. Тогда  $t = (4 - a)\varepsilon + \varepsilon^2 = 4\varepsilon + (\varepsilon - a)\varepsilon < 4\varepsilon < 0,04 < 1$ . Далее если  $t = 0$ , то  $(4 - a) + \varepsilon = 0$ , что невозможно, так как  $\varepsilon$  не целое. Поэтому  $t \leq -1$ , откуда  $(4 - a)\varepsilon < -1$  и  $a - 4 > \frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{0,009} > 111$ . Следовательно,  $a \geq 116$ .

Покажем, что значение  $a = 116$  возможно. Рассмотрим уравнение  $x^2 - 116x + 229 = 0$ . Оно переписывается в виде  $f(x) = (x - 2)^2 - 112(x - 2) + 1 = 0$ . Заметим, что  $f\left(2 + \frac{1}{112}\right) = \left(\frac{1}{112}\right)^2 > 0$ , а  $f(2,009) = 0,009^2 - 0,008 < 0$ . Значит, у этого уравнения есть корень  $x_0 \in \left(2 + \frac{1}{112}; 2,009\right)$ . Поскольку  $\frac{1}{112} = 0,008\dots$ , мы получаем, что  $2,008 < x_0 < 2,009$ , что и требовалось.

**Замечание.** Можно доказать, что уравнение  $x^2 - 116x + 229 = 0$  — единственное уравнение с  $a = 116$  и корнем вида  $2,008\dots$ .

**10.5. Ответ:** 48 пассажиров.

См. решение задачи 9.5.

**10.6. Доказательство.** Докажем утверждение задачи индукцией по  $a$ . База очевидна:  $1^n - 1 : n$ .

Пусть утверждение справедливо при некотором  $a = k$ , т. е.  $k^n - k : n$ . Полагая  $a = k$ ,  $b = 1$  в выражении  $(a + b)^n - a^n - b^n$ , видим, что  $(k + 1)^n - k^n - 1 : n$ . Рассмотрим сумму двух упомянутых чисел, делящихся на  $n$ :

$$(k^n - k) + ((k + 1)^n - k^n - 1) = (k + 1)^n - (k + 1) : n.$$

Таким образом, утверждение верно и при  $a = k + 1$ . Переход доказан. ■

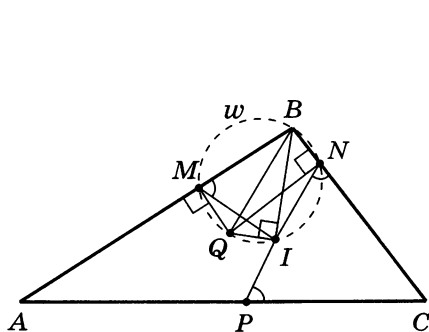
**Замечание 1.** Нетрудно доказать, что утверждение, обратное утверждению задачи, также верно.

**Замечание 2.** По малой теореме Ферма  $a^n - a : n$  при любом целом  $a$  и простом  $n$ . Однако существуют и составные числа  $n$ , для которых  $a^n - a : n$  при целом  $a$  (они называются числами Кармайкла); наименьшее из них  $n = 561$ . В 1994 году было доказано, что чисел Кармайкла существует бесконечно много.

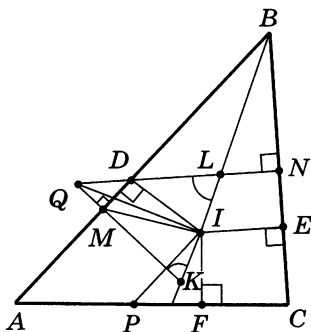
**10.7. Первое решение.** По построению точки  $M$  и  $N$  лежат на окружности  $\omega$  с диаметром  $BQ$  (рис. 93). Из симметрии относительно биссектрисы  $AI$  угла  $BAC$  следует, что  $\angle API = \angle AMI$ . Аналогично  $\angle CPI = \angle CNI$ , откуда  $\angle API = \angle BNI$  (как смежные с равными углами). Таким образом,  $\angle AMI = \angle BNI$ , следовательно, четырехугольник  $BMNI$  вписанный. Итак, точка  $I$  также лежит на окружности  $\omega$ , поэтому  $\angle QIB = 90^\circ$ .

**Второе решение.** Пусть прямые  $QM$  и  $QN$  пересекают биссектрису  $BI$  угла  $ABC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно (рис. 94).  $\angle K L Q = \angle B L N = 90^\circ - \angle I B C = 90^\circ - \angle I B A = \angle B K M = \angle L K Q$ , поэтому  $\triangle K L Q$  равнобедренный ( $KQ = LQ$ ).

Пусть  $D, E, F$  — проекции точки  $I$  на стороны  $AB, BC, CA$  соответственно. Имеем  $AD - AM = AF - AP = CP - CF = CN - CE$ , поэтому  $DM = EN$ . Далее,  $IK = \frac{DM}{\cos \angle IBA} = \frac{EN}{\cos \angle IBC} = IL$ , значит,  $QI$  — медиана равнобедренного треугольника  $KLQ$ . Следовательно,  $QI \perp KL$ , что и требовалось доказать.



**Рис. 93**



**Рис. 94**

**10.8. Ответ: не может.**

Пусть ладья обошла доску требуемым образом; занумеруем клетки числами 1, 2, ..., 100 в порядке посещения их ладьей. Раскрасим доску в два цвета



(рис. 95); при такой раскраске на доске 52 черных и 48 белых клеток. Заметим, что ладья, делая ход длиной в две клетки, меняет цвет клетки. Если первый ход ладьи был длиной в две клетки, то в каждой из 50 пар клеток (1, 2), (3, 4), (5, 6), ..., (99, 100) клетки одного цвета; если же первый ход ладьи был длиной в одну клетку, то в каждой из 49 пар (2, 3), (4, 5), (6, 7), ..., (98, 99) клетки разных цветов. В любом случае получаем, что белых клеток не менее 49 — противоречие.

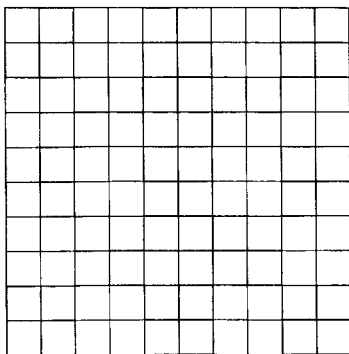


Рис. 95

## ▼ 11 класс

11.1. Покажем, что  $n = k + 1$ . Если  $n \geq k + 2$ , то  $\frac{n!}{k!}$  — это

произведение двух или более последовательных натуральных чисел, причем ни одно из них не должно делиться на 5 (так как их произведение оканчивается на 8, т. е. не делится на 5). Заметим, что последняя цифра произведения зависит только от последних цифр сомножителей.

Покажем полным перебором, что это произведение не может оканчиваться на 8. Действительно, произведение двух последовательных чисел может оканчиваться на 2 ( $1 \cdot 2, 3 \cdot 4, 6 \cdot 7, 8 \cdot 9$ ) или на 6 ( $2 \cdot 3, 7 \cdot 8$ ); произведение трех последовательных чисел может оканчиваться на 6 ( $1 \cdot 2 \cdot 3, 6 \cdot 7 \cdot 8$ ) или на 4 ( $2 \cdot 3 \cdot 4, 7 \cdot 8 \cdot 9$ ); а произведение четырех последовательных чисел может оканчиваться только на 4 ( $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ ).

Итак,  $n = k + 1$ , и тогда  $\frac{n!}{k!} = n$ , поэтому  $n$  оканчивается на 2008.

11.2. См. решение задачи 10.3.

11.3. Пусть  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  — данные векторы. Покажем, что их можно разбить на две группы так, что длины сумм векторов в группах будут различаться не более чем на 1. Пусть  $\vec{S} = \vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_n$ ,  $\vec{S}_k = \vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_k$ ,  $\vec{T}_k = \vec{S} - \vec{S}_k = \vec{a}_{k+1} + \dots + \vec{a}_n$ . Обозначим  $s_k = |\vec{S}_k|$ ,  $t_k = |\vec{T}_k|$ . Ясно,

что  $s_0 = 0 \leq |\vec{S}| = t_0$ , но  $s_n = |\vec{S}| \geq 0 = t_n$ . Значит, найдется такое  $k$ , что  $s_k \leq t_k$ , но  $s_{k+1} \geq t_{k+1}$ .

Заметим, что  $|s_{k+1} - s_k|$  и  $|t_k - t_{k+1}|$  не превосходят  $|\vec{a}_{k+1}| \leq 1$ . Значит,  $(t_k - s_k) + (s_{k+1} - t_{k+1}) \leq 2$ , т. е. либо  $1 \geq t_k - s_k \geq 0$ , либо  $1 \geq s_{k+1} - t_{k+1} \geq 0$ . В любом случае требуемое разбиение найдено.

Пусть  $\vec{S}'$  и  $\vec{T}'$  — суммы векторов в полученных группах, и пусть угол между этими суммами равен  $180^\circ - 2\alpha$ . Тогда, повернув векторы одной из групп по часовой стрелке, а векторы другой — против часовой стрелки на угол  $\alpha$ , можно добиться того, что угол между суммами новых векторов будет равен  $180^\circ$ . Тогда сумма полученных векторов будет иметь длину

$$||\vec{S}'| - |\vec{T}'|| \leq 1,$$

что и требовалось.

#### 11.4. Ответ: $-1$ .

Пусть  $a > 1$ . Рассмотрим функцию  $f(x) = \sin x - (ax + b)$ ; у нее по условию  $m$  корней. Тогда  $f'(x) = \cos x - a < 0$  при любом  $x$ . Следовательно, функция  $f(x)$  монотонна и потому имеет не больше одного корня. В то же время, подставляя  $x_{1,2} = \frac{-b \mp 1}{a}$ , получаем, что в

этих точках  $f(x)$  принимает значения разных знаков  $f(x_{1,2}) = \sin x_{1,2} \pm 1$ . Значит, она имеет корень, откуда  $m = 1$ .

Аналогично если  $a < 1$ , то функция  $g(x) = x - (a \cos x + b)$  монотонна, поэтому число ее корней  $n$  не превосходит 1. С другой стороны, при  $x_{1,2} = b \pm a$  функция принимает значения разных знаков  $g(x_{1,2}) = a(\pm 1 - \cos x_{1,2})$ , поэтому  $n \geq 1$ . Значит, в этом случае  $n = 1$ .

Итак, мы получили, что при любом значении  $a$  либо  $m = 1$ , либо  $n = 1$ . Следовательно, требуемое значение равно  $mn - m - n = (m - 1)(n - 1) - 1 = 0 - 1 = -1$ .

**Замечание.** Если  $a = 1$ , то обе функции также монотонны, и  $m = n = 1$ . Но этот факт требует чуть более тщательного обоснования.

**11.5. Доказательство.** Складывая неравенства системы, получаем  $(a + b + c)x^2 < (a + b + c)(x + 1)$ , т. е.  $(a + b + c) \times (x^2 - x - 1) < 0$ , откуда  $x^2 - x - 1 < 0$ . Это неравенство имеет только два целочисленных решения 0 и 1. Значит, исходная система всегда имеет не более двух целочисленных решений, и этими решениями могут быть только числа 0 и 1. Подставляя их в систему, получаем:

1) из  $x = 0$ :  $0 < c$ ,  $0 < b$ ,  $0 < a$ ;

2) из  $x = 1$ :  $a < b + c$ ,  $b < a + c$ ;  $c < a + b$ , что выполняется для сторон треугольника.

Обратно если  $a, b, c$  — длины сторон некоторого треугольника, то, как легко проверить, числа  $x = 0$  и  $x = 1$  являются решениями системы.

Утверждение доказано. ■

11.6. Ответ:  $n = 2, k = 1$  и  $n = 3, k = 1$ .

Если  $n = 2$  или  $n = 3$ , то, очевидно,  $k = 1$ .

Пусть  $n > 3$ . Разделим обе части равенства  $(n - 1)! = n^k - 1$  на  $n - 1$ :

$$(n - 2)! = n^{k-1} + \dots + 1.$$

Поскольку  $n - 2 > 1$ , левая часть четна. Если  $n$  нечетно, то справа стоит сумма  $k$  нечетных слагаемых; так как  $k$  нечетно, то нечетна и их сумма. При четном  $n$  нечетность такой суммы очевидна (впрочем, из условия сразу следует, что  $n$  нечетно при  $n > 2$ ). Таким образом, при  $n > 3$  левая и правая части последнего равенства имеют разную четность; следовательно, в этом случае решений нет.

**Замечание.** Как показывает пример  $n = 5, k = 2$ , при четных значениях  $k$  решения тоже возможны.

11.7. Пусть  $O$  — центр  $S$ , а  $T$  и  $T_1$  — центры описанных окружностей треугольников  $KLM$  и  $K_1L_1M_1$  (рис. 96). Тогда  $OT \perp (KLM)$ ,  $OT_1 \perp (K_1L_1M_1)$ , поэтому точки  $O, T$  и  $T_1$  лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскостям  $(KLM)$  и  $(K_1L_1M_1)$ .

В пирамидах  $AKLM$  и  $C_1K_1L_1M_1$  соответствующие грани параллельны, но эти пирамиды не равны. Значит, существует гомотетия, переводящая одну из этих пирамид в другую. Обозначим центр этой гомотетии через  $F$ . Заметим, что  $OK = OK_1$ , а  $FK : FK_1 = KL : K_1L_1 \neq 1$ , т. е. точки  $O$  и  $F$  различны. Так как точки  $A$  и  $T$  при гомотетии переходят соответственно в точки  $C_1$  и  $T_1$ , то точка  $F$  лежит на прямых  $AC_1$  и  $TT_1$ .

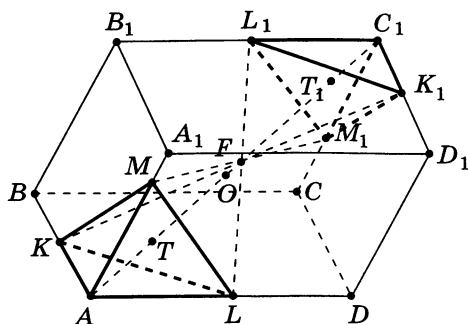


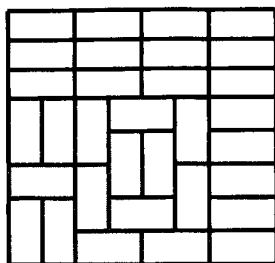
Рис. 96

Но точка  $O$  также лежит на этих прямых; значит, прямые  $AC_1$  и  $TT_1$  совпадают, и  $AT \perp (KLM)$ .

Поскольку  $T$  — центр описанной окружности треугольника  $KLM$ , имеем  $TK = TL = TM$ , и прямоугольные треугольники  $ATK$ ,  $ATL$  и  $ATM$  равны по двум катетам. Поэтому  $\angle TAK = \angle TAL = \angle TAM$ , что и требовалось.

**11.8. Ответ: 6 цветов.**

Будем называть двухклеточные прямоугольники, на которые разбита доска, *доминошками*. Рассмотрим разбиение, показанное на рисунке 97. В отмеченном фрагменте любые две *доминошки* содержат клетки, отстоящие на ход коня. Следовательно, чтобы наверняка раскрасить доску требуемым образом, понадобится не меньше 6 цветов.



**Рис. 97**

Докажем, что это количество является достаточным. Начнем с раскраски вертикальных доминошек. Пронумеруем все вертикали доски по порядку и разобьем их на 3 группы по остаткам от деления номеров на 3. Тогда все доминошки, находящиеся на вертикалях одной группы, можно раскрасить в один цвет. Действительно, если две клетки отстоят на ход коня, то они находятся либо на соседних вертикалях, либо через одну вертикаль. Поэтому при такой раскраске никакие две клетки, раскрашенные в один цвет, не будут отстоять на ход коня. Раскрасив аналогичным образом горизонтальные доминошки в 3 других цвета, мы используем в общей сложности 6 цветов и получим требуемую раскраску.

## IV ЭТАП (ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ОКРУЖНОЙ)

### УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

#### ▼ 9 класс

- 9.1.** Числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2008$  и  $a \neq b$ . Найдите значение выражения  $c^2(a+b)$ . (*В. Сендеров*)
- 9.2.** В клетках квадрата  $5 \times 5$  изначально были записаны нули. Каждую минуту Вася выбирал две клетки с общей стороной и либо прибавлял по единице к числам в них, либо вычитал из них по единице. Через некоторое время оказалось, что суммы чисел во всех строках

и столбцах равны. Докажите, что это произошло через четное число минут. (И. Богданов)

- 9.3. Дан выпуклый шестиугольник  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ , все стороны которого равны. Каждую его вершину отразили симметрично относительно прямой, проходящей через две соседние вершины. Полученные точки обозначили через  $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5$  и  $P'_6$  соответственно. Докажите, что треугольники  $P'_1P'_3P'_5$  и  $P'_2P'_4P'_6$  равны. (Л. Емельянов)
- 9.4. Даны положительные рациональные числа  $a, b$ . Один из корней трехчлена  $x^2 - ax + b$  — рациональное число, в несократимой записи имеющее вид  $\frac{m}{n}$ . Докажите, что знаменатель хотя бы одного из чисел  $a$  и  $b$  (в несократимой записи) не меньше  $n^{\frac{2}{3}}$ . (И. Богданов)
- 9.5. Дано натуральное число  $n > 1$ . Для каждого делителя  $d$  числа  $n + 1$  Петя разделил число  $n$  на  $d$  с остатком и записал на доску неполное частное, а в тетрадь — остаток. (Например, при делении числа 17 на 6,  $17 = 6 \cdot 2 + 5$ , т. е. неполное частное равно 2, а остаток — 5.) Докажите, что наборы чисел на доске и в тетради совпадают. (С. Берлов)
- 9.6. Дан квадратный трехчлен  $f(x) = x^2 + ax + b$ . Известно, что для любого действительного числа  $x$  существует действительное число  $y$ , такое, что  $f(y) = f(x) + y$ . Найдите наибольшее возможное значение  $a$ . (Д. Терешин)
- 9.7. Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $AB > BC$ . Касательная к его описанной окружности в точке  $B$  пересекает прямую  $AC$  в точке  $P$ . Точка  $D$  симметрична точке  $B$  относительно точки  $P$ , а точка  $E$  симметрична точке  $C$  относительно прямой  $BP$ . Докажите, что четырехугольник  $ABED$  вписанный. (В. Филимонов)
- 9.8. 300 бюрократов разбиты на три комиссии по 100 человек. Любые два бюрократа либо знакомы друг с другом, либо незнакомы. Докажите, что найдутся два таких бюрократа из разных комиссий, что в третьей комиссии есть либо 17 человек, знакомых с обоими, либо 17 человек, незнакомых с обоими. (С. Берлов, М. Мурашкин)

## ▼ 10 класс

- 10.1. Числа  $a, b, c$  таковы, что  $a^2(b + c) = b^2(a + c) = 2008$  и  $a \neq b$ . Найдите значение выражения  $c^2(a + b)$ . (В. Сендеров)

- 10.2. На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  найдены такие точки  $M$  и  $N$ , отличные от вершин, что  $MC = AC$  и  $NB = AB$ . Точка  $P$  симметрична точке  $A$  относительно прямой  $BC$ . Докажите, что  $PA$  является биссектрисой угла  $MPN$ . (*А. Грибалко*)
- 10.3. В очереди к стоматологу стоят 30 ребят: мальчиков и девочек. Часы на стене показывают 8:00. Как только начинается новая минута, каждый мальчик, за которым стоит девочка, пропускает ее вперед. Докажите, что перестановки в очереди закончатся до 8:30, когда откроется дверь кабинета. (*М. Мурашкин*)
- 10.4. Последовательность  $(a_n)$  задана условиями  $a_1 = 1\,000\,000$ ,  $a_{n+1} = n \left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor + n$ . Докажите, что в ней можно выделить бесконечную подпоследовательность, являющуюся арифметической прогрессией. (*М. Мурашкин*)
- 10.5. На острове живут 100 рыцарей и 100 лжецов, у каждого из них есть хотя бы один друг. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды утром каждый житель произнес либо фразу «Все мои друзья — рыцари», либо фразу «Все мои друзья — лжецы», причем каждую из фраз произнесли ровно 100 человек. Найдите наименьшее возможное число пар друзей, один из которых рыцарь, а другой — лжец. (*М. Мурашкин*)
- 10.6. По кругу расставлены красные и синие числа. Каждое красное число равно сумме соседних чисел, а каждое синее — полусумме соседних чисел. Докажите, что сумма красных чисел равна нулю. (*И. Богданов*)
- 10.7. На бесконечной в обе стороны ленте бумаги выписаны все целые числа, каждое ровно по одному разу. Могло ли оказаться, что между любыми двумя числами не стоит их среднее арифметическое? (*Д. Храмов, Л. Емельянов, И. Богданов, С. Волченков*)
- 10.8. Вписанная в треугольник  $ABC$  окружность  $\omega$  касается сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Пусть  $P$  — произвольная точка на большей дуге  $DE$  окружности  $\omega$ ,  $F$  — точка, симметричная точке  $A$  относительно прямой  $DP$ ,  $M$  — середина отрезка  $DE$ . Докажите, что угол  $FMP$  прямой. (*Д. Скробот*)

## ▼ 11 класс

- 11.1. Даны два квадратных трехчлена, имеющие корни. Известно, что если в них поменять местами коэффициенты при  $x^2$ , то получатся трехчлены, не имеющие корней.

Докажите, что если в исходных трехчленах поменять местами коэффициенты при  $x$ , то получатся трехчлены, имеющие корни. (*Н. Агаханов, И. Богданов*)

- 11.2. По окружности отметили 40 красных, 30 синих и 20 зеленых точек. На каждой дуге между соседними красной и синей точками поставили цифру 1, на каждой дуге между соседними красной и зеленой — цифру 2, а на каждой дуге между соседними синей и зеленой — цифру 3. (На дугах между одноцветными точками поставили 0.) Найдите максимальную возможную сумму поставленных чисел. (*Н. Агаханов, И. Богданов, П. Кожевников*)

- 11.3. Последовательность  $(a_n)$  задана условиями  $a_1 = 1\,000\,000$ ,  $a_{n+1} = n \left[ \frac{a_n}{n} \right] + n$ . Докажите, что в ней можно выделить бесконечную подпоследовательность, являющуюся арифметической прогрессией. (*М. Мурашкин*)

- 11.4. Вписанная окружность  $\omega$  треугольника  $ABC$  касается его сторон  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  в точках  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  соответственно. Точки  $K$  и  $L$  на окружности  $\omega$  таковы, что  $\angle AKB' + \angle BKA' = \angle ALB' + \angle BLA' = 180^\circ$ . Докажите, что прямая  $KL$  равноудалена от точек  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . (*И. Богданов, И. Макаров*)

- 11.5. На острове живут 100 рыцарей и 100 лжецов, у каждого из них есть хотя бы один друг. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды утром каждый житель произнес либо фразу «Все мои друзья — рыцари», либо фразу «Все мои друзья — лжецы», причем каждую из фраз произнесли ровно 100 человек. Найдите наименьшее возможное число пар друзей, один из которых рыцарь, а другой — лжец. (*М. Мурашкин*)

- 11.6. На диагонали  $BD$  вписанного четырехугольника  $ABCD$  выбрана такая точка  $K$ , что  $\angle AKB = \angle ADC$ . Пусть  $I$  и  $I'$  — центры вписанных окружностей треугольников  $ACD$  и  $ABK$  соответственно. Отрезки  $II'$  и  $BD$  пересекаются в точке  $X$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $X$ ,  $I$ ,  $D$  лежат на одной окружности. (*А. Гаврилюк*)

- 11.7. Числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  таковы, что  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$  и
- $$\frac{x_1}{\sqrt{1}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 1.$$

Докажите, что  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$ . (*М. Исаев*)

- 11.8. Имеются три комиссии бюрократов. Известно, что для каждой пары бюрократов из разных комиссий среди членов оставшейся комиссии есть ровно 10 бюрократов

тов, которые знакомы с обоими, и ровно 10 бюрократов, которые незнакомы с обоими. Найдите общее число бюрократов в комиссиях. (М. Мурашкин, С. Берлов, И. Богданов)

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### ▼ 9 класс

#### 9.1. Ответ: 2008.

Имеем  $a^2(b+c) - b^2(a+c) = ab(a-b) + (a^2 - b^2)c = (a-b)(ab+ac+bc) = 0$ . Так как  $a \neq b$ , получаем  $ab+ac+bc=0$ . Домножая равенство на  $a-c$ , имеем  $(a-c)(ac+ab+bc) = ac(a-c) + (a^2 - c^2)b = a^2(b+c) - c^2(a+b) = 0$ . Отсюда  $c^2(a+b) = a^2(b+c) = 2008$ .

9.2. **Доказательство.** Назовем ход Васи *горизонтальным*, если он выбирал клетки, соседние по горизонтали, и *вертикальным* в противном случае. Рассмотрим изменение суммы чисел во втором и четвертом столбцах. При любом *вертикальном* ходе четность этой суммы не менялась, а при любом *горизонтальном* — менялась. Так как вначале эта сумма равна нулю, а в конце она четна (так как она равна удвоенной сумме в столбце), то *горизонтальных* ходов было сделано четное число. Аналогично количество *вертикальных* ходов тоже четно. Таким образом, четное число ходов по одной минуте на каждый дает четное число минут. ■

9.3. **Первое решение.** Обозначим углы шестиугольника при вершинах  $P_1, \dots, P_6$  через  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ , тогда  $\alpha_1 + \dots + \alpha_6 = 720^\circ$ . Рассмотрим четырехугольник  $P_2P_3P_4P'_3$ . Все его стороны равны, поэтому он является ромбом. Аналогично ромбом является четырехугольник  $P_4P_5P_6P'_5$ . Поэтому  $\angle P_3P_4P'_3 = \angle 180^\circ - \angle P_2P_3P_4 = 180^\circ - \alpha_3$  и аналогично  $\angle P_5P_4P'_5 = 180^\circ - \alpha_5$ . Значит,  $\angle P'_3P_4P'_5 = |\angle P_3P_4P'_5 - \angle P_3P_4P'_3 - \angle P_5P_4P'_5| = |\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - 360^\circ|$ . Аналогично  $\angle P'_2P_1P'_6 = |\alpha_6 + \alpha_1 + \alpha_2 - 360^\circ| = |(720^\circ - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5) - 360^\circ| = \angle P'_3P_4P'_5$ . Значит, треугольники  $P'_2P_1P'_6$  и  $P'_3P_4P'_5$  равны по двум сторонам ( $P'_2P_1 = P_1P'_6 = P'_3P_4 = P_4P'_5$ ) и углу между ними (рис. 98), откуда  $P'_2P'_6 = P'_5P'_3$ .

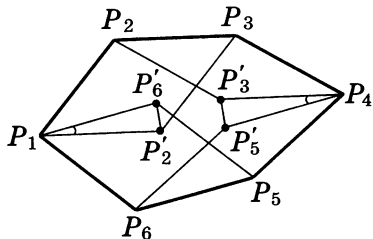


Рис. 98



Аналогично получаем  $P_2P_4' = P_5P_1'$  и  $P_4P_6' = P_1P_3'$ . Значит, треугольники  $P_2P_4'P_6'$  и  $P_1P_3'P_5'$  равны по трем сторонам.

**Второе решение.** Как и в первом решении, заметим, что четырехугольники  $P_3P_4P_5P_4'$  и  $P_4P_5P_6P_5'$  являются ромбами. Значит,  $\overrightarrow{P_3P_4'} = \overrightarrow{P_4P_5} = \overrightarrow{P_5P_6'}$ , четырехугольник  $P_3P_4'P_6P_5'$  является параллелограммом, и середины отрезков  $P_3P_6$  и  $P_4'P_5'$  совпадают (рис. 99). Аналогично получаем, что совпадают середины отрезков  $P_3P_6$  и  $P_1'P_2'$ . Следовательно, отрезки  $P_1'P_2'$  и  $P_4'P_5'$  имеют общую середину (совпадающую с серединой  $P_3P_6$ ), четырехугольник  $P_4'P_2'P_5'P_1'$  является параллелограммом, и  $P_5'P_1' = P_2'P_4'$ .

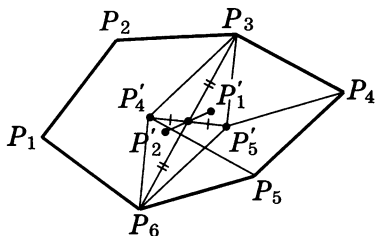


Рис. 99

Аналогично получаем  $P_3P_5' = P_6'P_2'$  и  $P_1'P_3' = P_4'P_6'$ . Значит, треугольники  $P_1'P_3'P_5'$  и  $P_2'P_4'P_6'$  равны по трем сторонам.

9.4. Пусть  $a = \frac{k}{d}$ ,  $b = \frac{l}{f}$ . Мы докажем, что  $d^2f : n^2$ , откуда

$d^2f \geq n^2$  и одно из чисел  $d$  и  $f$  не меньше  $n^{\frac{2}{3}}$ .

Пусть некоторое простое число  $p$  входит в разложение числа  $n$  на простые множители в степени  $\alpha$ . В выражении

$$\frac{m^2}{n^2} - \frac{k}{d} \frac{m}{n} + \frac{l}{f} = 0$$

число  $p$  входит в разложение знаменателя первой дроби в степени  $2\alpha$ . Если в разложениях обоих остальных знаменателей число  $p$  входит в меньших степенях, то итоговая дробь не может оказаться целым числом. Значит, либо  $dn$ , либо  $f$  делится на  $p^{2\alpha}$ , т. е. либо  $d$  делится на  $p^\alpha$ , либо  $f$  делится на  $p^{2\alpha}$ . В любом случае число  $d^2f$  делится на  $p^{2\alpha}$ . Значит, если  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_i^{\alpha_i}$ , то  $d^2f : p_1^{2\alpha_1} \dots p_i^{2\alpha_i} = n^2$ , что и требовалось.

9.5. Рассмотрим произвольный делитель  $d$  числа  $n + 1$ ; пусть  $n + 1 = df$ . Тогда  $n = (n + 1) - 1 = df - 1 + d - d = (f - 1)d + (d - 1)$ , где  $0 \leq d - 1 < d$ , т. е. числа  $f - 1$  и  $d - 1$  являются неполным частным и остатком при делении  $n$  на  $d$ . Значит, на доске будут выписаны все числа вида  $d - 1$ , а в тетради — все числа вида  $\frac{n + 1}{d} - 1$ , где  $d$  — делитель числа  $n + 1$ . Но когда  $d$  про-

бегают все делители числа  $n + 1$ , то число  $\frac{n + 1}{d}$  также пробегает все его делители, поэтому и на доске, и в тетради будут выписаны все делители числа  $n + 1$ , уменьшенные на 1.

**9.6. Ответ:**  $a = \frac{1}{2}$ .

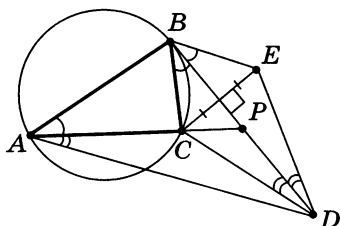
Из условия следует, что квадратное уравнение  $f(y) - y - f(x) = 0$  разрешимо относительно  $y$  при любом значении  $x$ . Подставив  $x = -\frac{a}{2}$ , получаем уравне-

ние  $y^2 + (a-1)y + \frac{a^2}{4}$ , дискриминант которого  $D = (a-1)^2 - a^2 = 1 - 2a \geq 0$ , откуда  $a \leq \frac{1}{2}$ .

С другой стороны, если  $a = \frac{1}{2}$ , то при любом  $x$  можно положить  $y = -x$ . Тогда имеем  $f(y) - y - f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{2}x + b\right) + x - \left(x^2 + \frac{1}{2}x + b\right) = 0$ , что и требовалось. (Также подходит  $y = x + \frac{1}{2}$ .)

**Замечание.** Легко понять, что при значении  $x = -\frac{a}{2}$  достигается минимум дискриминанта трехчлена  $f(y) - y - f(x)$ . Поэтому если при  $x = -\frac{a}{2}$  он неотрицателен, то он неотрицателен всегда.

**9.7.** Так как  $PB$  — касательная, то  $\angle BAC = \angle PBC$  (рис. 100). Следовательно,  $\triangle PBC \sim \triangle PAB$  по двум углам, и  $\frac{PB}{PC} = \frac{PA}{PB}$ . Так как  $PB = PD$ , то  $\frac{PD}{PC} = \frac{PA}{PD}$ . В треуголь-



**Рис. 100**

никах  $PDC$  и  $PAD$  угол при вершине  $P$  общий, следовательно, они подобны, и  $\angle PDC = \angle PAD$ . Так как точки  $E$  и  $C$  симметричны относительно  $BD$ , имеем  $\angle BED = \angle BCD = 180^\circ - \angle CBD - \angle CDB = 180^\circ - \angle CAB - \angle CAD = 180^\circ - \angle BAD$ , т. е.  $\angle BAD + \angle BED = 180^\circ$ , откуда следует, что четырехугольник  $ABED$  вписанный.

**9.8.** Для трех бюрократов  $A, B, C$  из разных комиссий будем говорить, что  $B$  и  $C$  *похожи для  $A$* , если  $A$  либо знаком с обоими бюрократами  $B$  и  $C$ , либо не знаком с обоими. Для каждой пары бюрократов из разных

комиссий найдем количество бюрократов в третьей комиссии, для которых они *похожи*. Оценим сумму  $s$  всех этих  $3 \cdot 100 \cdot 100$  чисел. В любой тройке бюрократов  $A, B, C$  из разных комиссий есть либо две пары знакомых, либо две пары незнакомых между собой. Значит, два из них являются *похожими* для третьего, и «вклад» каждой тройки в сумму  $s$  не меньше 1. Таким образом, сумма  $s$  не меньше, чем число троек бюрократов, т. е.  $s \geq 100 \cdot 100 \cdot 100 = 10^6$ , и поэтому одно из слагаемых не меньше  $\frac{10^6}{3 \cdot 10^4} = \frac{100}{3}$ , т. е. не меньше 34.

Таким образом, какая-то пара бюрократов из разных комиссий является *похожей* не меньше, чем для 34 бюрократов из третьей. Значит, эти два бюрократа либо знакомы хотя бы с 17 бюрократами из оставшейся комиссии, либо незнакомы хотя бы с 17 бюрократами из оставшейся комиссии.

## ▼ 10 класс

10.1. См. решение задачи 9.1.

10.2. Из равенства  $MC = AC$  вытекает, что  $\angle AMC = \angle BAC$ , а из симметрии точек  $P$  и  $A$  относительно  $BC$  следует, что  $\angle BPC = \angle BAC$  (рис. 101).

Отсюда  $\angle BPC + \angle BMC = \angle BAC + (180^\circ - \angle AMC) = 180^\circ$ , поэтому четырехугольник  $BMCP$  вписанный. Отсюда  $\angle MPA = \angle MPC - \angle APC = \angle MBC - \angle PAC = \angle ABC - (90^\circ - \angle ACB) = \angle ABC + \angle ACB - 90^\circ$ .

Аналогично

$$\angle NPA = \angle ABC + \angle ACB - 90^\circ.$$

**Замечание.** Еще одно решение можно получить как следствие известного факта о том, что высоты треугольника  $ABC$  являются биссектрисами треугольника с вершинами в основаниях высот: при гомотетии с центром  $A$  и коэффициентом  $\frac{1}{2}$  точки  $P, N$  и  $M$  переходят в основания высот треугольника  $ABC$ .

10.3. Докажем индукцией по  $n$ , что для очереди из  $n$  ребят через  $n - 1$  минуту получится расстановка, которую назовем *правильной*: в начале очереди все девочки, а потом все мальчики. База для одного пациента очевидна — перестановок в очереди не будет вообще.

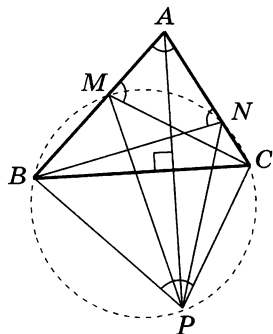


Рис. 101

Докажем индукционный переход. Если в очереди нет девочек, то утверждение очевидно. Пусть девочки есть. Рассмотрим самую первую девочку  $D$  в очереди. Если перед ней нет мальчиков, то она не участвует в перестановках, и по предположению индукции ( $D$  можно мысленно убрать из очереди) через  $n - 2$  минуты получится правильная расстановка. Если же перед  $D$  есть мальчики, то рассмотрим ситуацию через минуту: за  $D$  будет стоять мальчик, далее  $D$  каждую минуту перемещается на одну позицию вперед, пока не окажется в начале очереди (до этого момента пройдет еще не более чем  $n - 2$  минуты), а остальные девочки меняются так, как будто девочки  $D$  нет в очереди. (Действительно,  $D$  может «помешать» поменяться девочке с мальчиком только в случае, если какая-то девочка  $D'$  стоит точно за  $D$ , но если за  $D$  стоит девочка, значит, в предыдущую минуту  $D$  не менялась местами, и они стоят в начале очереди.) Таким образом, по предположению индукции еще через  $n - 2$  минуты все остальные девочки выстроятся впереди мальчиков вслед за  $D$ , т. е. получится *правильная* расстановка.

**10.4.** Заметим, что числа  $k_n = \frac{a_{n+1}}{n} = \left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor + 1$  натуральные,

причем  $k_{n+1} = \left\lfloor \frac{a_{n+1}}{n+1} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{nk_n}{n+1} \right\rfloor + 1 = k_n + \left\lfloor -\frac{k_n}{n+1} \right\rfloor + 1 \leq k_n - 1 + 1 = k_n$ . Значит, последовательность  $k_n$  невозрастающая, и все ее члены — натуральные числа. Тогда, начиная с некоторого момента, она постоянна, т. е.  $k_n = k_{n+1} = k_{n+2} = \dots = k$ . Это значит, что при  $d \geq n$  выполняется равенство  $a_{d+2} - a_{d+1} = (d+1)k_{d+1} - dk_d = (d+1)k - dk = k$ , т. е. вся подпоследовательность  $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots$  является арифметической прогрессией с разностью  $k$ .

**10.5. Ответ:** 50 пар.

Покажем, что можно найти не менее 50 пар друзей, один из которых рыцарь, а другой — лжец. Если фразу «Все мои друзья — лжецы» произнесли не менее 50 рыцарей, то каждый из них знает хотя бы одного лжеца, и 50 требуемых пар нашлись. В противном случае фразу «Все мои друзья — лжецы» произнесли не менее 50 лжецов. Но так как лжецы лгут, каждый из них знает хотя бы одного рыцаря, и 50 требуемых пар также нашлись. Покажем, что возможна ситуация, в которой пар друзей «рыцарь — лжец» ровно 50. Обозначим рыцарей через  $k_1, k_2, \dots, k_{100}$ , а лжецов —  $l_1, l_2, \dots, l_{100}$ . Пусть рыцарь  $k_1$  дружит только со лжецом  $l_1$ , рыцарь  $k_2$  — толь-

ко со лжецом  $l_2, \dots$ , рыцарь  $k_{50}$  — только со лжецом  $l_{50}$  (и при этом лжецы  $l_1, l_2, \dots, l_{50}$  больше ни с кем не дружат). Рыцари  $k_{51}, k_{52}, \dots, k_{100}$  пусть дружат только друг с другом, и лжецы  $l_{51}, l_{52}, \dots, l_{100}$  — тоже только друг с другом. Тогда пар «рыцарь — лжец» ровно 50, 100 человек  $k_1, k_2, \dots, k_{50}, l_1, l_2, \dots, l_{50}$  произносят фразу «Все мои друзья — лжецы», а остальные 100 человек произносят фразу «Все мои друзья — рыцари».

- 10.6. Пусть  $a, b, c$  — три числа, стоящие подряд. Если  $b$  — красное число, то  $b = a + c$ , а если  $b$  — синее число, то  $2b = a + c$ . Запишем такие равенства для всех троек последовательных чисел и сложим их. В правой части получится удвоенная сумма всех чисел, а в левой — сумма красных чисел плюс удвоенная сумма синих. Тогда если  $R$  — сумма всех красных чисел, а  $B$  — сумма всех синих, то мы получим равенство  $R + 2B = 2(R + B)$ , откуда  $R = 0$ .

- 10.7. Ответ: не могло.

Предположим, что выписать числа требуемым образом удалось. Пусть  $\Delta$  — отрезок ленты между числами 0 и 1 (включая 0 и 1). Пусть  $M$  — максимальное по модулю число, попавшее в этот отрезок. Тогда каждое число  $x$  такое, что  $|x| > |M|$ , расположено либо справа, либо слева от  $\Delta$ .

Пусть некоторое число  $x > |M|$  расположено по какую-то сторону от  $\Delta$ , для определенности справа. Среднее арифметическое чисел  $x$  и  $-x$  равно 0, значит, число  $-x$  также расположено справа от  $\Delta$ . Среднее арифметическое чисел  $-x$  и  $x + 2$  равно 1, значит,  $x + 2$  также расположено справа от  $\Delta$ . Рассуждая так и далее, получаем, что числа  $x, x + 2, x + 4$  и все последующие числа той же четности расположены справа от  $\Delta$ .

Теперь среди всех чисел, больших  $|M|$  и расположенных справа от  $\Delta$ , выберем число  $a$ , находящееся левее всех остальных. Числа  $a + 2, a + 4, a + 6, \dots$  находятся справа от  $\Delta$  и, следовательно, правее  $a$ . Число  $a + 4$  выписано не правее  $a + 2$ , так как  $a + 2$  — среднее арифметическое чисел  $a$  и  $a + 4$ . Итак, число  $a + 4$  расположено между числами  $a$  и  $a + 2$ .

Аналогично, число  $a + 8$  расположено между  $a$  и  $a + 4$ , число  $a + 16$  расположено между числами  $a$  и  $a + 8$  и т. д. Таким образом, между числами  $a$  и  $a + 2$  должно разместиться бесконечное множество чисел  $a + 4, a + 8, \dots, a + 2^n, \dots$ . Противоречие.

- 10.8. Пусть  $G$  — точка, симметричная точке  $A$  относительно прямой  $EP$  (рис. 102). Из симметрии  $PF = PA = PG$ ,

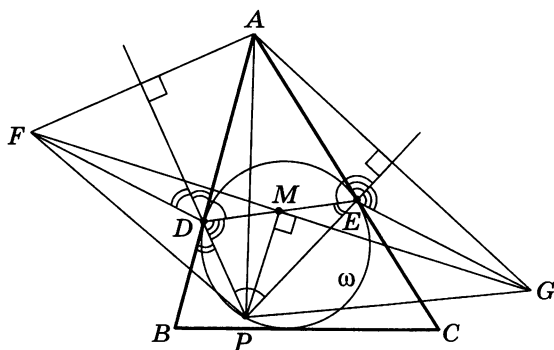


Рис. 102

а также  $FD = AD$ ,  $GE = AE$ . Поскольку  $AD$  и  $AE$  — равные отрезки касательных, получаем  $FD = GE$ . Далее,  $\angle(\vec{DE}, \vec{DF})$  (угол от вектора  $\vec{DE}$  до вектора  $\vec{DF}$ , отсчитываемый против часовой стрелки) равен  $\angle ADE + 2\angle BDP = \angle DPE + 2\angle DEP$  и аналогично  $\angle(\vec{EG}, \vec{ED}) = \angle AED + 2\angle CEP = \angle DPE + 2\angle EDP$ . Тогда  $\angle(\vec{GE}, \vec{DF}) = \angle(\vec{GE}, \vec{DE}) + \angle(\vec{DE}, \vec{DF}) = (\angle DPE + 2\angle EDP) + (\angle DPE + 2\angle DEP) = 2(\angle DPE + \angle DEP + \angle EDP) = 360^\circ$ , т. е. векторы  $\vec{DF}$  и  $\vec{GE}$  сонаправлены и равны. Следовательно,  $FDGE$  — параллелограмм. Точка  $M$  — середина диагонали  $DE$ , значит, она также является серединой диагонали  $FG$ . Следовательно,  $PM$  — медиана (а значит, и высота) равнобедренного треугольника  $FPG$ , и  $\angle FMP = \angle GMP = 90^\circ$ .

## ▼ 11 класс

11.1. Пусть исходные трехчлены имеют вид  $a_1x^2 + b_1x + c_1$  и  $a_2x^2 + b_2x + c_2$ . Так как после перестановки  $a_1$  и  $a_2$  полученные трехчлены не имеют корней, то их дискриминанты отрицательны, т. е.  $b_1^2 < 4a_2c_1$  и  $b_2^2 < 4a_1c_2$ . Левые (а значит, и правые) части этих неравенств неотрицательны, поэтому их можно перемножить, получая  $b_1^2b_2^2 < 16a_1c_1a_2c_2$ . Значит, числа  $a_1c_1$  и  $a_2c_2$  отличны от нуля и имеют одинаковый знак.

С другой стороны, исходные трехчлены имеют корни, т. е.  $b_1^2 \geq 4a_1c_1$  и  $b_2^2 \geq 4a_2c_2$ . Если оба числа в правых частях положительны, то получаем  $b_1^2b_2^2 \geq 16a_1c_1a_2c_2$ , что противоречит полученному выше. Значит,  $a_1c_1 < 0$  и  $a_2c_2 < 0$ , поэтому  $b_2^2 \geq 0 > 4a_1c_1$  и  $b_1^2 \geq 0 > 4a_2c_2$ . Это и означает, что трехчлены  $a_1x^2 + b_1x + c_1$  и  $a_2x^2 + b_2x + c_2$  имеют корни.

11.2. Ответ: 140.

Поставим в каждой красной точке число 0, в каждой синей — 1, а в каждой зеленой — 2. Тогда каждое число на разноцветной дуге равно сумме чисел в ее концах, а каждое число на одноцветной дуге меньше суммы в ее концах. Значит, сумма чисел на дугах не превосходит удвоенной суммы чисел в точках, причем равенство достигается, когда все дуги разноцветные. Сумма чисел в точках равна  $40 \cdot 0 + 30 \cdot 1 + 20 \cdot 2 = 70$ , поэтому сумма чисел на дугах не больше 140. Осталось привести пример, когда эта оценка достигается (т. е. когда все дуги разноцветные). Расставим сначала по кругу 40 красных точек, затем вставим между соседними красными точками по точке другого цвета — 30 синих и 10 зеленых. Наконец, вставим оставшиеся 10 зеленых точек на дуги между красными и синими точками (таких дуг образовалось 60, поэтому их хватит).

11.3. См. решение задачи 10.4.

11.4. Заметим, что для любой точки  $P$ , лежащей на меньшей дуге  $A'B'$  окружности  $\omega$ , выполнено неравенство  $\angle APB' + \angle BPA' \leq \angle A'PB' < 180^\circ$  (рис. 103), поэтому точки  $K$  и  $L$  не лежат на этой дуге. Тогда из условия получаем  $\angle AKB + \angle A'KB' = \angle ALB + \angle A'LB' = 180^\circ$ , и  $\angle AKB = \angle ALB = 180^\circ - \angle A'IB' : 2 = 180^\circ - (180^\circ - \angle C) : 2 = 90^\circ + \angle C : 2$  (здесь  $I$  — центр вписанной окружности). Заметим, что  $\angle AIB = 180^\circ - (\angle A + \angle B) : 2 = 90^\circ + \angle C : 2$ , т. е. точки  $A, B, K, L, I$  лежат на одной окружности  $\Omega$  (рис. 104).

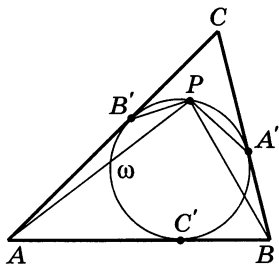


Рис. 103

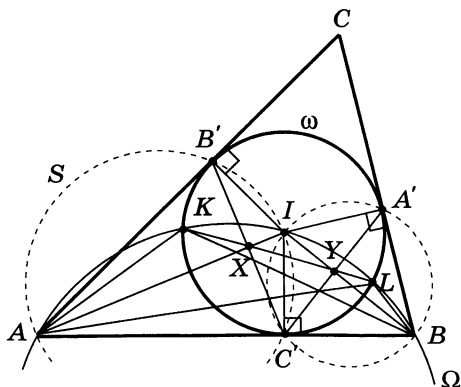


Рис. 104

Точки  $A, B', I, C'$  лежат на одной окружности  $S$ , так как  $\angle AB'I = \angle AC'I = 90^\circ$ . Радикальные оси окружностей  $\omega, \Omega$  и  $S$  пересекаются в одной точке  $X$ ; эти радикальные оси суть прямые  $KL, B'C'$  и  $AI$ . Так как точки  $B'$  и  $C'$  симметричны относительно  $AI$ , точка  $X$  является серединой  $B'C'$ . Аналогично получаем, что  $KL$  пересекает отрезок  $A'C'$  в его середине  $Y$ . Но средняя линия  $XY$  треугольника  $A'B'C'$ , очевидно, равноудалена от  $A', B'$  и  $C'$ , что и требовалось доказать.

**11.5. Ответ:** 50 пар.

См. решение задачи 10.5.

**11.6.** В треугольниках  $ABK$  и  $ACD$

(рис. 105) углы  $AKB$  и  $ADC$  равны по условию, а  $\angle ABK = \angle ACD$  как вписанные, значит, эти треугольники подобны. Следовательно, треугольник  $ABK$  переходит в треугольник  $ACD$  при поворотной гомотетии с центром  $A$  (т. е. при повороте на угол  $BAC$  и последующей гомотетии с коэффициентом  $\frac{AC}{AB}$ ).

При этой поворотной гомотетии точка  $I'$  переходит в точку  $I$  (так как  $I'$  и  $I$  — соответственные точки подобных треугольников  $ABK$  и  $ACD$ ), поэтому  $\angle I'AI = \angle BAC$  и  $\frac{AI}{AI'} = \frac{AC}{AB}$ . Значит, треугольник  $AII'$  подобен треугольнику  $ACB$ , откуда  $\angle AIX = \angle AII' = \angle ACB$ . Но  $\angle ACB = \angle ADB$ , откуда  $\angle AIX = \angle ADX$ ; это и означает, что точки  $A, X, I, D$  лежат на одной окружности.

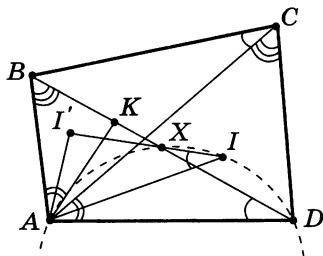


Рис. 105

**11.7. Первое решение.** Поскольку  $x_1 \geq \dots \geq x_k$ , для произвольного  $k$  имеем

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{x_1}{\sqrt{1}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{x_k}{\sqrt{k}} \geq x_k \left( \frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \geq \\ &\geq x_k \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{k}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} \right)}_{k \text{ раз}} = x_k \sqrt{k}, \end{aligned}$$

откуда  $x_k < \frac{1}{\sqrt{k}}$  и  $x_k^2 < \frac{x_k}{\sqrt{k}}$ . Значит,

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 < \frac{x_1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 1,$$

что и требовалось доказать.



**Второе решение.** Докажем требуемое неравенство индукцией по  $n$ . База при  $n = 1$  тривиальна:  $x_1 = 1$ , поэтому  $x_1^2 = 1$ . Пусть для  $n = k - 1$  неравенство доказано, докажем его для  $n = k$ .

Пусть  $x_1, \dots, x_k$  — числа, удовлетворяющие условию задачи. Пусть число  $a$  таково, что  $a \left( \frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k-1}} \right) = \frac{x_k}{\sqrt{k}}$ . Рассмотрим числа  $y_i = x_i + a$  ( $i = 1, \dots, k - 1$ ). Тогда  $y_1 \geq \dots \geq y_{k-1}$ , и

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{y_{k-1}}{\sqrt{k-1}} &= \left( \frac{x_1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{x_{k-1}}{\sqrt{k-1}} \right) + \\ &+ a \left( \frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k-1}} \right) = \frac{x_1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{x_k}{\sqrt{k}} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, по предположению индукции

$$y_1^2 + \dots + y_{k-1}^2 \leq 1.$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что  $x_1^2 + \dots + x_k^2 \leq y_1^2 + \dots + y_{k-1}^2 = (x_1 + a)^2 + \dots + (x_{k-1} + a)^2 = x_1^2 + \dots + x_{k-1}^2 + 2a(x_1 + \dots + x_{k-1}) + (k-1)a^2$ , что следует из более сильного неравенства  $x_k^2 \leq 2a \cdot (k-1) x_k$ , или  $1 \leq \frac{2(k-1)}{s\sqrt{k}}$ , где

$$s = \frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k-1}}.$$

Докажем последнее неравенство индукцией по  $k$ . При  $k = 2$  неравенство имеет вид  $1 \leq \frac{2}{\sqrt{2}}$ , что верно. Пусть

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k-1}} \leq \frac{2(k-1)}{\sqrt{k}}. \quad \text{Тогда для перехода до-}$$

статочно доказать, что  $\frac{2(k-1)}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{2k}{\sqrt{k+1}}$ , или

$(2k-1)\sqrt{k+1} \leq 2k\sqrt{k}$ . После возведения в квадрат получаем  $4k^3 - 3k + 1 \leq 4k^3$ , что верно. Неравенство доказано.

#### 11.8. Ответ: 120.

Рассмотрим граф, вершинами которого являются бюрократы, причем два бюрократы из разных комиссий соединены красным ребром, если они знакомы, и синим в противном случае.

Пусть в трех комиссиях  $a, b$  и  $c$  бюрократов. Рассмотрим произвольных бюрократов  $A, B$  из первых двух комиссий. Пусть они знакомы. Тогда существует ровно 10 треугольников  $ABC$ , в которых все ребра красные. Аналогично для незнакомых  $A$  и  $B$  найдется ров-

но 10 треугольников  $ABC$ , в которых все ребра синие. Значит, общее число одноцветных треугольников равно  $10ab$ . Аналогично оно же равно  $10ac$  и  $10bc$ , поэтому  $a = b = c$ .

Для трех бюрократов  $A, B, C$  из разных комиссий будем говорить, что  $B$  и  $C$  *похожи для  $A$* , если  $A$  соединен с  $B$  и  $C$  ребрами одного цвета. Для каждого бюрократа найдем количество пар, *похожих для него*; посчитаем сумму  $s$  всех этих чисел двумя способами. С одной стороны, каждая пара бюрократов  $B, C$  из разных комиссий является *похожей* ровно для 20 бюрократов; всего таких пар  $3a^2$ , следовательно,  $s = 20 \cdot 3a^2$ . С другой стороны, в любом одноцветном треугольнике  $ABC$  каждые два бюрократа *похожи для* третьего; если же треугольник  $ABC$  разноцветный (скажем, ребро  $AB$  отличается по цвету от других), то в нем ровно одна пара  $(A, B)$  *похожа для* третьего. Так как количество одноцветных треугольников равно  $10a^2$ , а разноцветных —  $a^3 - 10a^2$ , то  $s = 3 \cdot 10a^2 + (a^3 - 10a^2)$ . Значит,  $60a^2 = a^3 + 20a^2$ , откуда  $a = 40$ , и общее число бюрократов равно  $3 \cdot 40 = 120$ .

## V ЭТАП (ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ)

### УСЛОВИЯ ЗАДАЧ



#### 9 класс

- 9.1. Существуют ли такие 14 натуральных чисел, что при увеличении каждого из них на 1 произведение всех чисел увеличится ровно в 2008 раз? (*Н. Агаханов, И. Богданов*)
- 9.2. Числа  $a, b, c$  таковы, что уравнение  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  имеет три действительных корня. Докажите, что если  $-2 < a + b + c < 0$ , то хотя бы один из этих корней принадлежит отрезку  $[0, 2]$ . (*Д. Терешин*)
- 9.3. В неравнобедренном треугольнике  $ABC$  точки  $H$  и  $M$  — точки пересечения высот и медиан соответственно. Через вершины  $A, B$  и  $C$  проведены прямые, перпендикулярные прямым  $AM, BM, CM$  соответственно. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника, образованного проведенными прямыми, лежит на прямой  $MH$ . (*Л. Емельянов*)
- 9.4. В НИИЧАВО работают несколько научных сотрудников. В течение 8-часового рабочего дня сотрудники ходили в буфет, возможно, по несколько раз. Известно, что для

каждых двух сотрудников суммарное время, в течение которого в буфете находился ровно один из них, оказалось не менее  $x$  часов ( $x > 4$ ). Какое наибольшее количество научных сотрудников могло работать в этот день в НИИЧАВО (в зависимости от  $x$ )? (*Д. Терешин*)

- 9.5. Расстоянием между двумя клетками бесконечной шахматной доски назовем минимальное число ходов в пути короля между этими клетками. На доске отмечены три клетки, попарные расстояния между которыми равны 100. Сколько существует клеток, расстояния от которых до всех трех отмеченных клеток равны 50? (Король может сделать ход на клетку, имеющую с данной хотя бы одну общую вершину.) (*И. Богданов*)
- 9.6. Вписанная окружность касается сторон  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Точка  $K$  — середина дуги  $AB$  описанной окружности треугольника  $ABC$  (не содержащей точки  $C$ ). Оказалось, что прямая  $XY$  делит отрезок  $AK$  пополам. Чему может быть равен угол  $BAC$ ? (*С. Берлов*)
- 9.7. На доске написано натуральное число. Если на доске написано число  $x$ , то можно дописать на нее число  $2x + 1$  или  $\frac{x}{x+2}$ . В какой-то момент выяснилось, что на доске есть число 2008. Докажите, что оно там было с самого начала. (*А. Храбров*)
- 9.8. В нашем распоряжении имеются  $3^{2k}$  неотличимые по виду монеты, одна из которых фальшивая: она весит чуть легче настоящей. Кроме того, у нас есть трое двухчашечных весов. Известно, что двое весов исправны, а одни сломаны (показываемый ими исход взвешивания никак не связан с весом положенных на них монет, т. е. может быть как верным, так и искаженным в любую сторону, причем на разных взвешиваниях искаженным по-разному). При этом неизвестно, какие именно весы исправны, а какие сломаны. Как определить фальшивую монету за  $3k + 1$  взвешиваний? (*К. Кноп*)

## ▼ 10 класс

- 10.1. Существуют ли такие 14 натуральных чисел, что при увеличении каждого из них на 1 произведение всех чисел увеличится ровно в 2008 раз? (*Н. Агаханов, И. Богданов*)
- 10.2. Дана таблица  $n \times n$ , столбцы которой пронумерованы числами от 1 до  $n$ . В клетки таблицы расставляются числа 1, ...,  $n$  так, что в каждой строке и в каждом

столбце все числа различны. Назовем клетку *хорошей*, если число в ней больше номера столбца, в котором она находится. При каких  $n$  существует расстановка, в которой во всех строках одинаковое количество *хороших* клеток? (К. Чувиллин)

- 10.3. Окружность  $\omega$  с центром  $O$  вписана в угол  $BAC$  и касается его сторон в точках  $B$  и  $C$ . Внутри угла  $BAC$  выбрана точка  $Q$ . На отрезке  $AQ$  нашлась такая точка  $P$ , что  $AQ \perp OP$ . Прямая  $OP$  пересекает окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , описанные около треугольников  $BPQ$  и  $CPQ$ , вторично в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что  $OM = ON$ . (А. Акопян)

- 10.4. Последовательности  $(a_n)$  и  $(b_n)$  заданы условиями

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n} \quad \text{и} \quad b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}.$$

Докажите, что  $a_{2008} < 5$ . (М. Мурашкин)

- 10.5. Найдите все такие тройки действительных чисел  $x, y, z$ , что  $1 + x^4 \leq 2(y - z)^2$ ,  $1 + y^4 \leq 2(z - x)^2$ ,  $1 + z^4 \leq 2(x - y)^2$ . (Н. Агаханов, И. Богданов)

- 10.6. В неравнобедренном остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$  и  $CC_1$ ,  $H$  — точка пересечения высот,  $O$  — центр описанной окружности,  $B_0$  — середина стороны  $AC$ . Прямая  $BO$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $P$ , а прямые  $BH$  и  $A_1C_1$  пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что прямые  $HB_0$  и  $PQ$  параллельны. (А. Полянский)

- 10.7. При каких натуральных  $n > 1$  существуют такие натуральные  $b_1, \dots, b_n$  (не все из которых равны), что при всех натуральных  $k$  число  $(b_1 + k) \cdot (b_2 + k) \cdot \dots \cdot (b_n + k)$  является степенью натурального числа? (Показатель степени может зависеть от  $k$ , но должен быть всегда больше 1.) (В. Произволов, В. Сендеров)

- 10.8. На плоскости нарисовано несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что каждые два прямоугольника можно пересечь вертикальной или горизонтальной прямой. Докажите, что можно провести одну горизонтальную и одну вертикальную прямые так, чтобы любой прямоугольник пересекался хотя бы с одной из этих двух прямых. (Р. Карасев)

## ▼ 11 класс

- 11.1. Числа  $a, b, c$  таковы, что уравнение  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  имеет три действительных корня. Докажите, что если  $-2 \leq a + b + c \leq 0$ , то хотя бы один из этих корней принадлежит отрезку  $[0, 2]$ . (Д. Терешин)

- 11.2. Пете и Васе подарили одинаковые наборы из  $N$  гирь, в которых массы любых двух гирь различаются не более чем в 1,25 раза. Пете удалось разделить все гири своего набора на 10 равных по массе групп, а Васе удалось разделить все гири своего набора на 11 равных по массе групп. Найдите наименьшее возможное значение  $N$ . (П. Кожевников)
- 11.3. Дано конечное множество простых чисел  $P$ . Докажите, что найдется натуральное число  $x$ , такое, что оно представляется в виде  $x = a^p + b^p$  (с натуральными  $a, b$ ) при всех  $p \in P$  и не представляется в таком виде для любого простого  $p \notin P$ . (В. Сендеров)
- 11.4. Каждую грань тетраэдра можно поместить в круг радиуса 1. Докажите, что весь тетраэдр можно поместить в шар радиуса  $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ . (Р. Карасев)
- 11.5. Числа от 51 до 150 расставлены в таблицу  $10 \times 10$ . Может ли случиться так, что для каждой пары чисел  $a, b$ , стоящих в соседних по стороне клетках, хотя бы одно из уравнений  $x^2 - ax + b = 0$  и  $x^2 - bx + a = 0$  имеет два целых корня? (И. Богданов, О. Подлипский)
- 11.6. Фокусник отгадывает площадь выпуклого 2008-угольника  $A_1A_2 \dots A_{2008}$ , находящегося за ширмой. За один вопрос он называет две точки на сторонах многоугольника; зрители отмечают эти точки, проводят через них прямую и сообщают фокуснику меньшую из двух площадей частей, на которые 2008-угольник разбивается этой прямой. (При этом в качестве точки фокусник может назвать либо вершину, либо точку, делящую указанную им сторону в указанном им численном отношении.) Докажите, что за 2006 вопросов фокусник сможет отгадать площадь многоугольника. (Н. Агаханов)
- 11.7. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Пусть  $P$  и  $Q$  — точки пересечения лучей  $BA$  и  $CD$ ,  $BC$  и  $AD$  соответственно, а  $H$  — проекция  $D$  на  $PQ$ . Докажите, что четырехугольник  $ABCD$  является описанным тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников  $ADP$  и  $CDQ$  видны из точки  $H$  под равными углами. (В. Шмаров)
- 11.8. В турнире принимали участие  $2n + 3$  шахматистов. Каждый сыграл с каждым ровно по одному разу. Для турнира был составлен такой график, чтобы игры проводились одна за другой и чтобы каждый игрок после сыгранной партии отдыхал не менее  $n$  игр. Докажите, что один из шахматистов, игравших в первой партии, играл и в последней. (А. Грибалко)

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### ▼ 9 класс

9.1. Ответ: существуют.

Подходят, например, числа  $\underbrace{1, \dots, 1}_{10 \text{ чисел}}, 4, 4, 4, 250$ . Действительно,  $(1 + 1)^{10} (4 + 1)^3 (250 + 1) = 2^{10} \cdot 5^3 \cdot 251 = 2008 \cdot 1^{10} \cdot 4^3 \cdot 250$ .

Замечание. Подходит также набор  $\underbrace{1, \dots, 1}_{10 \text{ чисел}}, 2, 4, 24, 250$ .

9.2. Обозначим  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ . Пусть  $x_1, x_2, x_3$  — его корни, тогда  $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ . Заметим, что  $P(1) = 1 + a + b + c$ , поэтому, учитывая условие  $-2 \leq a + b + c \leq 0$ , имеем  $-1 \leq 1 + a + b + c \leq 1$ ,  $-1 \leq (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) \leq 1$ . Этого не может быть, если все три числа  $1 - x_1, 1 - x_2, 1 - x_3$  по модулю больше 1. Значит, для какого-то корня (пусть для  $x_1$ ) имеем  $|1 - x_1| \leq 1$ , или  $0 \leq x_1 \leq 2$ , что и требовалось.

9.3. Пусть  $A'B'C'$  — треугольник, образованный проведенными прямыми (рис. 106), и  $G$  — точка пересечения его медиан. Мы докажем, что  $M$  является серединой отрезка  $GH$ .

Достроим треугольник  $BMC$  до параллелограмма  $BMCA_1$ . Отрезок  $MA_1$  делит сторону  $BC$  пополам, поэтому  $A_1$  лежит на прямой  $AM$ , причем  $AM = A_1M_1$  (поскольку точка  $M$  делит медиану в отношении  $2 : 1$ ). Кроме того,  $BA_1 \parallel MC \perp A'B'$  и  $CA_1 \parallel MB \perp A'C'$ , поэтому  $BA_1$  и  $CA_1$  — высоты треугольника  $BA'C$ , значит,  $A_1$  является ортоцентром треугольника  $BA'C$  и  $A'A_1 \perp BC$ .

Стороны треугольника  $BA_1M$  перпендикулярны сторонам треугольника  $A'B'C'$  соответственно, поэтому эти треугольники подобны, причем соответствующие прямые  $BC$  и  $AG$ , содержащие медианы этих треугольников, перпендикулярны. Значит, прямая  $A'G$  совпадает с прямой  $A'A_1$ . Пусть  $G'$  — точка, симметричная точке  $H$  относительно  $M$ . Треугольники  $AHM$  и  $A_1G'M$  симметричны относительно  $M$ ,

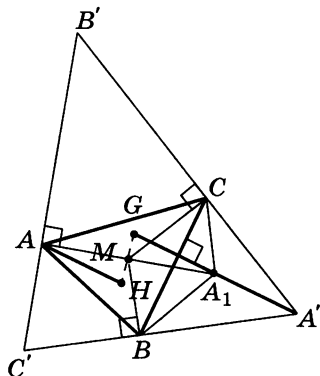


Рис. 106

поэтому  $A_1G' \parallel AH \perp BC$ . Отсюда следует, что  $G'$  лежит на прямой  $A'G$ . Аналогично получаем, что  $G'$  лежит на прямой  $B'G$ , т. е.  $G'$  совпадает с  $G$ .

9.4. Ответ:  $2 \left\lceil \frac{x}{2x-8} \right\rceil$ .

Пусть в НИИЧАВО в тот день работали  $n$  человек. По условию для каждой пары сотрудников время, когда в буфете присутствовал ровно один из них, не меньше  $x$  часов. Суммируя все эти промежутки времени по всем парам, получим число  $S \geq \frac{n(n-1)}{2}x$ . Посчитаем

это число другим способом.

Отметим моменты, когда в буфет кто-то входил или из него кто-то выходил. Рабочий день разбился на  $m$  промежутков с длинами  $t_1, \dots, t_m$ . Пусть на промежутке с номером  $i$  в буфете находились  $k_i$  человек. Тогда этот промежуток будет посчитан ровно для тех пар сотрудников, в которых ровно один присутствовал в буфете; таких пар  $k_i(n - k_i)$ . Поэтому этот промежуток внесет в  $S$  вклад  $t_i k_i (n - k_i)$ . Заметим, что выражение

$k(n - k)$  достигает максимума при  $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ , т. е. вклад

не больше  $t_i \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left( n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)$ . Поскольку  $t_1 + \dots + t_m = 8$ ,

то, суммируя, получаем, что

$$8 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left( n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \geq S \geq \frac{n(n-1)}{2}x.$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть  $n$  чётно,  $n = 2l$ . Тогда получаем  $8l^2 \geq l(2l - 1)x$ , т. е.

$$(2x - 8)l \leq x, \quad l \leq \frac{x}{2x - 8}, \quad n \leq 2 \left\lceil \frac{x}{2x - 8} \right\rceil.$$

2. Если же  $n = 2l + 1$ , то получаем  $8l(l + 1) \geq l(2l + 1)x$ , т. е.

$$(2x - 8)l \leq 8 - x, \quad l \leq \frac{8 - x}{2x - 8},$$

$$n \leq 2 \left\lceil \frac{8 - x}{2x - 8} \right\rceil + 1 = 2 \left\lceil \frac{x}{2x - 8} \right\rceil - 1.$$

То есть в любом случае  $n \leq 2 \left\lceil \frac{x}{2x - 8} \right\rceil$ .

Покажем, что эта оценка достигается. Положим  $n = 2l = 2 \left\lceil \frac{x}{2x-8} \right\rceil$ . Рассмотрим все способы отметить  $l$  сотрудников из  $n = 2l$ ; пусть число таких способов равно  $K$ . Разобьем 8-часовой интервал на  $K$  отрезков, каждый длиной  $\frac{8}{K}$  часов. Каждому отрезку сопоставим группу из  $l$  человек; пусть в течение этого отрезка времени ровно эти  $l$  человек и находились в буфете. Из симметрии ясно, что для любых двух сотрудников время, в течение которого ровно один из них был в буфете, одно и то же — пусть оно равно  $y$ . Тогда в подсчете, сделанном выше, все неравенства обратятся в равенства, и мы получим  $8l(2l-l) = S = \frac{2l(2l-1)}{2} y$ . Отсюда  $y = \frac{8l}{2l-1} \geq x$  (последнее неравенство равносильно  $l \leq \frac{x}{2x-8}$ ), что и требовалось.

**Замечание.** При  $x \leq 4$  число сотрудников может быть каким угодно.

**9.5. Ответ:** одна.

Рассмотрим две произвольные клетки. Пусть разница абсцисс их центров равна  $x \geq 0$ , а разница ординат —  $y \geq 0$ . Тогда ясно, что король может прийти от одной из этих клеток за  $\max(x, y)$  ходов и не может за меньшее число, т. е. расстояние между этими клетками равно  $\max(x, y)$ . Будем обозначать расстояние между  $A$  и  $B$  через  $\rho(A, B)$ .

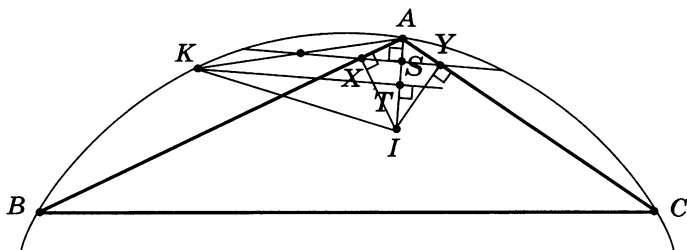
Пусть отмечены клетки  $A, B, C$ . Тогда для каждой пары клеток существует координата, в которой они различаются ровно на 100. Для двух пар клеток это будет одна и та же координата, для определенности пусть это пары  $(A, B)$  и  $(A, C)$ , различающиеся по горизонтали. Тогда абсциссы точек  $B$  и  $C$  либо различаются на 200, либо совпадают. Первый случай невозможен, так как расстояние между  $B$  и  $C$  равно 100. Значит, их абсциссы совпадают, а ординаты тогда отличаются на 100. Тогда (с точностью до симметрии) можно считать, что клетки имеют координаты  $B(0, 0)$ ,  $C(0, 100)$ ,  $A(100, x)$  (при этом, естественно,  $0 \leq x \leq 100$ , иначе  $\rho(A, B)$  или  $\rho(A, C)$  больше 100). Рассмотрим точку  $X$ , отстоящую от точек  $A, B$  и  $C$  на 50. Ее абсцисса должна быть равна 50, иначе  $\rho(X, B) > 50$  или  $\rho(X, A) > 50$ . Аналогично ордината  $X$  равна 50, иначе  $\rho(X, B) > 50$  или  $\rho(X, C) > 50$ .



Значит, координаты  $X$  равны  $(50, 50)$ , причем, как нетрудно видеть, эта клетка подходит. Таким образом, искомая клетка ровно одна.

**9.6. Ответ:**  $120^\circ$ .

Пусть отрезки  $XY$  и  $AI$  пересекаются в точке  $S$  (рис. 107). Как известно,  $KI = KA$ , т. е. высота  $KT$  треугольника  $AKI$  является его медианой. Так как  $XY \perp AI$ , то  $XY \parallel KT$ , а поскольку  $XY$  делит сторону  $AK$  пополам, то  $XY$  — средняя линия в  $\triangle AKT$ . Значит,  $AS : ST = 1 : 3$ , при этом  $XS$  — высота в прямоугольном треугольнике  $AXI$ , откуда  $AS : ST = (AX : XI)^2$ ,  $\operatorname{tg} XAI = XI : AX = \sqrt{3}$ ,  $\angle XAI = 60^\circ$  и  $\angle BAC = 2\angle XAI = 120^\circ$ .



**Рис. 107**

**9.7. Доказательство.** Можно считать, что «лишних» чисел на доску не выписывалось, т. е. все числа «участвовали» в получении числа 2008. Заметим, что все выписанные числа положительны.

Пусть в некоторый момент на доске написано рациональное число, в несократимой записи имеющее вид  $x = \frac{p}{q}$ . Тогда можно дописать число  $2x + 1 = \frac{2p + q}{q}$  или

$\frac{x}{x + 2} = \frac{p}{p + 2q}$ . Заметим, что если какая-нибудь из этих дробей сократима, то только на 2. Действительно,  $\text{НОД}(2p + q, q) = \text{НОД}(2p, q) \leq 2\text{НОД}(p, q) = 2$  и  $\text{НОД}(p, p + 2q) = \text{НОД}(p, 2q) \leq 2\text{НОД}(p, q) = 2$ . Поэтому сумма числителя и знаменателя в несократимой записи нового числа равна либо  $(2p + q) + q = p + (p + 2q) = 2(p + q)$ , либо  $\frac{2(p + q)}{2} = p + q$ . Таким

образом, сумма числителя и знаменателя в несократимой записи либо не изменяется, либо удваивается. Так как в конце она оказалась равной  $2008 + 1 = 2009$ , то удваиваться она не могла, и изначально она тоже была равна 2009. Так как исходное число было натураль-

ным, то его знаменатель был равен 1, а числитель соответственно  $2009 - 1 = 2008$ , что и требовалось. ■

### 9.8. Будем обозначать фальшивую монету ФМ.

Пусть ФМ находится среди  $3^d$  монет. Заметим, что если мы положим на чашки исправных весов по  $3^{d-1}$  монет, то при любом исходе взвешивания число монет, которые могут оказаться фальшивыми, окажется равным  $3^{d-1}$ .

**Лемма.** Из  $3^{2k}$  монет за  $3k$  взвешиваний можно либо найти фальшивую, либо найти три монеты, среди которых находится фальшивая, и при этом найти одни исправные веса.

**Доказательство.** Проведем индукцией по  $k$ .

*База при  $k = 1$ .* Расположим монеты в виде квадрата  $3 \times 3$ . Занумеруем его строки и столбцы цифрами от 1 до 3, а монеты соответственно парами этих цифр; например, монета в первой строке и втором столбце получит номер 12.

Сравним монеты первой и второй строчек на первых весах, затем сравним монеты первого и второго столбцов на вторых весах. Предположим, что первые и вторые веса исправны. Тогда в любом случае эти взвешивания позволяют однозначно определить ФМ. Можно считать, что это монета 11. Тогда если сломаны первые веса, то ФМ находится в первом столбце, а если вторые, то в первой строке.

Третьим взвешиванием на последних весах сравним  $12 + 13$  с  $21 + 31$ . Если веса в равновесии, то ФМ может оказаться только 11-я, зато мы не знаем, какие веса сломаны. Пусть одна из чаш оказалась легче (например,  $12 + 13$ ). Это означает, что показания третьих весов противоречат показаниям вторых, а тогда первые веса — исправные, и мы нашли три монеты (лежащие в первой строке), среди которых обязана быть ФМ.

*Переход.* Пусть  $k > 1$ , и у нас есть  $3^{2k}$  монет. Объединим их в группы по 9 штук, назвав каждую *новой монетой*. По предположению индукции, мы можем за  $3k - 3$  взвешиваний выяснить либо фальшивую монету среди этих  $3^{2(k-1)}$  монет, либо найти исправные веса и три новые монеты, среди которых есть фальшивая.

В первом случае, пользуясь утверждением базы индукции для этих 9 монет (составляющих найденную новую монету), мы можем за 3 взвешивания сделать требуемое. Во втором случае мы получили исправные веса и 27 кандидатов на фальшивую монету. Тогда за следующие 3 взвешивания на исправных весах мы уменьшим количество кандидатов до 9, до 3 и до 1, т. е. най-

дем фальшивую. Переход, а вместе с ним и лемма, доказаны. ■

Теперь легко получить решение задачи. Сделаем  $3k$  взвешиваний согласно лемме. Если мы уже нашли фальшивую монету, то совершили требуемое. Иначе мы нашли исправные весы и 3 монеты, среди которых есть фальшивая. Тогда за последнее взвешивание на этих весах мы из этих 3 монет найдем фальшивую.

**Замечание.** Улучшив процедуру, можно добиться даже меньшего числа взвешиваний. Например, можно показать, что при  $n \geq 2$  из  $3^{n(n+1)}$  монет фальшивая находится за  $(n+1)^2$  взвешиваний.



## 10 класс

**10.1. Ответ:** да, существуют.

См. решение задачи 9.1.

**10.2. Ответ:** при нечетных  $n$ .

Найдем общее количество *хороших* клеток. В первом столбце их  $n-1$  (все, кроме клетки с числом 1), во втором —  $n-2$  (все, кроме клеток с числами 1 и 2) и т. д., в последнем столбце таких клеток нет. Значит, всего их  $(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ . Поэтому в каждой строке их должно быть по  $\frac{n-1}{2}$ , т. е.  $n$  должно быть нечетным.

Приведем *пример* расстановки при нечетном  $n$ . Пусть в первой строке записаны числа в порядке 1,  $n$ ,  $n-1$ ,  $n-2$ , ..., 2, а каждая следующая строка является циклическим сдвигом предыдущей строки на 1 клетку (рис. 108). Очевидно, в любой строке и в любом столбце каждое из чисел 1, 2, ...,  $n$  встречается по одному разу. Рассмотрим  $m$ -ю строку. В ее первых  $m$  клетках

1	$n$	$n-1$	$\dots$	2
2	1	$n$	$\dots$	3
3	2	1	$\dots$	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$n-1$	$n-2$	$n-3$	$\dots$	$n$
$n$	$n-1$	$n-2$	$\dots$	1

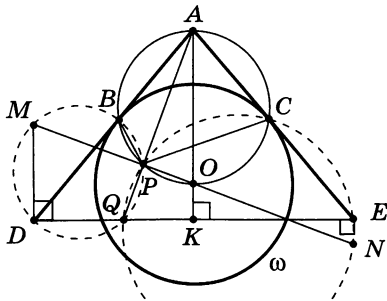
Рис. 108

среди этих клеток ровно  $\left[ \frac{m}{2} \right]$  хороших. В ее последних  $n - m$  клетках (т. е. в столбцах с номерами  $m + 1, m + 2, \dots, n$ ) стоят числа  $m + 1, m + 2, \dots, n$  в обратном порядке, поэтому среди этих клеток ровно  $\left[ \frac{n - m}{2} \right]$  хороших. Так как числа  $m$  и  $n - m$  разной четности, то в  $m$ -й строке ровно  $\left[ \frac{m}{2} \right] + \left[ \frac{n - m}{2} \right] = \frac{m}{2} + \frac{n - m}{2} - \frac{1}{2} = \frac{n - 1}{2}$  хороших клеток.

**10.3. Доказательство.** Пусть описанные окружности треугольников  $BPQ$  и  $CPQ$  пересекают лучи  $AB$  и  $AC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно (рис. 109). Из теоремы о произведении отрезков секущих получаем  $AB \cdot AD = AP \cdot AQ$  и аналогично  $AC \cdot AE = AP \cdot AQ$ , откуда  $AB \cdot AD = AC \cdot AE$ . Так как  $AB = AC$  (отрезки касательных к  $\omega$ ), то  $AD = AE$ , и треугольник  $ADE$  равнобедренный. Пусть  $K$  — середина  $DE$ . Тогда прямая  $AK$  является медианой, высотой и биссектрисой равнобедренного треугольника  $ADE$ , в частности  $AK$  проходит через  $O$ .

Так как  $\angle ABO = \angle ACO = \angle APO = 90^\circ$ , то точки  $A, B, C, P, O$  лежат на окружности с диаметром  $AO$ . Из вписанных четырехугольников  $ABPC, BPQD, CPQE$  имеем:  $\angle PQD = 180^\circ - \angle PBD = \angle ABP = 180^\circ - \angle ACP = \angle PCE = 180^\circ - \angle PQE$ , поэтому точка  $Q$  лежит на отрезке  $DE$ .

Так как четырехугольник  $PQDM$  вписанный, то  $\angle MDQ = \angle MPQ = 90^\circ$ , отсюда  $MD \perp DE$ . Аналогично  $NE \perp DE$ . Таким образом,  $MD \parallel OK \parallel NE$  и  $DK = KE$ . Отсюда вытекает, что  $OM = ON$ . ■



**Рис. 109**

**10.4. Доказательство.** Заметим, что  $a_n, b_n > 0$ .

Докажем индукцией по  $n$ , что  $\frac{1}{a_n + 1} - \frac{1}{b_n + 1} = \frac{1}{6}$ . База при  $n = 1$  очевидна:  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ . Пусть при некотором  $n$  это верно. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1} + 1} - \frac{1}{b_{n+1} + 1} &= \frac{b_n}{1 + a_n + b_n + a_n b_n} - \frac{a_n}{1 + a_n + b_n + a_n b_n} = \\ &= \frac{b_n - a_n}{(1 + a_n)(1 + b_n)} = \frac{1}{a_n + 1} - \frac{1}{b_n + 1}. \end{aligned}$$

Переход доказан.

Итак, при любом  $n$  мы получили  $\frac{1}{a_n + 1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{b_n + 1} > \frac{1}{6}$ ,

т. е.  $a_n + 1 < 6$  и  $a_n < 5$ , что и требовалось. ■

**10.5. Ответ:**  $(-1, 0, 1)$ ,  $(-1, 1, 0)$ ,  $(0, -1, 1)$ ,  $(0, 1, -1)$ ,  $(1, -1, 0)$ ,  $(1, 0, -1)$ .

Пусть для определенности  $x \geq y \geq z$ .

Поскольку  $0 \leq (x^2 - 1)^2 = (x^4 + 1) - 2x^2$ , мы имеем  $2x^2 \leq 1 + x^4 \leq 2(y - z)^2$ , откуда получаем  $|x| \leq y - z$  и аналогично  $|z| \leq x - y$ . Тогда  $|z| + |x| \leq (x - y) + (y - z) = x - z$ . Это возможно только если  $x \geq 0$ ,  $z \leq 0$ , при этом неравенство обращается в равенство. Значит, и все промежуточные неравенства также обращаются в равенства, т. е.  $2x^2 = 1 + x^4$ ,  $2z^2 = 1 + z^4$ , откуда  $x^2 = z^2 = 1$  и  $x = 1$ ,  $x = -1$ . Кроме того,  $|x| = y - z$ , откуда  $y = 0$ . Проверка показывает, что этот ответ подходит.

**10.6.** Пусть точка  $O_1$  — середина отрезка  $BH$  (рис. 110). Так как  $\angle BA_1H = \angle BC_1H = 90^\circ$ , то  $O_1$  является центром окружности, проходящей через точки  $A_1, B, C_1$  и  $H$ . Так как прямоугольные треугольники  $BA A_1$  и  $BCC_1$  подобны, то  $AB : A_1B = CB : C_1B$ . Отсюда следует, что треугольники  $A_1BC_1$  и  $ABC$  подобны. Заметим, что  $BQ$  и  $BP$ , а также  $BO_1$  и  $BO$  — пары соответствующих отрезков в подобных треугольниках  $A_1BC_1$  и  $ABC$ , откуда  $BO_1 : BO = BQ : BP$ , следовательно,  $OO_1 \parallel PQ$ .

Пусть  $B'$  — точка описанной окружности треугольника  $ABC$ , диаметрально противоположная точке  $B$ , тогда  $O$  — середина отрезка  $BB'$  и  $\angle BAB' = \angle BCB' = 90^\circ$ .

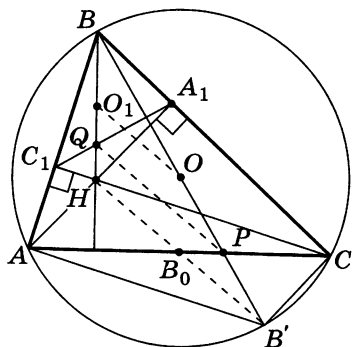


Рис. 110

Имеем:  $\angle ACB' = \angle BCB' - \angle BCA = 90^\circ - \angle BCA = \angle A_1AC$ , откуда  $AA_1 \parallel CB'$ . Аналогично  $CC_1 \parallel AB'$ . Таким образом,  $AHCB'$  — параллелограмм и  $B_0$  — его центр и, значит, лежит на диагонали  $HB'$ . В треугольнике  $BHB'$  отрезок  $OO_1$  является средней линией, поэтому  $OO_1 \parallel HB_0$ . Итак,  $OO_1 \parallel HB_0 \parallel PQ$ .

**10.7. Ответ:** при составных  $n$ .

Все числа в решении считаются натуральными, если не оговорено противное.

Пусть  $n$  — составное число, т. е.  $n = r \cdot s$ , где  $r > 1$ ,  $s > 1$ . Тогда достаточно рассмотреть числа  $b_1 = \dots = b_r = 1$ ,  $b_{r+1} = \dots = b_n = 2$ . Очевидно, что при всяком  $k$  число  $(b_1 + k) \dots (b_n + k)$  —  $r$ -я степень.

Пусть теперь  $n$  — простое число и  $b_1, \dots, b_n$  — произвольные натуральные числа, не все из которых равны. Без ограничения общности можно считать, что  $b_1, \dots, b_l$  — попарно различные числа, а каждое из чисел  $b_{l+1}, \dots, b_n$  равно одному из  $b_1, \dots, b_l$ . Пусть среди чисел  $b_1, \dots, b_n$  имеется  $s_i$  равных  $b_i$ , где  $1 \leq i \leq l$ , тогда  $s_1 + \dots + s_l = n$ .

Воспользуемся китайской теоремой об остатках: каковы бы ни были натуральные попарно взаимно простые числа  $a_1, a_2, \dots, a_l$  и целые неотрицательные числа  $r_1, r_2, \dots, r_l$  ( $r_1 < a_1, r_2 < a_2, \dots, r_l < a_l$ ), существует такое натуральное число  $m$ , которое при делении на числа  $a_1, a_2, \dots, a_l$  соответственно дает остатки  $r_1, r_2, \dots, r_l$ . Рассмотрим  $l$  различных простых чисел  $p_1, \dots, p_l$ , которые больше всех  $b_i$ , и положим  $a_i = p_i^2$ ,  $r_i = p_i - b_i$  при  $1 \leq i \leq l$ . Числа  $p_i^2$  попарно взаимно просты и  $0 < r_i < p_i < p_i^2$ , таким образом выполняются условия китайской теоремы об остатках. Рассмотрим существующее вследствие этой теоремы число  $m$  и докажем, что если  $(b_1 + m) \dots (b_n + m) = u^v$ , то  $v = 1$ .

Рассмотрим произвольное число  $i$ ,  $1 \leq i \leq l$ . Число  $b_i + m$  при делении на  $p_i^2$  дает остаток  $r_i + b_i = p_i$ . Отсюда ясно, что  $b_i + m$  делится на  $p_i$  и не делится на  $p_i^2$ . При  $j \neq i$  ( $1 \leq j \leq l$ ) имеем  $0 < |(b_i + m) - (b_j + m)| = |b_i - b_j| < p_i$ , поэтому  $b_j + m$  на  $p_i$  не делится.

Таким образом, в каноническом разложении числа  $(b_1 + m) \dots (b_n + m)$  на простые множители каждое число  $p_i$  содержится ровно в степени  $s_i$ .

Значит, число  $v$  является делителем всех  $s_i$ , а значит, и делителем их суммы  $n$ . При этом  $v < n$ , поэтому  $v = 1$ .

**10.8.** Рассмотрим конечное множество прямых  $H = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ , содержащих все горизонтальные стороны данных прямоугольников, и конечное множество прямых  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ , содержащих все вертикаль-

ные стороны прямоугольников. Будем считать, что  $h_1, h_2, \dots, h_k$  занумерованы снизу вверх, а  $v_1, v_2, \dots, v_l$  занумерованы слева направо. Пару прямых  $(h, v)$ , где  $h \in H, v \in V$ , назовем *удачной*, если все прямоугольники, не пересекающие ни  $h$ , ни  $v$  (если такие найдутся), расположены ниже  $h$  и левее  $v$ . Ясно, что *удачные* пары существуют: например, пара  $(h_k, v_l)$  *удачная*.

Среди всех *удачных* пар выберем пары  $(h_m, v)$ , в которых  $h_m$  самая низкая, а среди всех *удачных* пар вида  $(h_m, v)$  выберем пару  $(h_m, v_n)$ , в которой  $v_n$  самая левая. Если каждый данный прямоугольник пересекает  $h_m$  или  $v_n$ , то пара  $(h_m, v_n)$  искомая. Пусть это не так; тогда найдется прямоугольник  $\Pi$ , расположенный ниже  $h_m$  и левее  $v_n$  (в частности,  $m > 1$  и  $n > 1$ ).

Поскольку пара прямых  $(h_{m-1}, v_n)$  не является *удачной*, найдется прямоугольник  $\Pi_1$  (рис. 111), не пересекающий  $v_n$ , нижняя сторона которого лежит на  $h_m$  (иначе все прямоугольники, пересекающие  $h_m$  или  $v_n$ , пересекают также  $h_{m-1}$  или  $v_n$ ). Если бы  $\Pi_1$  лежал правее  $v_n$ , пара прямоугольников  $\Pi$  и  $\Pi_1$  не удовлетворяла бы условию. Следовательно,  $\Pi_1$  находится левее  $v_n$ . Аналогично, так как пара прямых  $(h_m, v_{n-1})$  не является *удачной*, найдется прямоугольник  $\Pi_2$ , не пересекающий  $h_m$ , левая сторона которого лежит на  $v_n$ , причем  $\Pi_2$  находится ниже  $h_m$ . Но тогда пара прямоугольников  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  не удовлетворяет условию — противоречие.

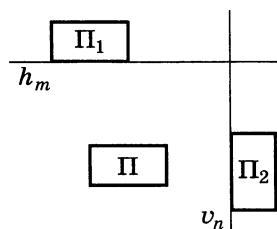


Рис. 111

## ▼ 11 класс

11.1. См. решение задачи 9.2.

11.2. Ответ: 50 гирь.

Пусть набор состоит из 20 гирь массой 50 г и 30 гирь массой 40 г. В этом случае Петя может разделить все гири на 10 групп, в каждой из которых две гири массой 50 г и три гири массой 40 г, а Вася может разделить все гири на 5 групп, в каждой из которых 4 гири массой 50 г, и 6 групп, в каждой из которых 5 гирь массой 40 г. Таким образом, значение  $N = 50$  возможно.

Предположим, что  $N < 50$  и Пете с Васей удалось разложить гири на группы нужным образом. Тогда в одной из Петиних групп не более 4 гирь и в одной из Васиних групп также не более 4 гирь.

**Лемма.** Пусть имеются две группы гирь равной суммарной массы, состоящие из  $k$  и  $l$  гирь, где  $k < l$ . Тогда  $k \geq 4$ , причем в случае  $k = 4$  имеем  $l = 5$ , и в каждой из групп массы гирь равны.

**Доказательство.** Пусть  $m$  — масса самой легкой гири в группе из  $l$  гирь, тогда масса второй группы не меньше  $lm \geq (k + 1)m$ , а масса первой группы не больше  $1,25 \cdot km$ , откуда  $k + 1 \leq 1,25k$  и  $k \geq 4$ . Если  $k = 4$ , то в указанных выше оценках неравенства обращаются в равенства, поэтому  $l = k + 1 = 5$ , в группе из 5 гирь все гири одинаковой массы  $m = 4x$ , а в группе из 4 гирь все гири массой  $5x$ . Лемма доказана. ■

1) Предположим, что среди Петиних групп найдутся две группы с разным количеством гирь. Тогда из леммы следует, что в нескольких Петиних группах по 4 гири массы  $5x$ , а в остальных Петиних группах по 5 гирь массы  $4x$ . Общий вес всех гирь тогда равен  $200x$ , что невозможно, так как 200 не делится на 11, а суммарная масса в каждой Васиной группе должна быть целым кратным  $x$ .

2) Предположим, что в 10 Петиних группах равное число гирь. Тогда  $N : 10$ .

Если среди Васиных групп найдутся две группы с разным количеством гирь, то из леммы следует, что в каждой из Васиных групп не менее 4 гирь, откуда  $N \geq 44 \Rightarrow N \geq 50$  (так как  $N : 10$ ) — противоречие.

Если же в 11 Васиных группах равное число гирь, то  $N : 11 \Rightarrow N : 110 \Rightarrow N \geq 110$  — противоречие.

**11.3. Лемма.** Пусть  $p$  — простое число. Тогда число  $2^n$  представляется в виде  $a^p + b^p$  тогда и только тогда, когда  $n - 1 : p$ .

**Доказательство.** Если  $n - 1 = kp$ , то представление существует:  $2^n = (2^k)^p + (2^k)^p$ . Предположим, что при некотором  $n$  такое представление нашлось:  $2^n = a^p + b^p$ . Пусть  $a = 2^s k$ ,  $b = 2^t l$ , где  $k, l$  нечетны. Если, скажем,  $s > t$ , то  $a^p + b^p = 2^{pt} (2^{p(s-t)} k^p + l^p)$ , и число  $2^n$  имеет нечетный делитель  $2^{p(s-t)} k^p + l^p$ , больший единицы; это невозможно. Значит,  $s = t$ , и тогда  $a^p + b^p = 2^{pt} (k^p + l^p)$ .

Если  $p = 2$ , то число  $k^p + l^p$  имеет остаток 2 при делении на 4, и если оно больше 2, то  $2^n$  имеет нечетный делитель  $\frac{k^p + l^p}{2}$ , больший 1; это невозможно, поэтому  $k = l = 1$ ,  $2^n = 2 \cdot 2^{pt}$ , и  $n = pt + 1$ , что и требовалось. Если же  $p > 2$ , то оно нечетно, и

$$k^p + l^p = (k + l)(k^{p-1} - k^{p-2}l + \dots + l^{p-1}).$$



Вторая скобка нечетна и является делителем числа  $2^n$ , поэтому она равна 1; значит,  $k^p + l^p = k + l$ , что возможно лишь при  $k = l = 1$ , и тогда опять получаем  $n = pt + 1$ . Лемма доказана. ■

Перейдем к решению задачи. Пусть  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ . Положим  $x = 2^{p_1 p_2 \dots p_n} + 1$ . Тогда по лемме это число является искомым.

**Замечание.** Легко видеть, что существует бесконечно много таких чисел; подходят, например, все числа вида  $2^{p_1^k p_2 \dots p_n} + 1$ .

**11.4.** Заметим, что наименьший круг, содержащий нетупоугольный треугольник, — это его описанный круг; для тупоугольного же треугольника это круг, построенный на его наибольшей стороне как на диаметре. Пусть описанная сфера  $\Omega$  нашего тетраэдра  $ABCD$  имеет центр  $O$  и радиус  $R$ . Предположим, что  $O$  лежит вне тетраэдра или на его границе. Рассмотрим ближайшую к  $O$  точку  $X$  тетраэдра. Возможны два случая.

1. Точка  $X$  лежит внутри некоторой грани (скажем,  $ABC$ ). Тогда  $X$  является центром описанной окружности  $\omega$  треугольника  $ABC$ , этот треугольник остроугольный, поэтому радиус  $\omega$  есть  $r \leq 1$ . При этом точки  $D$  и  $O$  лежат в разных полупространствах относительно  $ABC$ , и сфера с центром в точке  $X$  и радиусом  $r$  содержит сферическую шапочку сферы  $\Omega$ , содержащую  $ABCD$ . Значит, эта сфера содержит и  $ABCD$ .

2. Точка  $X$  лежит на ребре  $AB$ . Тогда проекция  $O_1$  точки  $O$  на плоскость  $ABC$  лежит вне граней; более того,  $X$  является ближайшей к  $O_1$  точкой треугольника  $ABC$ . Поэтому  $O_1$  и  $C$  лежат в разных полуплоскостях относительно прямой  $AB$ , угол  $ACB$  тупой, и точка  $C$  лежит в шаре, построенном на  $AB$  как на диаметре (радиус этого шара по условию не превосходит 1). Аналогично  $D$  лежит в этом шаре, поэтому шар содержит весь тетраэдр.

В обоих случаях тетраэдр поместился в шар радиуса 1. Нам осталось разобрать только случай, когда  $O$  лежит внутри тетраэдра. В этом случае сумма объемов пирамид  $ABCO$ ,  $ABDO$ ,  $ACDO$  и  $BCDO$  равна  $V_{ABCD}$ , поэтому один из них не превосходит  $V_{ABCD} : 4$ ; пусть это объем пирамиды  $ABCO$ . Пусть луч  $DO$  пересекает плоскость  $ABC$  в точке  $D_1$ ; тогда  $\frac{1}{4} \geq \frac{V_{ABCO}}{V_{ABCD}} = \frac{OD_1}{DD_1}$ , поэтому  $OD_1 \leq \frac{1}{3} OD = \frac{R}{3}$ .

Рассмотрим ближайшую к  $O$  точку  $X$  на границе тетраэдра. Она не может лежать на ребре тетраэдра, пото-

му что угол между одной из граней и отрезком  $OX$  будет острым. Значит, она лежит внутри одной из граней (скажем,  $ABC$ ), является центром ее описанной окружности и по доказанному выше  $XO \leq \frac{R}{3}$ . Тогда радиус описанной окружности этой грани не менее  $\sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$ . Так как по условию он не больше 1, то  $R \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$ , и мы нашли шар требуемого радиуса, содержащий тетраэдр.

#### 11.5. Ответ: не может.

**Первое решение.** Предположим, что такое возможно. Пусть  $a$  — простое число,  $77 < a \leq 150$ , а  $b$  — число, стоящее в соседней по стороне клетке. Если уравнение  $x^2 - bx + a = 0$  имеет два целых корня, то по теореме Виета их произведение равно  $a$ , а сумма равна  $b > 0$ . Значит, эти корни — 1 и  $a$  и  $b = 1 + a$ . Если же  $x^2 - ax + b = 0$  имеет два целых корня  $x_1$  и  $x_2$ , то  $x_1 + x_2 = a$ ,  $x_1 x_2 = b$ . Если при этом  $x_1, x_2 \geq 2$ , то  $b = x_1(a - x_1) \geq 2(a - 2)$ , так как функция  $t(a - t)$  возрастает при  $t \leq \frac{a}{2}$ ; значит,  $b \geq 2a - 4 > 150$ , что невозможно. Значит, в этом случае один из корней равен 1 и  $b = 1 \cdot (a - 1) = a - 1$ .

Итак, для таких простых значений  $a$  возможны лишь два варианта числа, стоящего в соседней клетке:  $b = a - 1$  и  $b = a + 1$ . Значит, у клетки с числом  $a$  только две соседние и она — угловая. Однако существуют хотя бы 5 простых чисел  $a$ , находящихся между 77 и 150 (например, 79, 83, 89, 97, 101); все они не могут стоять в углах, так как углов всего 4 — противоречие.

**Второе решение.** Как и в первом решении, докажем, что соседними с простым числом  $a \in [78, 150]$  могут быть лишь числа  $a - 1$  и  $a + 1$ . Значит, простые числа 101 и 103 должны стоять в углах и их соседями должны являться 100, 102 и 102, 104. Но клетка с числом 102 не может быть соседней с двумя угловыми — противоречие.

- 11.6. Пусть  $A = A_{2008}$ . Диагонали, выходящие из вершины  $A$ , делят его на 2006 треугольников  $AA_1A_2, \dots, AA_{2006}A_{2007}$ . Пусть  $AM_1, \dots, AM_{2006}$  — медианы этих треугольников. Покажем, что, назвав все пары точек  $(A, M_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, 2006$ ), фокусник сможет отгадать площадь многоугольника. Пусть  $S_k$  — площадь, сообщаемая фо-

куснику для прямой  $AM_k$ , а  $2T_k$  — площадь треугольника  $AA_kA_{k+1}$ . Так как медиана делит треугольник на две равновеликие части, то  $S_k = \min \{2(T_1 + \dots + T_{k-1}) + T_k, T_k + 2(T_{k+1} + \dots + T_{2006})\}$ . При этом ясно, что  $S_1 = T_1$  и  $S_{2006} = T_{2006}$ . Заметим, что фокуснику достаточно найти все  $T_k$ .

Пусть  $AL$  — прямая, делящая площадь многоугольника пополам. Если отрезки  $AM_1, \dots, AM_t$  лежат по одну сторону от прямой  $AL$ , а отрезки  $AM_{t+1}, \dots, AM_{2006}$  — по другую, то фокуснику будут сообщать площади многоугольников  $AA_1 \dots A_k M_k$  при  $k = 1, \dots, t$  и многоугольников  $AA_{2007} \dots A_{k+1} M_k$  при  $k = t+1, \dots, 2006$ . Поэтому  $S_1 < \dots < S_t$  и  $S_{t+1} > \dots > S_{2006}$ . Таким образом, если фокусник обнаружил, что  $S_1 < \dots < S_n \geq S_{n+1} > \dots > S_{2006}$ , то  $t = n$  или  $t = n-1$ . Следовательно, при  $k = 1, \dots, n-1$  имеем  $S_k = 2(T_1 + \dots + T_{k-1}) + T_k$  (отсюда находятся  $T_1, \dots, T_{n-1}$ ), а при  $k = n+1, \dots, 2006$  имеем  $S_k = T_k + 2(T_{k+1} + \dots + T_{2006})$  (отсюда находятся  $T_{2006}, \dots, T_{n+1}$ ). Остается найти  $T_n$ , которое вычисляется из равенства  $S_n = 2 \min \{T_1 + \dots + T_{n-1}, T_{n+1} + \dots + T_{2006}\} + T_n$ .

- 11.7. Пусть  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — вписанные окружности треугольников  $ADP$  и  $CDQ$ ,  $I_1$  и  $I_2$  — их центры,  $r_1$  и  $r_2$  — их радиусы. Так как окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  гомотетичны с центром  $D$ , то  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{DI_1}{DI_2}$ .

1. Пусть  $r_1 \neq r_2$  и  $S$  — центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящий  $\omega_1$  в  $\omega_2$  (т. е. точка пересечения общих внешних касательных к окружностям, рис. 112). Второе из условий равносильно тому, что  $\frac{HI_1}{HI_2} = \frac{r_1}{r_2}$ . Известно, что множество всех точек  $X$ , таких, что  $\frac{XI_1}{XI_2} = \frac{DI_1}{DI_2} = \frac{SI_1}{SI_2}$ , есть окружность с диа-

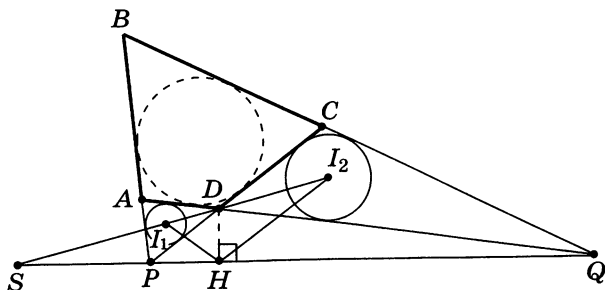


Рис. 112

метром  $SD$  (она называется *окружностью Аполлония*). Поэтому последнее условие равносильно тому, что  $\angle DHS = 90^\circ$ , т. е. тому, что  $S$  лежит на прямой  $PQ$ . Остается доказать, что условие  $S \in PQ$  равносильно тому, что четырехугольник  $ABCD$  описан.

Пусть четырехугольник  $ABCD$  описан вокруг некоторой окружности  $\omega$ . Из теоремы о трех центрах гомотетии следует, что точки  $S$ ,  $P$  и  $Q$  лежат на одной прямой (как центры гомотетий с положительными коэффициентами, переводящих  $\omega_1$  в  $\omega_2$ ,  $\omega$  в  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  в  $\omega$ ). Наоборот, предположим, что  $S$  лежит на  $PQ$ . Пусть  $\omega$  — вневписанная окружность треугольника  $CDQ$ , касающаяся его стороны  $CD$ . Пусть  $T$  — центр гомотетии с положительным коэффициентом окружностей  $\omega$  и  $\omega_1$  (точка пересечения их общих внешних касательных). Из теоремы о трех центрах гомотетии следует, что  $T$ ,  $Q$  и  $S$  лежат на одной прямой, т. е.  $T$  лежит на прямой  $PQ$ . С другой стороны,  $T$  лежит на прямой  $PC$ , поэтому  $T$  совпадает с  $P$ . Тогда прямая  $PB$  касается  $\omega$ , т. е. четырехугольник  $ABCD$  описан вокруг  $\omega$ .

2. Пусть  $r = r_2$ , тогда  $\omega_1$  и  $\omega_2$  симметричны относительно биссектрисы  $l$  угла  $ADC$ . Второе из условий равносильно тому, что  $HI_1 = HI_2 \Leftrightarrow DH \perp I_1I_2 \Leftrightarrow I_1I_2 \parallel PQ$ . Если четырехугольник  $ABCD$  описан около  $\omega$ , то  $\omega$  симметрична относительно  $l$ . Тогда прямые  $BA$  и  $BC$ ,  $DC$  и  $DA$  симметричны относительно  $l$  (как общие касательные к  $\omega$  и  $\omega_1$ ,  $\omega$  и  $\omega_2$ ), а значит,  $P$  и  $Q$  также симметричны и  $PQ \parallel I_1I_2$ .

Наоборот, если  $I_1I_2 \parallel PQ$ , то прямые  $DA$  и  $DC$  симметричны относительно прямой  $DH$  (как касательные к  $\omega_1$  и  $\omega_2$ )  $\Rightarrow$  точки  $P$  и  $Q$  симметричны относительно  $DH \Rightarrow$  прямые  $BA$  и  $BC$  симметричны относительно прямой  $DH \Rightarrow$  четырехугольник  $ABCD$  симметричен относительно прямой  $DH$ , следовательно, он описан.

**11.8. Доказательство.** Назовем *шагом* шахматиста количество партий между двумя его соседними играми (включая вторую из них). Тогда все шаги не меньше  $n + 1$ .

Рассмотрим любые  $n + 3$  последовательные игры  $g_1, \dots, g_{n+3}$ ; в них  $2n + 6$  участников. Заметим, что только три шахматиста могли участвовать в этих партиях дважды. Действительно, это могло произойти только в парах партий  $(g_1, g_{n+2})$ ,  $(g_1, g_{n+3})$ ,  $(g_2, g_{n+3})$ , и в каждой паре может быть только один такой участник (иначе два шахматиста сыграют дважды). Значит, чтобы набралось  $2n + 6$  участников, для каждой из этих трех пар партий должен найтись шахматист, участвовавший в обеих партиях этой пары; каждый же из



Рис. 113

остальных  $2n$  шахматистов должен участвовать ровно в одной из партий  $g_2, \dots, g_{n+2}$ . (В частности, каждый из  $2n + 3$  шахматистов участвует хотя бы в одной из партий  $g_1, \dots, g_{n+2}$ ). Мы получили, что *шаги* шахматистов из партии  $g_1$  равны  $n + 1$  и  $n + 2$  (а *шаг* одного участника партии  $g_2$  также равен  $n + 1$ ). Значит, любой *шаг* любого шахматиста равен  $n + 1$  или  $n + 2$ .

Если найдется шахматист  $Z$ , все *шаги* которого равны  $n + 2$ , то сумма  $2n + 1$  его *шагов* будет равна  $(n + 2)(2n + 1) = 2n^2 + 5n + 2$ ; поскольку всего игр было  $\frac{(2n + 3)(2n + 2)}{2} = 2n^2 + 5n + 3$ , это означает, что  $Z$

обязан участвовать и в первой, и в последней играх, что и требовалось. Покажем, что такой шахматист  $Z$  найдется.

Предположим противное: пусть каждый шахматист делал *шаг*  $n + 1$ . Рассмотрим шахматиста  $X$ , который сделал первый такой свой *шаг* последним; пусть в результате этого *шага* он встретился с шахматистом  $Y$  в  $t$ -й игре. Тогда  $Y$  делал *шаг*  $n + 1$  до этого; пусть последний такой его *шаг* (до  $t$ -й партии) был из  $q$ -й партии в  $q + (n + 1)$ -ю (рис. 113). Тогда все его последующие *шаги* (до  $t$ -й партии) были по  $n + 2$ , поэтому  $t = q + (n + 1) + k(n + 2)$ . С другой стороны, все предыдущие *шаги*  $X$  были по  $n + 2$ ; поэтому если он сделал хотя бы  $k$  таких *шагов*, то за  $k + 1$ -й *шаг* до  $t$ -й партии он участвовал в партии с номером  $t - (n + 1) - k(n + 2) = q$ ; следовательно, он встречался с  $Y$  дважды. Если же  $X$  сделал до  $t$ -й партии меньше  $k + 1$  *шагов*, то его первая партия имела номер, не меньший  $t - (n + 1) - (k - 1)(n + 2) = q + (n + 2) \geq n + 3$ ; этого также не может быть, так как по доказанному все шахматисты участвовали в первых  $n + 2$  партиях. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993—2006 гг.: окружной и финальный этапы / Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников и др.; под ред. Н. Х. Агаханова. — М.: МЦНМО, 2007.

Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 1 / Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников и др. — М.: Просвещение, 2008.

Математические олимпиады: 9 кл. / Н. Х. Агаханов, Л. П. Купцов, Ю. В. Нестеренко и др. — М.: Просвещение: Учеб. лит., 1997.

Агаханов Н. Х. Математические олимпиады Московской области / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. — М.: Физматкнига, 2006.

Агаханов Н. Х. Всероссийская олимпиада школьников по математике: метод. пособие / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский; науч. ред. Э. М. Никитин. — М.: АПКиППРО, 2005.

Агаханов Н. Х. Школьные математические олимпиады / Н. Х. Агаханов, Д. А. Терешин, Г. М. Кузнецова. — М.: Дрофа, 1999.

Берлов С. Л. Петербургские математические олимпиады / С. Л. Берлов, С. В. Иванов, К. П. Кохась. — СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2005.

Васильев Н. Б. Задачи Всесоюзных математических олимпиад / Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. — М.: Наука, 1988.

Виленкин Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин. — М.: ФИМА: МЦНМО, 2006.

Гальперин Г. А. Московские математические олимпиады / Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго. — М.: Просвещение, 1986.

Генкин С. А. Ленинградские математические кружки / С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. — Киров: Аса, 1994.

Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике / Н. В. Горбачев. — М.: МЦНМО, 2005.

Зарубежные математические олимпиады / под ред. И. Н. Сергеева. — М.: Наука, 1987.

Канель-Белов А. Я. Как решают нестандартные задачи / А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи; под ред. В. О. Бугаенко. — М.: МЦНМО, 2004.

Математические олимпиады: 10 кл. / Л. П. Купцов, Ю. В. Нестеренко, С. В. Резниченко, А. М. Слинько. — М.: Просвещение: Учеб. лит., 1998.

Математические олимпиады: 11 кл. / Л. П. Купцов, Ю. В. Нестеренко, С. В. Резниченко, А. М. Слинько. — М.: Просвещение: Учеб. лит., 1999.

*Купцов Л. П.* Российские математические олимпиады школьников: кн. для учащихся / Л. П. Купцов, С. В. Резниченко, Д. А. Терешин. — Ростов-на-Дону: Феникс, 1996.

Венгерские математические олимпиады / Й. Кюршак, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани. — М.: Мир, 1976.

*Леман А. А.* Сборник задач Московских математических олимпиад / А. А. Леман. — М.: Просвещение, 1965.

*Муштари Д. Х.* Подготовка к математическим олимпиадам / Д. Х. Муштари. — Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2000.

*Оре О.* Графы и их применение / О. Оре. — М.: Ком-Книга, 2006.

*Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2006.

*Прасолов В. В.* Задачи по стереометрии / В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. — М.: Наука, 1989.

*Савин А. П.* Физико-математические олимпиады: сборник задач / А. П. Савин [и др.]. — М.: Знание, 1977.

*Седракия Н. М.* Неравенства. Методы доказательства / Н. М. Седракия, А. М. Авоян. — М.: Физматлит, 2002.

*Серпинский В.* 250 задач по теории чисел / В. Серпинский. — М.: НИЦРХД, 2004.

*Фомин Д. В.* Санкт-Петербургские математические олимпиады / Д. В. Фомин. — СПб.: Политехника, 1994.

Московские математические олимпиады 1993—2005 гг. / Р. М. Федоров, А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи, И. В. Яценко; под ред. В. М. Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2006.

*Шарыгин И. Ф.* Геометрия. Планиметрия: 9—11 кл. / И. Ф. Шарыгин. — М.: Дрофа, 2001.

*Эвнин А. Ю.* Элементарная теория чисел: сборник олимпиадных задач / А. Ю. Эвнин. — Челябинск: Изд-во ЧГТУ, 1996.

Всероссийские математические олимпиады / Г. Н. Яковлев, Л. П. Купцов, С. В. Резниченко, П. Б. Гусятников. — М.: Просвещение, 1992.

### **Об авторах**

**Назар Хангельдыевич Агаханов** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского физико-технического института (государственного университета), председатель Методической комиссии Всероссийской математической олимпиады школьников, заслуженный работник высшей школы РФ.

**Олег Константинович Подлипский** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского физико-технического института (государственного университета), заместитель председателя Методической комиссии Всероссийской математической олимпиады школьников.



Учебное издание

Серия «Пять колец»

**Агаханов Назар Хангельдыевич**  
**Подлипский Олег Константинович**

**МАТЕМАТИКА**  
**ВСЕРОССИЙСКИЕ ОЛИМПИАДЫ**

Выпуск 2

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*

Редактор *Т. Ю. Акимова*

Младшие редакторы *Е. А. Андрееenkova, Е. В. Трошко*

Дизайн обложки *С. Ю. Биричев*

Художник *О. П. Богомолова*

Художественный редактор *О. П. Богомолова*

Технический редактор и верстальщик *Н. В. Лукина*

Корректоры *Н. А. Юсупова, Ю. Б. Григорьева*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 01.10.08. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 8,55. Тираж 7000 экз. Заказ № 27487.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».  
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».  
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. [www.sarpk.ru](http://www.sarpk.ru)