

Задачи на сложные проценты.

Процентом называется сотая часть числа.

1. Если число a составляет $p\%$ от числа b , то эти числа связаны

равенством $\frac{b}{100} = \frac{a}{p}$ или $100 \cdot a = b \cdot p$.

2. Если число a увеличено на $p\%$, то оно увеличено в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

раз, а если число a уменьшено на $t\%$, где $0 \leq t \leq 100$, то оно

уменьшено в $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$ раз. Значит, получаются соответст-

венно следующие числа $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ и $a\left(1 - \frac{t}{100}\right)$.

3. Если имеется некоторая величина A_0 , которая увеличивается на $p\%$ за некоторый промежуток времени. Затем ее новое значение опять увеличивается на $p\%$. При этом процесс со-

держит n этапов, то $A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

4. Если на каждом этапе происходит уменьшение на $p\%$, то

$$A_n = A_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n.$$

Задача 1.

На бирже ценных бумаг акции одной фирмы продавались по цене 400000 рублей. После непредвиденных осложнений фирма вы-

нуждена была дважды понизить цену на свои акции на один и тот же процент. В результате акции начали продавать по цене 282240 рублей. Найдите процент уценки.

Решение.

Пусть $A_0=400000$, а $A_n=28240$. Цена акций понижалась два раза, т.е. $n=2$. Процент уценки равен x . По смыслу задачи $x>0$. Приме-

ним формулу «сложных процентов» $A_n = A_0 \left(1 - \frac{x}{100}\right)^n$, т.е.

$$282240 = 400000 \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2$$

$$0,7056 = (1 - 0,01x)^2$$

$$\sqrt{0,7056} = \sqrt{(1 - 0,01x)^2}$$

$$|0,84| = |1 - 0,01x|$$

$$1 - 0,01x = 0,84 \quad \text{или} \quad 1 - 0,01x = -0,84$$

$$-0,01x = -0,16 \quad \quad \quad -0,01x = -1,84$$

$$x = 16 \quad \quad \quad x = 184$$

Значение $x = 184$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 16.

Задача 2.

Если положить на вклад «Молодежный» некоторую сумму денег, то ежегодно она увеличивается на 12% от имеющейся на вкладе суммы. Вкладчик собирается положить на этот вклад деньги на два года подряд и не пополнять и не снимать со счета. Сколько

рублей надо положить вкладчику, чтобы через два года вложенная сумма увеличилась на 1272 рубля?

Решение.

Применим формулу «сложных процентов» $A_n = A_0 \left(1 + \frac{x}{100}\right)^n$, где

$A_n = A_0 + 1272$; $x = 12$; $n = 2$. Следовательно,

$$A_0 + 1272 = A_0 (1 + 0,12)^2$$

$$A_0 + 1272 = 1,2544 A_0$$

$$0,2544 A_0 = 1272$$

$$A_0 = 5000.$$

Вкладчик должен положить 5000 рублей.

Ответ: 5000.

Задача 3.

Предприятие уменьшило выпуск продукции на 20%. На сколько процентов необходимо теперь увеличить выпуск продукции, чтобы достигнуть его первоначального уровня?

Решение.

Пусть выпуск продукции равен x , что соответствует 100%. После снижения на 20% выпуск продукции равен $0,8x$.

Теперь выпуск продукции равен $0,8x$, что соответствует 100%.

Первоначальному уровню продукции соответствует $y\%$.

$$0,8x \quad -- \quad 100\%$$

$$x \quad -- \quad y\%, \text{ отсюда } y=125.$$

Выпуск продукции необходимо увеличить на $125\%-100\%=25\%$, чтобы он стал равен первоначальному.

Ответ: 25.

Задача 4.

В январе пакет акций стоил на 10% меньше, чем в феврале. В феврале этот же пакет акций стоил на 20% меньше, чем в марте. На сколько процентов меньше стоимость пакета акций в январе, чем в марте?

Решение.

Пусть x – стоимость пакета акций в феврале;

$0,9x$ – стоимость пакета акций в январе;

$1,2x$ – стоимость пакета акций в марте.

Стоимость пакета акций в январе меньше, чем в марте

$$\frac{1,2x - 0,9x}{1,2x} \cdot 100\% = 25\%.$$

Ответ: 25.

Задача 5.

Торговая база закупила партию альбомов и поставила их в магазин по оптовой цене, которая на 30% больше закупочной. Магазин установил розничную цену на альбом на 20% выше оптовой.

При распродаже в конце сезона магазин снизил розничную цену на альбом на 10%. На сколько рублей больше заплатил покупатель по сравнению с закупочной ценой, если на распродаже он приобрел альбом за 70,2 рубля?

Решение.

Пусть x рублей – закупочная цена альбома. Торговая база поставила альбомы в магазин по цене на 30% выше закупочной, т.е. по $1,3x$ рубля.

Цена альбома в магазине равна:

$1,3x$ -- 100%

y -- 120%, значит, $y=1,56x$ (руб).

При распродаже в конце сезона цена альбома равна:

$1,56x$ -- 100%

z -- 90%, значит, $z=1,404x$ (руб).

Согласно условию задачи, цена альбома при распродаже равна 70,2 рубля, т.е. $1,404x=70,2$; $x=50$ рублей.

Разность цен в магазине при распродаже и закупочной ценой равна

$70,2 - x = 70,2 - 50 = 20,2$ рубля.

Ответ: 20,2.

Задача 6.

Турист прошел весь маршрут за три дня. В первый день он прошел 30% всего пути, во второй – 60% остатка, после чего ему ос-

талось пройти на 1 км меньше, чем он пошел в первый день. Какова длина всего маршрута?

Решение.

Пусть длина всего маршрута равна x (км), тогда в первый день турист прошел $0,3x$ (км).

После первого дня остаток пути равен $x - 0,3x = 0,7x$ (км).

Во второй день турист прошел $0,6 \cdot 0,7x = 0,42x$ (км).

Туристу осталось пройти в третий день $0,7x - 0,42x = 0,28x$ (км).

По условию задачи турист прошел в третий день на 1 км меньше, чем он прошел в первый день. Отсюда имеем уравнение

$$0,3x - 0,28x = 1; \quad x = 50 \text{ (км)}.$$

Ответ: 50.

Задача 7.

Цену товара снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15% и, наконец, после перерасчета произвели снижение еще на 10%. На сколько всего процентов снизили первоначальную цену?

Решение.

1 способ.

Пусть x (рублей) – цена товара, после первого снижения товар стал стоить 0,8 рубля. После второго снижения цена товара равна:

$$0,8x \quad \text{--} \quad 100\%$$

y -- 85% , значит, $y=0,68x$ (руб).

После третьего снижения цена товара равна:

$0,68x$ -- 100%

z -- 90%, значит, $z=0,612x$ (руб).

Первоначально стоимость товара снизили на

$$\frac{x - 0,612x}{x} \cdot 100\% = 38,8\%.$$

Ответ: 38,8.

2 способ.

Если величина A_0 изменяется на первом этапе на $t_1\%$, на втором – $t_2\%$ и далее до $t_n\%$, то окончательное значение этой величины равна

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{t_1}{100}\right) \left(1 + \frac{t_2}{100}\right) \dots \left(1 + \frac{t_n}{100}\right)$$

Формула записана для случая, когда происходит на каждом этапе возрастание на определенный процент.

Если на каждом этапе происходит снижение на определенный процент, то окончательное значение A_n равно

$$A_n = A_0 \left(1 - \frac{t_1}{100}\right) \left(1 - \frac{t_2}{100}\right) \dots \left(1 - \frac{t_n}{100}\right).$$

Воспользуемся этой формулой:

$t_1 = 20\%$; $t_2 = 15\%$; $t_3 = 10\%$; A_0 – первоначальная цена товара; A_n – цена товара после трех «уценок»:

$$A_3 = A_0(1 - 0,2)(1 - 0,15)(1 - 0,1);$$

$$A_3 = A_0 \cdot 0,612.$$

Следовательно, новая цена составляет 61,2% от первоначальной цены (100%), которая снижена на $100\% - 61,2\% = 38,8\%$.

Ответ: 38,8.

Задачи для самостоятельного решения

1. На сколько процентов следует за один раз понизить цену товара, чтобы первая цена была равна цене товара после двух последовательных понижений на 10%.

Ответ: 19%.

2. В январе завод выполнил 105% месячного плана выпуска продукции, а в феврале дал продукции на 4% больше, чем в январе. На сколько процентов завод перевыполнил двухмесячный план выпуска продукции?

Ответ: 7,1%.

3. В сберегательный банк поместили некоторую сумму денег, и через два года она возросла на 51250 рублей. Сколько денег было положено в банк, если вкладчикам выплачивалось 5% годовых?

Ответ: 500000.

4. На опытном участке ежегодный прирост древесины составляет 10%. Какое количество древесины будет через четыре года, если первоначальное количество древесины 20000 м.

Ответ: 29 282 м.

5. Два завода должны были за месяц произвести 360 станков. Однако первый завод выполнил план на 110%, а второй – на 112%. В итоге было произведено 400 станков. Сколько станков сверх плана выпустил второй завод?

Ответ: 24.

6. Цена товара повысилась на 25%. На сколько процентов надо снизить новую цену товара, чтобы первоначальную цену.

Ответ: 20%.

7. После двух последовательных повышений зарплата составила $\frac{5}{2}$ первоначальной. На сколько процентов повысилась зарплата в первый раз, если второе повышение было в четыре раза больше первого, в процентном отношении?

Ответ: 50%.

8. В букинистическом магазине собрание сочинений стоимостью 100000 рублей уценивали дважды на одно и тоже число процентов. После уценки книги стали стоить 25 000 рублей. Найдите процент уценки.

Ответ: 50%.

9. В комиссионном магазине цена товара, выставленного на продажу, каждый месяц уменьшается на 10% от предыдущей цены. Определите первоначальную стоимость товара, если после трех уценок его продали за 4374 рубля.

Ответ: 6000 рублей.

10. Вкладчик положил на вклад «Накопительный» 30 000 рублей и три года подряд не пополнял свой вклад и не снимал с него

денег. За три года вложенная им сумма денег увеличилась на 9930 рублей. На сколько процентов ежегодно увеличивается сумма денег?

Ответ: 10%.

11. За год стипендия студента увеличилась на 32%. В первом полугодии стипендия увеличилась на 10%. Определите, на сколько процентов увеличилась стипендия во втором полугодии?

Ответ: 20%.

12. Магазин выставил на продажу шубу, назначив цену на 150% выше оптовой. В конце сезона цена была снижена на 20%, а на распродаже весной новая цена была снижена еще на 40% шуба была продана за 36000 рублей. Какую прибыль получил магазин?

Ответ: 6000 рублей.

13. Свежие фрукты содержат 72% воды, а сухие – 20% воды. Сколько сухих фруктов получится из 30 кг свежих фруктов?

Ответ: 10,5 кг.

14. Из 22 кг свежих грибов 2,5 кг сухих грибов, содержащих 12% воды. Какой процент воды содержат свежие грибы?

Ответ: 90%.

15. Цену товара повысили на 20%, затем новую цену повысили на 35%. На сколько процентов повысили первоначальную цену?

Ответ: 62%.

16. Во что превратилась бы через 4 года сумма в 100 рублей, если бы сберкасса начисляла ежегодно 10%?

Ответ: 146,41 рублей.

17. После двойного снижения цены на 10% книга в букинистическом магазине стала стоить 283 рубля 50 копеек. Какова первоначальная цена книги?

Ответ: 350 рублей.

18. В конце года в сбербанк было внесено 1680 у.е., а в конце года обратно 880 у.е. Еще через год общая сумма вклада оказалась равной 928,2 у.е. Сколько процентов годового дохода дает сбербанк?

Ответ: 5%.

19. Длину кирпича уменьшили на 26%, ширину уменьшили на 30%, высоту увеличили на 65%. Увеличивается или уменьшается объем этого кирпича и на сколько процентов?

Ответ: уменьшается на 14, 53%.

20. Килограмм товара стоил 640 рублей. После снижения цены он стал стоить 570 рублей. На сколько процентов снижена цена? Ответ округлить до десятых долей.

Ответ: 10,9%.

21. Влажность сухой цементной смеси на складе составляет 18%. Во время перевозки из-за дождей влажность смеси повысилась на 2%. Найдите массу привезенной смеси, если со склада было отправлено 400 кг.

Ответ: 410 кг.

22. После двух повышений зарплата увеличилась в 1,43 раза. При этом число процентов, на которое повысилась зарплата во вто-

рой раз, было в 3 раза больше, чем в первый раз. На сколько процентов повысилась зарплата во второй раз?

Ответ: 30%.

23. За первый год предприятие увеличило выпуск продукции на 8%. В следующем году выпуск увеличился на 25%. На сколько процентов вырос выпуск продукции по сравнению с первоначальным?

Ответ: 35%.

24. Собрали 140 кг грибов, влажность которых составляла 98%. После подсушивания их влажность снизилась до 93%. Какова стала масса грибов после подсушивания?

Ответ: 40 кг.

25. Зарплату повысили на $p\%$. Затем новую зарплату повысили на $2p\%$. В результате двух повышений зарплата увеличилась в 1,32 раза. На сколько процентов зарплата была повышена во второй раз?

Ответ: 20%.

26. Сколько воды надо выпарить из 500 кг цементной массы, содержащей 80% воды, чтобы получить массу с содержанием 75% воды.

Ответ 100 кг.

27. Цену товара сперва понизили на 20 процентов, затем новую цену снизили еще на 5% и, наконец, еще на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

Ответ: 31,6%.

28. Сколько воды нужно выпарить из 500 кг целлюлозной массы, содержащей 90% воды, чтобы получить массу с содержанием воды 50%.

Ответ: 400 кг.