

### Самостоятельная работа №8. Координаты точек на плоскости. Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца.

1. Проверка д/з: вопросы?
2. Самостоятельная работа №8 (на листочках; 25 минут).

#### Ответы и решения.

I вариант.	II вариант.
<b>№1.</b> А) $\vec{c} = (5; -10)$ . Б) Так как $\frac{5}{-2} = \frac{-10}{4}$ , то есть, $\vec{c} = -2,5 \cdot \vec{b}$ , то $\vec{c} \parallel \vec{b}$ .	<b>№1.</b> А) $\vec{c} = (-10; 20)$ . Б) Так как $\frac{-10}{3} = \frac{20}{-6}$ , то есть, $\vec{c} = -\frac{10}{3} \cdot \vec{a}$ , то $\vec{c} \parallel \vec{a}$ .
<b>№2.</b> А) запись! Б) $\vec{CB} = 2\vec{b} - 2\vec{m}$ ; $\vec{AK} = \vec{m} - 0,5\vec{b}$ ; $\vec{KB} = 1,5\vec{b} - \vec{m}$ .	<b>№2.</b> А) запись! Б) $\vec{AC} = 2\vec{k} - 2\vec{a}$ ; $\vec{MB} = 0,5\vec{a} - \vec{k}$ ; $\vec{AM} = \vec{k} - 1,5\vec{a}$ .
<b>№3.</b> Верно. Пусть $\vec{m} = \vec{AO} + \vec{CO}$ ; $\vec{n} = \vec{BO} + \vec{DO}$ , тогда $\vec{m} \parallel \vec{AC}$ , $\vec{n} \parallel \vec{BD}$ . Так как $\vec{m} + \vec{n} = \vec{0}$ , причем $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$ – не коллинеарны, то $\vec{m} \parallel \vec{n}$ , значит эти векторы – нулевые, следовательно точка О делит каждую диагональ пополам, то есть, ABCD – параллелограмм.	

**3. Новый материал.** Рассмотрим аффинную систему координат на плоскости, определяемую базисом  $(\vec{a}; \vec{b})$  (изобразить на доске и в тетрадях). Пусть О – начало координат.  $\forall M$  на плоскости  $\exists! \vec{OM}$  и наоборот,  $\forall \vec{OM}$  точка М определяется единственным образом. В таких случаях говорят, что соответствие между точками М плоскости и  $\{\vec{OM}\}$  на этой плоскости (где О – фиксированная точка) является **взаимно однозначным**. Пусть  $\vec{OM} = (\alpha; \beta)$ , тогда условимся считать, что М  $(\alpha; \beta)$ . Тем самым мы установим взаимно однозначное соответствие между точками координатной плоскости и парами действительных чисел, то есть, получим определение координат точки на плоскости. Такой  $\vec{OM}$ , где О – фиксированная точка плоскости, а М – произвольная точка называется **радиус-вектором точки М**.

Рассмотрим теперь произвольный  $\vec{AB}$  на этой плоскости. Пусть А  $(a_1; a_2)$ ; В  $(b_1; b_2)$ . Найдем координаты  $\vec{AB}$ .  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ ;  $\vec{OA} = (a_1; a_2)$ ;  $\vec{OB} = (b_1; b_2)$ ; значит,  $\vec{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$ , то есть, мы установили связь между координатами вектора и координатами его начала и конца: **координаты вектора в заданной системе координат получаются вычитанием соответствующих координат его конца и начала!** Это позволит в дальнейшем выполнять линейные операции над векторами в координатной форме, если заданы не координаты векторов, а только координаты точек их определяющих.

Установим ряд векторных и координатных соотношений, которые помогут при решении задач.

**1)** Пусть дан  $[AB]$  и точка  $M \in [AB]$  |  $|AM| : |MB| = m : n$  (см. рис. 1). Рассмотрим произвольную точку О на плоскости и выразим  $\vec{OM}$  через

$$\vec{OA} \text{ и } \vec{OB}. \quad \vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + x\vec{AB} = \vec{OA} + \frac{m}{m+n}\vec{AB} =$$

$$\vec{OA} + \frac{m}{m+n}(\vec{OB} - \vec{OA}) = \frac{n}{m+n}\vec{OA} + \frac{m}{m+n}\vec{OB}.$$

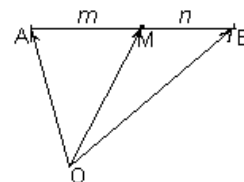


Рис. 1

Это утверждение можно также выразить и в координатной форме. Если задана аффинная система координат, в которой: А  $(a_1; a_2)$ ; В  $(b_1; b_2)$ ; М  $(x_1; x_2)$ , то

$$x_k = \frac{n \cdot a_k + m \cdot b_k}{m+n}, \text{ где } k = 1; 2. \text{ Это следует из полученного векторного равенства, если О –}$$

начало координат.

**Следствия.** 1)  $M \in [AB] \Leftrightarrow \forall O \exists t \mid 0 \leq t \leq 1 \text{ и } \vec{OM} = t\vec{OA} + (1-t)\vec{OB}.$

Доказательство. Необходимое условие того, что  $M \in [AB]$  следует непосредственно из равенства, доказанного в 1). Докажем достаточное условие. Рассмотрим равенство:  $\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$ . Так как оно выполняется для всех точек  $O$ , то возьмем  $O \equiv M$ :  $t\overrightarrow{MA} + (1-t)\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow t\overrightarrow{MA} + (1-t)(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) = \vec{0} \Leftrightarrow t\overrightarrow{MA} + (1-t)\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = (1-t)\overrightarrow{AB}$ . Следовательно,  $\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB}$  и так как  $0 \leq t \leq 1$ , то  $M \in [AB]$ , ч. т. д.

По аналогии, выполнение указанного равенства с другими ограничениями на переменную  $t$  является равносильным тому, что  $M \in (AB)$ , но расположена по другому. Укажите эти ограничения для случаев: а)  $M \in [AB]$ ; б)  $M$  принадлежит лучу, дополнительному к  $[AB]$ ; в)  $M \in (AB)$  [а)  $t \leq 1$ ; б)  $t \geq 1$ ; в)  $t \in \mathbb{R}$ ]

2)  $M$  – середина  $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ . Каков геометрический смысл этого равенства?

[Половина диагонали параллелограмма со сторонами  $OA$  и  $OB$  – *показать на рисунке*]

В координатной форме:  $M$  – середина  $[AB] \Leftrightarrow x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ , где  $k = 1; 2$ .

2) Пусть  $M$  – точка пересечения медиан  $\triangle ABC$  (см. рис. 2). Выразим  $\overrightarrow{OM}$  через  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  и  $\overrightarrow{OC}$ , где  $O$  – произвольная точка плоскости. Так как  $M \in [AA_1]$  и  $|AM| : |MA_1| = 2 : 1$ , то  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OA_1}$ ; так как  $A_1$  – середина  $[BC]$ , то  $\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ .

Значит,  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ .

Является ли полученное разложение  $\overrightarrow{OM}$  его разложением по базису? [Нет, так как базисом на плоскости является пара векторов]

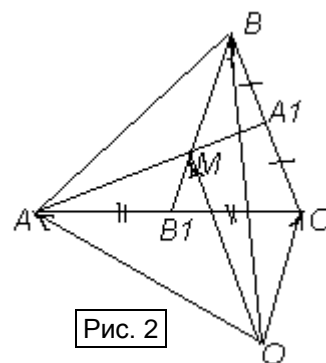


Рис. 2

В координатной форме: Пусть  $A(a_1; a_2)$ ;  $B(b_1; b_2)$ ;  $C(c_1; c_2)$ ;  $M(x_1; x_2)$  – точка пересечения медиан  $\triangle ABC \Rightarrow x_k = \frac{a_k + b_k + c_k}{3}$ , где  $k = 1; 2$ . Это следует из полученного векторного равенства, если  $O$  – начало координат.

Преимущество полученных векторных соотношений состоит в том, что они справедливы не только для плоскости! В координатной форме, для того, чтобы в дальнейшем перейти к пространству другой размерности (трехмерному, четырехмерному и т. д.) достаточно будет добавить необходимое количество координат.

Можно заметить и другой вид обобщения полученных соотношений. Как по другому называется точка пересечения медиан треугольника? [Центр тяжести] Середина отрезка также является его центром тяжести. Эту закономерность можно продолжить и получить соотношения для центра тяжести четырехугольника, пятиугольника и т. д. Желаящие смогут с этим ознакомиться, прочитав в учебнике А.: п. 24.7.

**Домашнее задание:** координаты точек и их связь с координатами вектора; векторные и координатные соотношения – по тетради; А.: №22.23; №22.31; Кв.: №391 (б); №394 (по вариантам). А.: п. 24.7; *доп. к с/р.*