

# Интегральное исчисление в школьном курсе

Презентацию подготовила  
Курсекова Ольга Олеговна



**Основная образовательная цель** изучения темы «Интегрального исчисления» может быть сформулирована так:

- 1) ознакомить обучающихся с операцией, которая является обратной по отношению к операции дифференцирования;
- 2) познакомить с использованием метода интегрального исчисления для решения задач практического содержания.



# Основное содержание

## Базовый уровень

- Понятие об определенном интеграле как площади криволинейной трапеции.
- Понятие криволинейной трапеции (согласно программам не включено, но нами рекомендовано)
- Понятие площади криволинейной трапеции (согласно программам не включено, но нами рекомендовано)
- Формула Ньютона-Лейбница.
- Примеры применения интеграла в физике и геометрии.

## Профильный уровень

- Площадь криволинейной трапеции.
- Понятие об определенном интеграле.
- Первообразная.
- Первообразные элементарных функций.
- Правила вычисления первообразных.
- Формула Ньютона-Лейбница.
- Примеры применения интеграла в физике и геометрии.



# ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ПОДГОТОВКИ ВЫПУСКНИКОВ

## Базовый уровень

### уметь:

- вычислять первообразные элементарных функций, используя справочные материалы;
- вычислять в простейших случаях площади с использованием первообразной;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для: решения прикладных задач, в том числе социально-экономических и физических.

## Профильный уровень

### уметь:

- вычислять первообразные элементарных функций, применяя правила вычисления первообразных, используя справочные материалы;
- вычислять площадь криволинейной трапеции;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для: решения геометрических, физических, экономических и других прикладных задач, с применением аппарата математического анализа.

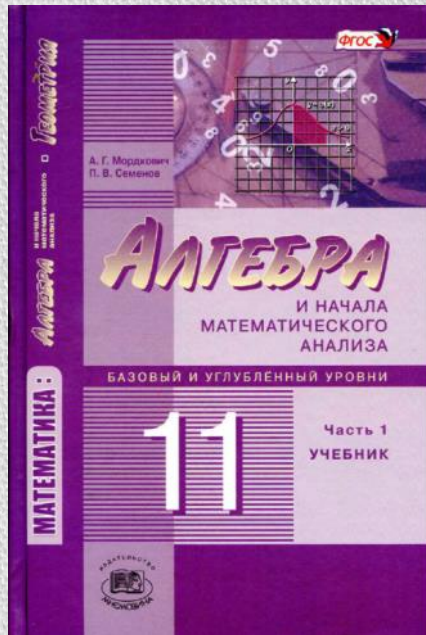


# Оглавление

## Глава 4. Первообразная и интеграл

§ 20. Первообразная и неопределённый интеграл	155
§ 21. Определённый интеграл	165

Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. А.Г. Мордкович, П.В. Семенов.



Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин

## Глава IV. Первообразная и интеграл

§ 1. Первообразная	131
§ 2. Правила нахождения первообразных	134
§ 3. Площадь криволинейной трапеции. Интеграл и его вычисление	137
§ 4. Вычисление площадей фигур с помощью интегралов	145
§ 5. Применение интегралов для решения физических задач	149
§ 6. Простейшие дифференциальные уравнения	150



# Основные понятия

- Интегрирование
- Первообразная для функции  $y = f(x)$
- Неопределенный интеграл от функции  $y = f(x)$  (по Стандарту не обязательное изучение)
- Криволинейная трапеция
- Площадь криволинейной трапеции
- Определенный интеграл от функции  $y = f(x)$  по отрезку  $[a; b]$
- Интегральные суммы (по Стандарту не обязательное изучение)



# Основные утверждения

- Формула Ньютона-Лейбница
- Теоремы отыскания первообразных
- Теоремы интегрирования
- Свойства определенного интеграла



# Основные алгоритмы

- Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла
- Таблица формул для отыскания первообразных
- Вычисление простейших интегралов
- Вычисление объемов (по Стандарту не обязательное изучение)



**Пример 1.** По прямой движется материальная точка, скорость её движения в момент времени  $t$  задаётся формулой  $v = gt$ . Найти закон движения.

**Решение.** Пусть  $s = s(t)$  — искомый закон движения. Известно, что  $s'(t) = v(t)$ . Значит, для решения задачи нужно подобрать функцию  $s = s(t)$ , производная которой равна  $gt$ . Нетрудно догадаться, что  $s(t) = \frac{gt^2}{2}$ . В самом деле,

$$s'(t) = \left( \frac{gt^2}{2} \right)' = \frac{g}{2} (t^2)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt.$$

**Ответ:**  $s = \frac{gt^2}{2}$ .



Сразу заметим, что пример решён верно, но неполно. Мы получили, что  $s = \frac{gt^2}{2}$ . На самом деле задача имеет бесконечно

155

много решений: любая функция вида  $s = \frac{gt^2}{2} + C$ , где  $C$  — произвольная константа, может служить законом движения, поскольку

$$\left( \frac{gt^2}{2} + C \right)' = \left( \frac{gt^2}{2} \right)' + C' = gt + 0 = gt.$$

Чтобы задача стала более определённой, нам надо было зафиксировать исходную ситуацию: указать координату движущейся точки в какой-либо момент времени, например при  $t = 0$ . Если,

скажем,  $s(0) = s_0$ , то из равенства  $s(t) = \frac{gt^2}{2} + C$  получаем:  $s(0) = 0 + C$ , т. е.  $C = s_0$ . Теперь закон движения определён однозначно:

$$s = \frac{gt^2}{2} + s_0.$$



**Определение 1.** Функцию  $y = F(x)$  называют первообразной для функции  $y = f(x)$  на заданном промежутке  $X$ , если для любого  $x \in X$  выполняется равенство  $F'(x) = f(x)$ .

Вообще, зная формулы для отыскания производных, нетрудно составить таблицу формул для отыскания первообразных:

Функция $y = f(x)$	Первообразная $y = F(x)$
0	$C$
1	$x$
$x^r, r \neq -1$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln  x $
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$e^x$	$e^x$
$a^x (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}$



# Правила отыскания первообразных

**ПРАВИЛО 1.** *Первообразная суммы равна сумме первообразных.*

**ПРАВИЛО 2.** *Если  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$ , то  $kF(x)$  — первообразная для  $kf(x)$ .*

**Теорема.** *Если  $y = F(x)$  — первообразная для функции  $y = f(x)$ , то первообразной для функции  $y = f(kx + m)$  служит функция  $y = \frac{1}{k} F(kx + m)$ .*



# Неопределенный интеграл

**Теорема.** Если  $y = F(x)$  — первообразная для функции  $y = f(x)$  на промежутке  $X$ , то у функции  $y = f(x)$  бесконечно много первообразных и все они имеют вид  $y = F(x) + C$ .

**Определение 2.** Если функция  $y = f(x)$  имеет на промежутке  $X$  первообразную  $y = F(x)$ , то множество всех первообразных, т. е. множество функций вида  $y = F(x) + C$ , называют **неопределённым интегралом** от функции  $y = f(x)$  и обозначают

$$\int f(x) dx$$

(читают: **неопределённый интеграл эф от икс дэ икс**).



Опираясь на имеющуюся в этом параграфе таблицу первообразных, составим таблицу основных неопределённых интегралов:

$\int dx = x + C$
$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C (r \neq -1)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln  x  + C$
$\int \sin x = -\cos x + C$
$\int \cos x = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} (a > 0, a \neq 1)$

Опираясь на приведённые выше три правила отыскания первообразных, мы можем сформулировать соответствующие правила интегрирования.



# Правила интегрирования

**ПРАВИЛО 1.** *Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов этих функций:*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

**ПРАВИЛО 2.** *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:*

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

**ПРАВИЛО 3.** *Если  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , то*

$$\int f(kx + m)dx = \frac{F(kx + m)}{k} + C.$$

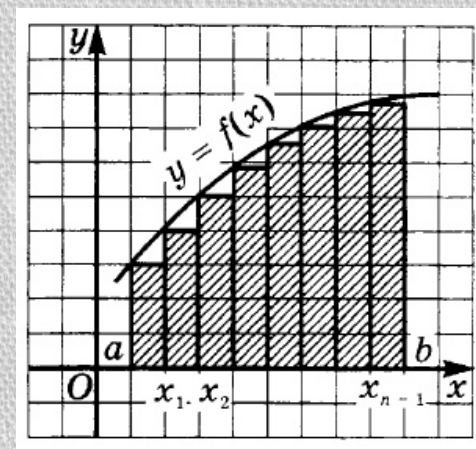
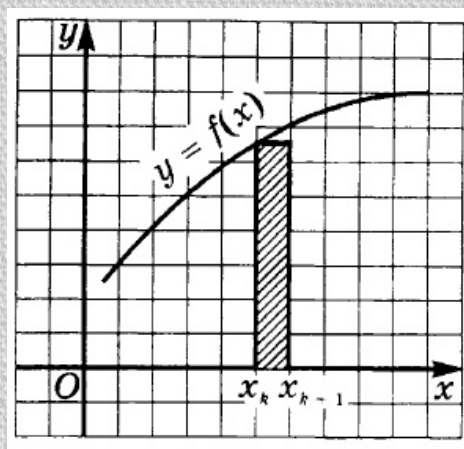
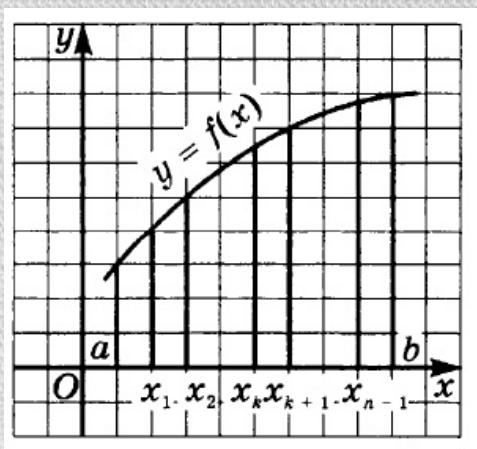


# Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

**Задача 1** (о вычислении площади криволинейной трапеции).

Искомая площадь криволинейной трапеции равна пределу последовательности  $(S_n)$ :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$



! Понятие интегральной суммы функции  $f(x)$  !



# Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

**Задача 2** (о вычислении массы стержня).

Дан прямолинейный неоднородный стержень  $[a; b]$  (рис. 90), плотность в точке  $x$  вычисляется по формуле  $\rho = \rho(x)$ . Найти массу стержня.

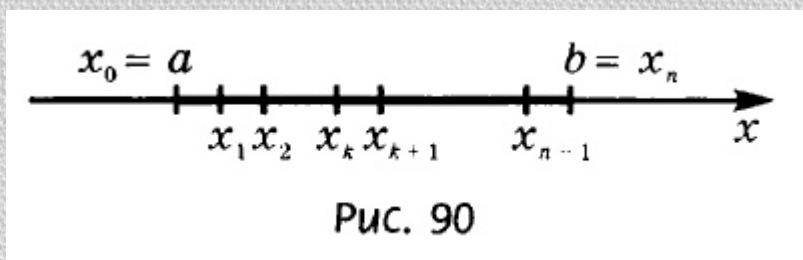


Рис. 90

Искомая масса равна пределу последовательности  $(S_n)$ :

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$



# Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

**Задача 3** (о перемещении точки).

По прямой движется материальная точка. Зависимость скорости от времени выражается формулой  $v = v(t)$ . Найти перемещение точки за промежуток времени  $[a; b]$ .

Искомое перемещение равно пределу последовательности

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$



# Понятие определенного интеграла

- В процессе решения трёх задач из различных областей науки и техники мы приходим к **одной и той же модели**, а следовательно данную математическую модель нужно специально изучить, т.е.:
  - 1) присвоить ей **новый термин**,
  - 2) ввести для неё **обозначение**,
  - 3) **научиться с ней работать**.



# Понятие определенного интеграла

Дадим математическое описание той модели, которая была построена в трёх рассмотренных задачах, для функции  $y = f(x)$ , определённой (но необязательно неотрицательной, как это предполагалось в рассмотренных задачах) на отрезке  $[a; b]$ :

- 1) разбивают отрезок  $[a; b]$  на  $n$  равных частей;
- 2) составляют сумму:

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \\ + \dots + f(x_k)\Delta x_k + \dots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1};$$

- 3) вычисляют  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

В курсе математического анализа доказано, что этот предел в случае непрерывной или в случае кусочно-непрерывной функции  $y = f(x)$  существует. Его называют **определённым интегралом от функции  $y = f(x)$  по отрезку  $[a; b]$**  и обозначают так:

$$\int_a^b f(x)dx$$

(читают: *интеграл от а до b эф от икс дэ икс*). Числа  $a$  и  $b$  называют **пределами интегрирования** (соответственно *нижним и верхним*).



# Формула Ньютона-Лейбница

**Теорема.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$ .

Свойство 1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$



Свойство 2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

Свойство 3. Если  $a < c < b$ , то

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$



# Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

Итак, площадь  $S$  фигуры, ограниченной прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и графиками функций  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ , непрерывных на отрезке  $[a; b]$  и таких, что для любого  $x$  из отрезка  $[a; b]$  выполняется неравенство  $g(x) \leq f(x)$ , вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

(3)



# Задания для базового уровня

Для функции  $f(x)$  найти первообразную, график которой проходит через точку  $M$ , если:

- |  |                                     |
|--|-------------------------------------|
| 1) $f(x) = \cos x$ , $M(0; -2)$ ;            | 2) $f(x) = \sin x$ , $M(-\pi; 0)$ ; |
| 3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , $M(4; 5)$ ; | 4) $f(x) = e^x$ , $M(0; 2)$ ;       |
| 5) $f(x) = 3x^2 + 1$ , $M(1; -2)$ ;          | 6) $f(x) = 2 - 2x$ , $M(2; 3)$ .    |

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

- 1)  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$ ; 2)  $y = \cos x$ ,  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $y = 0$ ;

Вычислить интеграл (41—43).

- |   |  |                                |
|---|--|--------------------------------|
| 1) $\int_{-1}^2 2dx$ ;                  | 2) $\int_{-2}^2 (3-x)dx$ ;                             | 3) $\int_1^3 (x^2 - 2x)dx$ ;   |
| 4) $\int_{-1}^1 (2x - 3x^2)dx$ ;        | 5) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}dx$ ;                          | 6) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$ ; |
| 7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ ; | 8) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ . |                                |



# Задания для базового уровня

Показать, что  $F(x) = e^{2x} + x^3 - \cos x$  является первообразной для функции  $f(x) = 2e^{2x} + 3x^2 + \sin x$  на всей числовой прямой.

Для функции  $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$  найти первообразную, график которой проходит через точку  $M(1; -2)$ .

Найти площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = x^2 + x - 6$  и осью  $Ox$ .



# Задания для профильного уровня

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1)  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$ ; 2)  $y = \cos x$ ,  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $y = 0$ ;

---

3)  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x$ ;

4)  $y = 2x^2$ ,  $y = 0,5x + 1,5$ ;

5)  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $x = -8$ ,  $x = -1$ ,  $y = 0$ ;

6)  $y = \frac{1}{x^3}$ ,  $x = -3$ ,  $x = -1$ ,  $y = 0$ .

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями (44—45).

44. 1)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = 4x$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ; 2)  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $y = x$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ;

3)  $y = x^2 + 1$ ,  $y = x + 1$ ;

4)  $y = x^2 + 2$ ,  $y = 2x + 2$ .

45. 1)  $y = x^2 - 6x + 9$ ,  $y = x^2 + 4x + 4$ ,  $y = 0$ ;

2)  $y = x^2 + 1$ ,  $y = 3 - x^2$ ;

3)  $y = x^2$ ,  $y = 2\sqrt{2x}$ ;

4)  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \sqrt{4 - 3x}$ ,  $y = 0$ .

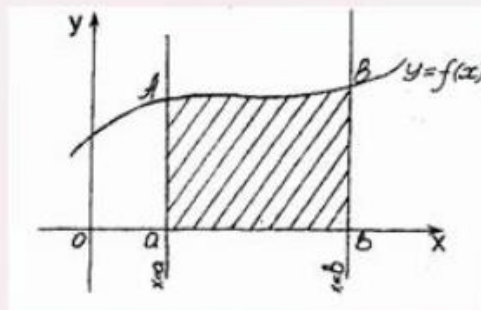


# Задания для профильного уровня

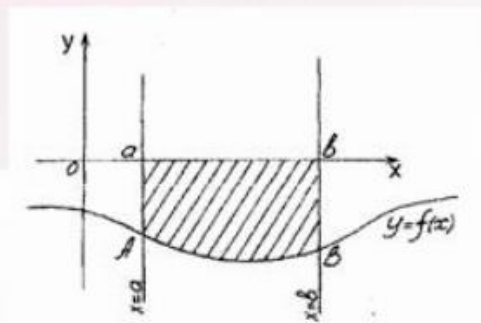
- Найти площадь фигуры, ограниченной:
  - 1) параболой  $y = x^2 - 2x + 2$ , касательной к ней, проходящей через точку пересечения параболы с осью  $Oy$ , и прямой  $x = 1$ ;
  - 2) гиперболой  $y = \frac{4}{x}$ , касательной к ней, проходящей через точку с абсциссой  $x = 2$ , и прямыми  $y = 0$ ,  $x = 6$ .
- Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
  - 1)  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 6$ ,  $x = 1$ ;
  - 2)  $y = x^4 - 2x^2 + 5$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .
- При каком значении  $k$  площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = x^2 + px$ , где  $p$  — заданное число, и прямой  $y = kx + 1$ , наименьшая?



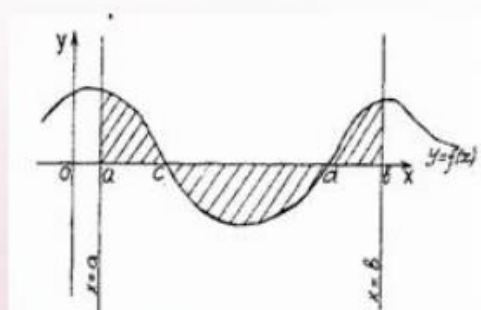
# ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДЕЙ



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

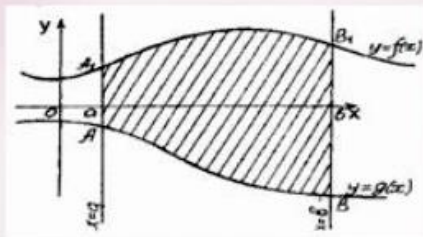


$$S = - \int_a^b f(x) dx$$

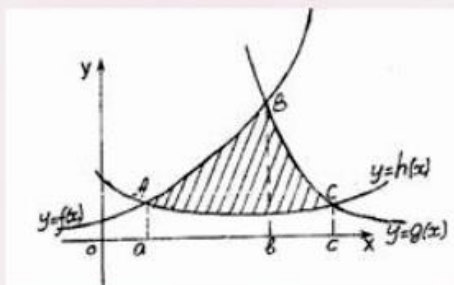


$$S = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

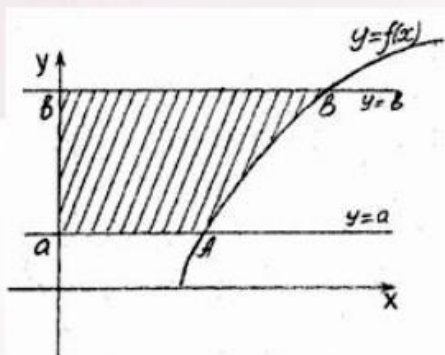




$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

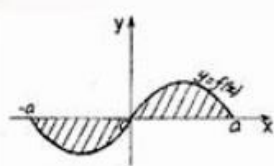
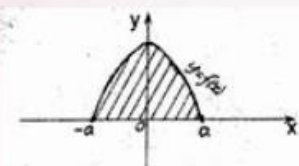


$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx + \int_b^c (g(x) - h(x)) dx$$



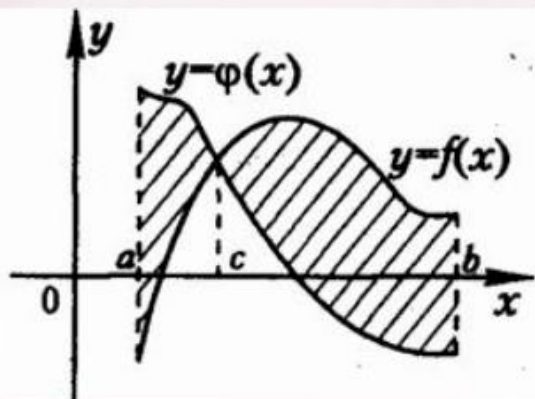
$$y = f(x) \Rightarrow x = \varphi(y)$$

$$S = \int_a^b \varphi(y) dy$$

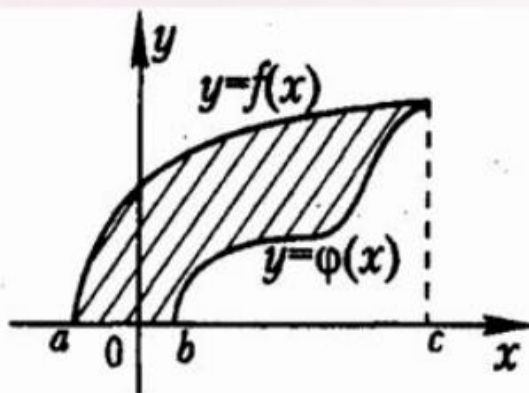


$$S = 2 \int_0^a f(x) dx$$

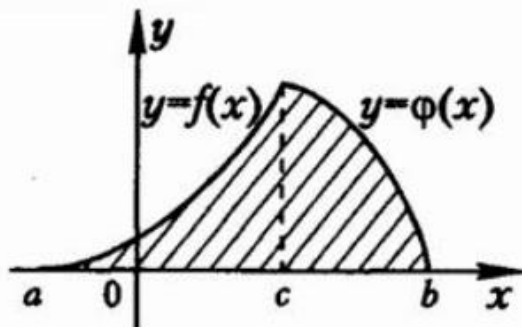




$$\int_a^c (\varphi(x) - f(x)) dx + \int_c^b (f(x) - \varphi(x)) dx$$



$$\int_a^c f(x) dx - \int_b^c \varphi(x) dx$$



$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx$$



# Интегральное исчисление в школьном курсе

Презентацию подготовила  
Курсекова Ольга Олеговна  
студентка 2-го курса магистратуры  
физико-математического факультета  
2015 год

## СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ