

Логарифмы и их изучение в школьном курсе математики

Презентацию подготовила
Курсекова Ольга Олеговна

Основная образовательная цель изучения темы «Логарифмическая функция» может быть сформулирована так:

- 1) знать определение и свойства логарифма числа, логарифмической функции, уметь строить ее график, решать логарифмические уравнения и неравенства;
- 2) иметь представление о прикладных аспектах применения свойств логарифмической функции.

Основное содержание

Базовый уровень

- Логарифм числа.
- Основное логарифмическое тождество.
- Логарифм произведения, частного, степени.
- Десятичный и натуральный логарифмы, число e .
- Преобразования простейших выражений, включающих операцию логарифмирования.
- Логарифмическая функция, её свойства и график.
- Решение логарифмических уравнений и неравенств.

Профильный уровень

- Логарифм числа.
- Основное логарифмическое тождество.
- Логарифм произведения, частного, степени.
- **Формула перехода к новому основанию.**
- Десятичный и натуральный логарифмы, число e .
- **Вычисление десятичных и натуральных логарифмов на калькуляторе.**
Применения логарифмов в реальной практике.
- Преобразования простейших выражений, включающих операцию логарифмирования.
- Логарифмическая функция, её свойства и график.
- Решение логарифмических уравнений и неравенств.

ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ПОДГОТОВКИ ВЫПУСКНИКОВ

Базовый уровень

уметь:

- находить значения логарифма, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах;
- проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих логарифмы;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для практических расчетов по формулам, включая формулы, содержащие логарифмы, при необходимости используя справочные материалы;
- строить графики логарифмических функций;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для описания с помощью функций различных зависимостей, представления их графически, интерпретации графиков;
- решать логарифмические уравнения и неравенства.

Профильный уровень

уметь:

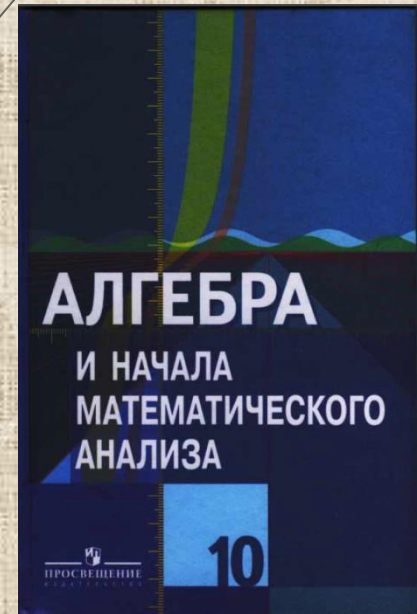
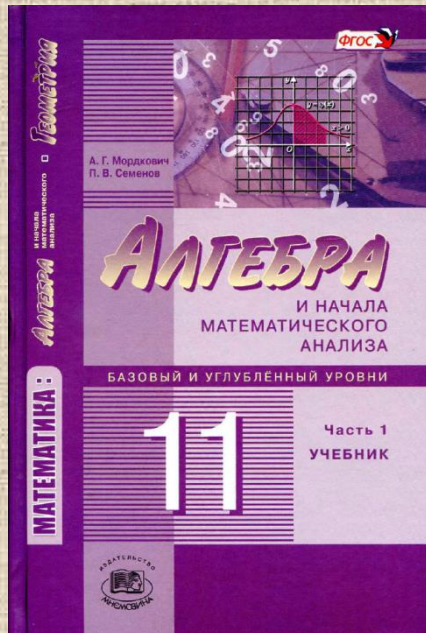
- находить значения логарифма, используя при необходимости вычислительные устройства; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для практических расчетов по формулам, включая формулы, содержащие логарифмы, при необходимости используя справочные материалы и простейшие вычислительные устройства;
- строить графики логарифмических функций, выполнять преобразования графиков; описывать по графику и по формуле поведение, свойства функций;
- решать логарифмические уравнения и неравенства, их систем;
- доказывать несложные логарифмические неравенства;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для построения и исследования простейших математических моделей.

Оглавление

Глава 3. Показательная и логарифмическая функции

§ 11. Показательная функция, её свойства и график	90
§ 12. Показательные уравнения	103
§ 13. Показательные неравенства	108
§ 14. Понятие логарифма	112
§ 15. Логарифмическая функция, её свойства и график	116
§ 16. Свойства логарифмов	123
§ 17. Логарифмические уравнения	132
§ 18. Логарифмические неравенства	138
§ 19. Дифференцирование показательной и логарифмической функций	144

Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. А.Г. Мордкович, П.В. Семенов.



Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин

Глава VII. Логарифмическая функция	230
§ 1. Логарифмы	—
§ 2. Свойства логарифмов	233
§ 3. Десятичные и натуральные логарифмы. Формула перехода	236
§ 4. Логарифмическая функция, ее свойства и график	240
§ 5. Логарифмические уравнения	245
§ 6. Логарифмические неравенства	249

Основные понятия

- Логарифм числа b по основанию a
- Логарифм положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a
- Основное логарифмическое тождество (у Мордковича нет такой формулировки)
- Логарифмирование
- Потенцирование
- Десятичный логарифм
- Логарифмическая функция
- Логарифмическая кривая
- Характеристика и мантисса десятичного логарифма числа a (Мордкович)
- Логарифмическое уравнение
- Логарифмическое неравенство
- Число e
- Функция $y = e^x$
- Экспонента
- Натуральный логарифм
- Функция $y = \ln x$

Основные утверждения

- Свойства логарифмов
- Теоремы логарифмических неравенств
- Формула перехода к новому основанию логарифма
- Формула дифференцирования функции $y = e^x$
- Формула интегрирования функции $y = e^x$
- Формула дифференцирования функции $y = \ln x$
- Формула интегрирования функции $y = \ln x$

Основные алгоритмы

- Свойства функции $y = \log_a x, a > 1$
- Свойства функции $y = \log_a x, 0 < a < 1$
- Свойства функции $y = e^x$
- Свойства функции $y = \ln x$

Методы решения логарифмических уравнений

- 1) Функционально-графический метод. Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций.
- 2) Метод потенцирования. Он основан на теореме.

Теорема. Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$, X — решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Тогда уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно на множестве X уравнению $f(x) = g(x)$.

- 3) Метод введения новой переменной.

Определение. Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число b .

$$\log_a a = 1,$$

$$\log_a 1 = 0,$$

$$\log_a a^c = c.$$

$$a^{\log_a b} = b.$$

Логарифмическая функция

На рис. 62 схематически изображены графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ в случае, когда $a > 1$; на рис. 63 схематически изображены графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ в случае, когда $0 < a < 1$.

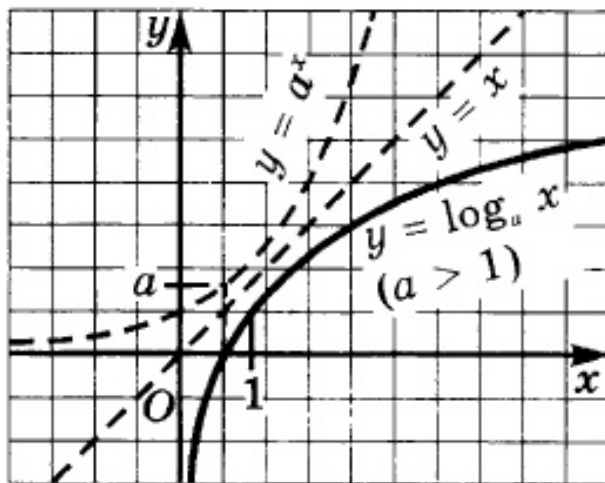


Рис. 62

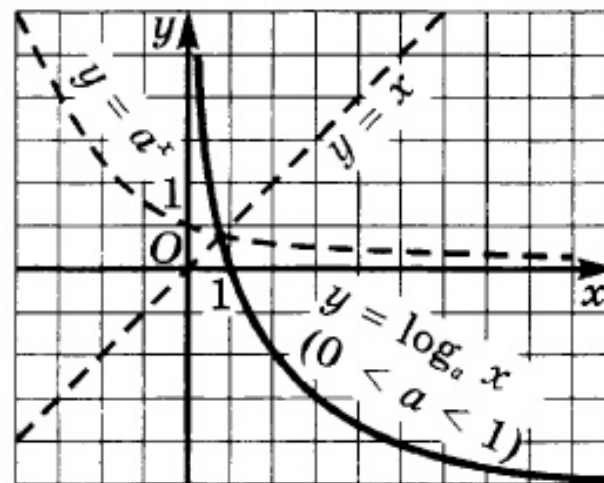
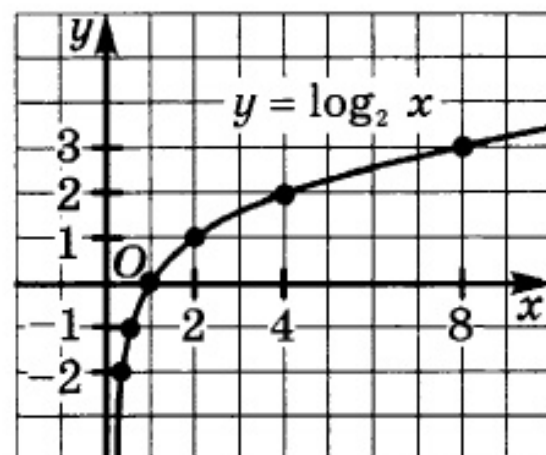


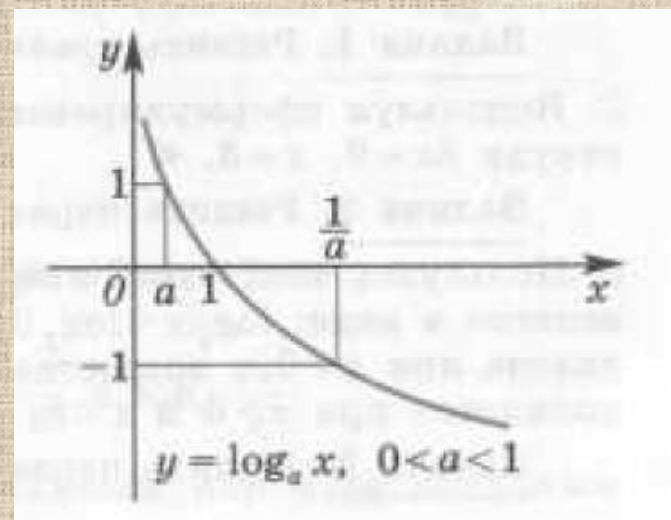
Рис. 63

Свойства функции $y = \log_a x$, $a > 1$.

Необходимую информацию извлекаем из геометрической модели, представленной на рис. 62.

- 1) $D(f) = (0; +\infty)$;
- 2) не является ни чётной, ни нечётной;
- 3) возрастает на $(0; +\infty)$;
- 4) не ограничена сверху, не ограничена снизу;
- 5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
- 6) непрерывна;
- 7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
- 8) выпукла вверх.





Свойства функции $y = \log_a x$, $0 < a < 1$.

Необходимую информацию извлекаем из геометрической модели, представленной на рис. 63.

- 1) $D(f) = (0; +\infty)$;
- 2) не является ни чётной, ни нечётной;
- 3) убывает на $(0; +\infty)$;
- 4) не ограничена сверху, не ограничена снизу;
- 5) нет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
- 6) непрерывна;
- 7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
- 8) выпукла вниз.

Отметим, что ось y является вертикальной асимптотой графика логарифмической функции и в случае, когда $a > 1$, и в случае, когда $0 < a < 1$.

Функция $y = e^x$, её график, свойства

График функции $y = e^x$ изображён на рис. 80. Это экспонента, отличающаяся от других экспонент (графиков показательных функций с другими основаниями) тем, что угол между касательной к графику в точке $x = 0$ и осью абсцисс равен 45° .

Свойства функции $y = e^x$:

- 1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
- 2) не является ни чётной, ни нечётной;
- 3) возрастает;
- 4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
- 5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
- 6) непрерывна;
- 7) $E(f) = (0; +\infty)$;
- 8) выпукла вниз;
- 9) дифференцируема.

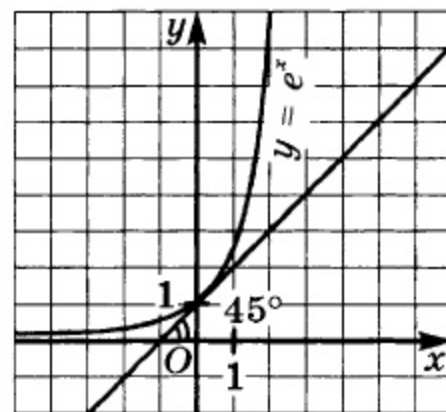
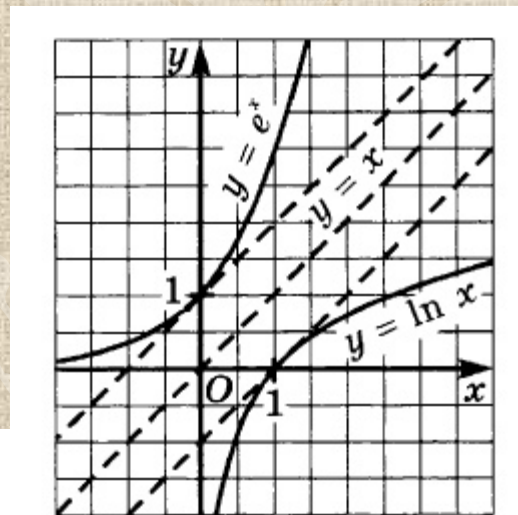


Рис. 80

Функция $y = \ln x$, её график, свойства



Свойства функции $y = \ln x$:

- 1) $D(f) = (0; +\infty)$;
- 2) не является ни чётной, ни нечётной;
- 3) возрастает на $(0; +\infty)$;
- 4) не ограничена ни сверху, ни снизу;
- 5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
- 6) непрерывна;
- 7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
- 8) выпукла вверх;
- 9) дифференцируема.

Задания для базового и профильного уровня

1. Найти логарифмы чисел по основанию 3:

$$3, 9, 27, 81, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{243}, \sqrt[3]{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, 9\sqrt[4]{3}.$$

Вычислить (2—11).

2. 1) $\log_2 16$; 2) $\log_2 64$; 3) $\log_2 2$; 4) $\log_2 1$.

3. 1) $\log_2 \frac{1}{2}$; 2) $\log_2 \frac{1}{8}$; 3) $\log_2 \sqrt{2}$; 4) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Вычислить (14—16).

14. 1) $\log_2 \sqrt[4]{2}$; 2) $\log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}}$; 3) $\log_{0.5} \frac{1}{\sqrt{32}}$; 4) $\log_7 \frac{\sqrt[3]{7}}{49}$;

5) $\log_{128} 64$; 6) $\log_{27} 243$; 7) $\log_{64} 256$; 8) $\log_{81} 27$;

9) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt[4]{3}}$; 10) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4\sqrt[5]{2}}$.

15. 1) $9^{2\log_3 5}$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}\log_3 4}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5\log_2 3}$;

4) $27^{-4\log_{\frac{1}{3}} 5}$; 5) $10^{3-\log_{10} 5}$; 6) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+2\log_{\frac{1}{7}} 3}$.

Задания для базового и профильного уровня

Вычислить (25—28).

25. 1) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$; 2) $\log_{10} 8 + \log_{10} 125$;

3) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$; 4) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$.

26. 1) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$; 2) $\log_5 75 - \log_5 3$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$; 4) $\log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32$.

34. Вычислить:

1) $36^{\log_6 5} + 10^{1 - \log_{10} 2} - 8^{\log_2 3}$;

2) $\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_9 4} + 2 \cdot 5^{\log_{125} 8} \right) \cdot 49^{\log_7 2}$;

3) $16^{1 + \log_4 5} + 4^{\frac{1}{2} \log_2 3 + 3 \log_8 5}$;

4) $72 \cdot (49^{\frac{1}{2} \log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4})$.

35. Выразить данный логарифм через логарифм по основанию 2:

1) $\log_4 5$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 7$; 3) $\log_{\sqrt{2}} 13$; 4) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 3$.

Вычислить (36—37).

36. 1) $\frac{\log_4 9}{2 \log_2 3}$; 2) $\frac{\log_{\frac{1}{8}} 16}{-3 \log_{\frac{1}{8}} 2}$; 3) $\frac{\log_{\frac{1}{36}} 7}{\log_{36} 49}$; 4) $\frac{-3 \log_{\frac{1}{16}} 19}{\log_{0,25} 19}$.

67. Расстояния d планет от Солнца (в астрономических единицах) и их периоды обращения вокруг Солнца T (в годах) приведены в таблице:

№ п/п	Планета	d	T
1	Меркурий	0,387	0,241
2	Венера	0,723	0,615
3	Земля	1,000	1,000
4	Марс	1,523	1,881
5	Юпитер	5,203	11,861
6	Сатурн	9,541	29,457
7	Уран	19,190	84,008
8	Нептун	30,086	1644,784
9	Плутон	39,507	248,350

Найти формулу зависимости T от d .

68. Вычислить на микрокалькуляторе приближенное значение числа e по формуле

$$e \approx 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n} \quad \text{при:}$$

1) $n=7$; 2) $n=8$; 3) $n=9$; 4) $n=10$.

Задания для базового уровня

73. Построить график функции:

1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

74. По графику функции $y = \log_2 x$ найти приближенно
 $\log_2 3$; $\log_2 0,3$; $\log_2 5$; $\log_2 0,7$.

75. Изобразить схематически график функции:

1) $y = \lg x$; 2) $y = \ln x$; 3) $y = \log_{0,4} x$; 4) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.

Решить неравенство (76—77).

76. 1) $\log_5 x > \log_5 3$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} x < \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8}$;

3) $\lg x < \lg 4$; 4) $\ln x > \ln 0,5$.

77. 1) $\log_3 x < 2$; 2) $\log_{0,4} x > 2$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 16$; 4) $\log_{0,4} x \leq 2$.

78. Решить уравнение:

1) $\log_3 (5x - 1) = 2$; 2) $\log_5 (3x + 1) = 2$; 3) $\log_4 (2x - 3) = 1$;

4) $\log_7 (x + 3) = 2$; 5) $\lg (3x - 1) = 0$; 6) $\lg (2 - 5x) = 1$.

79. Найти область определения функции:

1) $y = \log_4 (x - 1)$; 2) $y = \log_{0,3} (1 + x)$;

3) $y = \log_3 (x^2 + 2x)$; 4) $y = \log_{\sqrt{2}} (4 - x^2)$.

Задания для профильного уровня

80. Доказать, что функция $y = \log_2(x^2 - 1)$ возрастает на промежутке $x > 1$.

81. Сравнить значения выражений:

1) $\frac{1}{2} + \lg 3$ и $\lg 19 - \lg 2$; 2) $\frac{\lg 5 + \lg \sqrt{7}}{2}$ и $\lg \frac{5 + \sqrt{7}}{2}$;

3) $3(\lg 7 - \lg 5)$ и $\lg 9 - \frac{2}{3} \lg 8$; 4) $\lg \lg \lg 50$ и $\lg^3 5$.

82. Найти область определения функции:

1) $y = \log_8(x^2 - 3x - 4)$; 2) $y = \log_{\sqrt{3}}(-x^2 + 5x + 6)$;

3) $y = \log_{0,7} \frac{x^2 - 9}{x + 5}$; 4) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x - 4}{x^2 + 4}$;

5) $y = \log_x(2^x - 2)$; 6) $y = \log_3(3^{x-1} - 9)$.

83. Построить график функции, найти ее область определения и множество значений:

1) $y = \log_3(x - 1)$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(x + 1)$; 3) $y = 1 + \log_3 x$;

4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 1$; 5) $y = 1 + \log_3(x - 1)$.

84. Решить графически уравнение:

1) $\log_2 x = -x + 1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2x - 5$;

3) $\lg x = \sqrt{x}$; 4) $\lg x = 2^{-x}$.

85. Построить график функции, найти ее область определения и множество значений, указать промежутки монотонности:

1) $y = |\log_3 x|$; 2) $y = \log_3 |x|$;

3) $y = \log_2 |3 - x|$; 4) $y = |1 - \log_2 x|$.

86. Найти область определения функции:

1) $y = \log_2 |3 - x| - \log_2 |x^3 - 8|$;

2) $y = \log_{0,3} \sqrt{x + 1} + \log_{0,4} (1 - 8x^3)$.

Логарифмы и их изучение в школьном курсе математики

Презентацию подготовила
Курсекова Ольга Олеговна
студентка 2-го курса магистратуры
физико-математического факультета
2015 год

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ