

Исследовательская работа по математике и
информатике на тему
«Числа Фибоначчи»

Выполнил: *Соловьев Евгений*
ученик 9б класса

Научный руководитель:
Малова Светлана Сергеевна
учитель математики и информатики

с. Новые Параты
2016г

Оглавление

Введение.....	3
1. Теоретическая часть.....	5
1.1. Биография Леонардо Фибоначчи.....	5
1.2. История создания чисел Фибоначчи.....	7
1.3. Закономерность чисел Фибоначчи.....	8
1.4. Числа Фибоначчи в живой природе.....	10
1.5. Числа Фибоначчи в строении человека.....	12
1.6. Числа Фибоначчи в психологии.....	13
1.7. Спираль Фибоначчи	14
2. Экспериментальная часть.....	21
2.1. Наши исследования.....	21
2.2. Составление программы.....	24
Заключение	26
Список использованной литературы.....	27

Введение

«Числа управляют миром! Число – это сила, царящая над богами и смертными!» - так говорили ещё древние пифагорейцы. Актуальна ли в наши дни эта основа учения Пифагора? Изучая в школе науку чисел, нам хочется убедиться в том, что действительно, явления всей Вселенной подчинены определенным числовым соотношениям, найти эту невидимую связь между математикой и жизнью!

Неужели в каждом цветочке,
И в молекуле, и в галактике,
Числовые закономерности
Этой строгой «сухой» математики?

Мы обратились к современному источнику информации – к Интернету и прочитали о числах Фибоначчи, о магических числах, которые таят в себе великую загадку. Оказывается, закономерность явлений природы, строение и многообразие живых организмов на нашей планете, всё, что нас окружает, поражая воображение своей гармонией и упорядоченностью, законы мироздания, движение человеческой мысли и достижения науки – всё это можно объяснить последовательностью Фибоначчи. В этом и заключается **актуальность** нашего исследования. Эти числа можно найти в подсолнухах и сосновых шишках, в крыльях стрекозы и морских звёздах, в ритмах человеческого сердца и в музыкальных ритмах...

Почему же эта последовательность чисел столь распространена в нашем мире?

Мы захотели узнать о тайнах чисел Фибоначчи. Результатом нашей деятельности и явилась данная исследовательская работа.

Объект исследования: человек, математические абстракции, созданные человеком, изобретения человека, окружающий растительный и животный мир.

Предмет исследования: форма и строение исследуемых предметов и явлений.

Цель исследования: изучить проявление чисел Фибоначчи и связанного с ним закона золотого сечения в строении живых и неживых объектов, найти примеры использования чисел Фибоначчи.

В ходе исследования сформировались **задачи:**

- Познакомиться с числами Фибоначчи и историей их создания
- Изучить числовой ряд Фибоначчи
- Исследовать сферы в которых используется числовой ряд Фибоначчи
- Описать способ построения ряда Фибоначчи и спирали Фибоначчи.
- Увидеть математические закономерности в строении человека, растительного мира и неживой.
- Самостоятельно изучить основы языка программирования Паскаль, написать программу на языке Паскаль, отображающую последовательность чисел Фибоначчи.

Новизна исследования: открытие чисел Фибоначчи в окружающей нас действительности, составление программы для автоматического нахождения чисел последовательности Фибоначчи.

Практическая значимость: Использование приобретенных знаний и навыков исследовательской работы при изучении других школьных предметов.

Методы исследования:

- Наблюдение
- Эксперимент
- Измерение

Гипотеза: в окружающей нас действительности всё построено по удивительно гармоничным законам с математической точностью. Всё в мире продуманно и просчитано самым главным нашим дизайнером – Природой!

1. Теоретическая часть

1.1. Биография Леонардо Фибоначчи

Леонардо Пизанский (Фибоначчи) – это первый крупный математик средневековой Европы. Более известен под прозвищем Фибоначчи, что в переводе с итальянского означает «хороший сын родился».



Рис. 1

Точная дата его рождения неизвестна. Предположительно Фибоначчи родился в 1170г. в городе Пиза, в Италии. Его отец был купцом и государственным вельможей, представителем нового класса бизнесменов. Тогда Пиза была одним из крупнейших коммерческих центров, активно сотрудничавших с исламским Востоком, и отец Фибоначчи энергично торговал в одном из факторий, основанных итальянцами на северном побережье Африки. Благодаря этому ему удалось «устроить» своего сына в одну из арабских школ, где он смог получить превосходное для того времени математическое образование.

Леонардо изучал труды математиков востока, по арабским переводам он ознакомился также с достижениями античных и индийских математиков.

Все эти знания он впитывал в себя как губка. А потом принес их в Европу, он «открыл» арабские цифры вместо римских и десятичную систему исчисления для европейцев.

Наука в те времена явно не была приоритетом. В этих условиях появление книги по математике «Книга об абак» (вычислениях), написанной в 1202 году, стало важным событием в научной жизни общества. Этот труд приобщил европейских ученых к достижениям индийских и арабских математиков. Он оказал существенное влияние на дальнейшее развитие алгебры и теории чисел.

На протяжении нескольких столетий по труду Фибоначчи ученые знакомились с двумя важнейшими разделами математики – арифметикой и алгеброй и черпали из него задачи и оригинальные методы решения, благодаря чему уже в XV – XVI в.в. те разошлись по многочисленным итальянским, французским, немецким, английским, а позже и русским рукописям, печатным книгам и учебникам.

Когда Леонардо вернулся в Италию, там правил император Фридрих II. Он не признавал рыцарские турниры, вместо них он проводил гораздо менее кровавые математические соревнования, на которых противники обменивались не ударами, а задачами. На таких турнирах и заблистал талант Леонардо Фибоначчи.

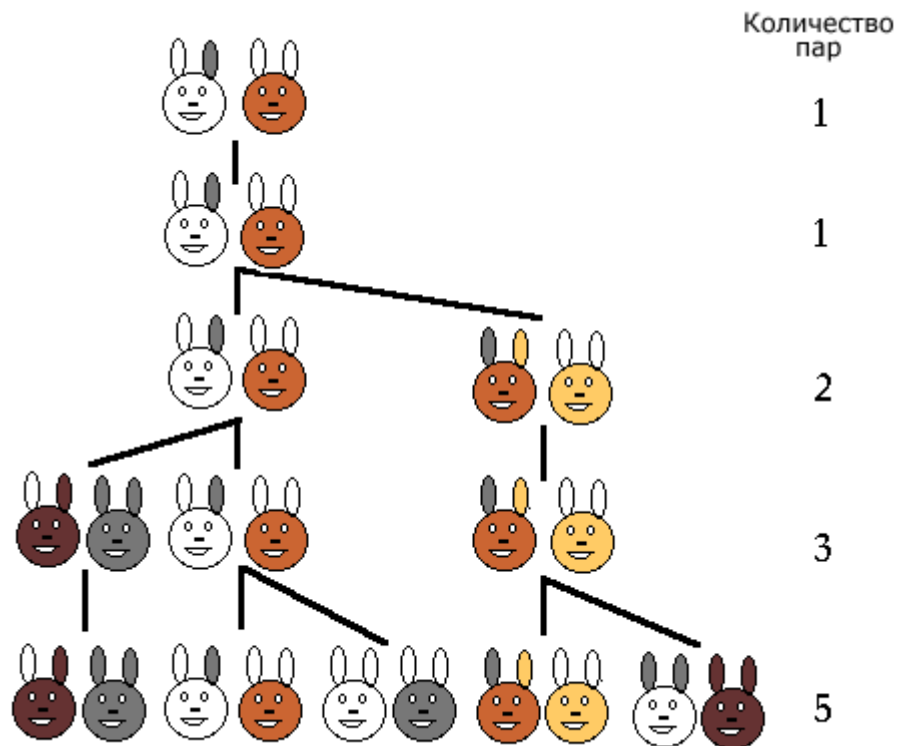
Предположительно Фибоначчи умер во время одного из Крестовых походов в 1228 году, сопровождая императора Фридриха.

Выдающаяся заслуга Фибоначчи – это ряд чисел, названных его именем. Данная числовая последовательность имеет важное значение не только в экономике, математике, финансах, но также в зоологии, ботанике, медицине, физиологии, философии, искусстве, эстетике и др.

Тему «Числа Фибоначчи» мы выбрали не зря, так как считаем важной, интересной и необходимой в наше время.

1.2. История создания чисел Фибоначчи

Леонардо Фибоначчи совершил открытие чисел (впоследствии названных его именем) случайно. В 1202 году он пытался решить практическую задачу. Числовой ряд, носящий сегодня его имя, вырос из проблемы с кроликами, которую Фибоначчи изложил в своей книге «Книга счета», написанной в 1202 году: «Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождают кролики со второго месяца после своего рождения».



Таким образом, решение этой задачи сводится к бесконечной последовательности чисел.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

Последовательность чисел, первые два числа которой равны 1, а каждый последующий член (начиная с третьего) равен сумме двух

предыдущих, называют последовательностью Фибоначчи, а сами числа - числами Фибоначчи.

Последовательность Фибоначчи — это не просто игра с числами, а самое важное математическое выражение природных явлений из всех когда-либо открытых.

1.3. Закономерность чисел Фибоначчи

Свойства последовательности чисел Фибоначчи:

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610,...

Каждое третье число Фибоначчи четно

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610,...

Каждое четвертое делится на три

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610,...

Каждое пятнадцатое оканчивается нулем

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610,...

Два соседних числа взаимно просты

Числа, образующие данную последовательность называются "числами Фибоначчи", а сама последовательность - последовательностью Фибоначчи.

«Ну и что?» - скажете вы, - «Мало ли, мы сами можем придумать подобных числовых рядов, нарастающих по заданной прогрессии?» Действительно, когда появился ряд Фибоначчи, никто, в том числе и он сам, не подозревал, насколько близко ему удалось приблизиться к разгадке одной из величайших тайн мироздания!

Фибоначчи вёл отшельнический образ жизни, много времени проводил на природе, и, гуляя в лесу, он обратил внимание, что эти числа стали буквально преследовать его. Повсюду в природе он снова и снова встречал эти числа. Например, лепестки и листья растений строго укладывались в данный числовой ряд.

В числах Фибоначчи существует интересная особенность: частное от деления последующего числа Фибоначчи на предыдущее, по мере роста самих чисел, стремиться к 1,618. Именно это постоянное число деления в средние века было названо Божественной пропорцией, а ныне именуется как золотое сечение или золотая пропорция.

В алгебре это число обозначается греческой буквой фи (Φ)

Итак, $\phi = 1,618$

$$2/1=2$$

$$3/2=1,5$$

$$5/3=1,67$$

$$8/5=1,6$$

$$13/8=1,625$$

$$21/13=1,615$$

$$34/21=1.619$$

.....

$$233 / 144 = 1,618$$

$$377 / 233 = 1,618$$

$$610 / 377 = 1,618$$

$$987 / 610 = 1,618$$

$$1597 / 987 = 1,618$$

$$2584 / 1597 = 1,618$$

Сколько бы раз мы не делили одно на другое, соседнее с ним число, мы всегда получим 1, 618. А если сделаем наоборот, то есть разделим меньшее число на большее, то получим 0,618, это число, обратное к 1,618, тоже называется золотой пропорцией.

Ряд Фибоначчи мог бы остаться только математическим казусом, если бы не то обстоятельство, что все исследователи золотого деления в растительном и в животном мире, не говоря уже об искусстве, неизменно приходили к этому ряду, как арифметическому выражению закона золотого деления.

Учёные, анализируя дальнейшее применение этого числового ряда к природным феноменам и процессам, обнаружили, что эти числа содержатся буквально во всех объектах живой природы, в растениях, в животных и в человеке.

Удивительная математическая игрушка оказалась уникальным кодом, заложенным во все природные объекты самим Творцом Вселенной.

Рассмотрим примеры, где встречаются числа Фибоначчи в живой и неживой природе.

1.4. Числа Фибоначчи в живой природе

Если посмотреть на растения и деревья вокруг нас, то видно, сколь много листьев на каждом из них. Издалека кажется, что ветки и листья на растениях расположены случайным образом, в произвольном порядке. Однако во всех растениях чудесным образом, математически точно спланировано какая веточка откуда будет произрастать, как ветки и листья будут располагаться около стебля или ствола. С первого дня появления растение в точности следует в своём развитии этим законам, то есть ни один лист, ни один цветок не появляется случайно. Ещё до появления растение уже точно запрограммировано. Сколько будет веток на будущем дереве, где вырастут ветки, сколько будет листьев на каждой ветке, и как, в каком порядке будут располагаться листья. Совместная работа ботаников и математиков пролила свет на эти удивительные явления природы. Выяснилось, что в расположении листьев на ветке (филотаксис), в числе оборотов на стебле, в числе листьев в цикле проявляет себя ряд Фибоначчи, а стало быть, проявляет себя и закон золотого сечения.

Если вы зададитесь целью отыскать числовые закономерности в живой природе, то заметите, что эти числа часто встречаются в различных спиральных формах, которыми так богат мир растений. Например, черенки листьев примыкают к стеблю по спирали, которая проходит между двумя

соседними листьями: $1/3$ полного оборота - у орешника, $2/5$ - у дуба, $3/8$ - у тополя и груши, $5/13$ - у ивы.

Семена подсолнечника, эхинацеи пурпурной и многих других растений, расположены спиралями, причем количества спиралей каждого направления - числа Фибоначчи.



Подсолнечник, 21 и 34 спирали.



Эхинацея, 34 и 55 спиралей.

Чёткая, симметричная форма цветов также подчинена строгому закону.

У многих цветов количество лепесточков – именно числа из ряда Фибоначчи. Например:



ирис, 3 леп.



лютик, 5 леп



златоцвет, 8 леп



*дельфиниум 1
3 леп*



цикорий, 21 леп



астра, 34 леп



маргаритки, 55 леп

1.5. Числа Фибоначчи в строении человека

Ряд Фибоначчи характеризует структурную организацию многих живых систем.

Мы уже говорили, что отношений соседних чисел в ряду Фибоначчи есть число $\phi = 1,618$. Оказывается, что и сам человек – просто кладезь числа фи.

Пропорции различных частей нашего тела составляют число, очень близкое к золотому сечению. Если эти пропорции совпадают с формулой золотого сечения, то внешность или тело человека считается идеально сложенными. Принцип расчета золотой меры на теле человека можно изобразить в виде схемы.

$$M/m=1,618$$

Первый пример золотого сечения в строении тела человека:

Если принять центром человеческого тела точку пупка, а расстояние между ступней человека и точкой пупка за единицу измерения, то рост человека эквивалентен числу 1.618.

Рука человека

Достаточно лишь приблизить сейчас вашу ладонь к себе и внимательно посмотреть на указательный палец, и вы сразу же найдете в нем формулу золотого сечения. Каждый палец нашей руки состоит из трех фаланг. Сумма двух первых фаланг пальца в соотношении со всей длиной пальца и дает число золотого сечения (за исключением большого пальца). Кроме того, соотношение между средним пальцем и мизинцем также равно числу золотого сечения.

У человека 2 руки, пальцы на каждой руке состоят из 3 фаланг (за исключением большого пальца). На каждой руке имеется по 5 пальцев, то есть всего 10, но за исключением двух двухфаланговых больших пальцев только 8 пальцев создано по принципу золотого сечения. Тогда как все эти цифры 2, 3, 5 и 8 есть числа последовательности Фибоначчи.



Художники, ученые, модельеры, дизайнеры делают свои расчеты, чертежи или наброски, исходя из соотношения золотого сечения. Они используют мерки с тела человека, сотворенного также по принципу золотой сечения. Леонардо Да Винчи и Ле Корбюзье перед тем как создавать свои шедевры брали параметры человеческого тела, созданного по закону Золотой пропорции. Есть и другое, более прозаическое применение пропорций тела человека. Например, используя эти соотношения, криминальные аналитики и археологи по фрагментам частей человеческого тела восстанавливают облик целого.

1.6. Числа Фибоначчи в психологии

Числа Фибоначчи делят нашу жизнь на этапы по количеству прожитых лет:

• 0 — начало отсчета — ребенок родился. У него еще отсутствуют мышление, чувства, воображение. Он — начало новой жизни, новой гармонии;

• 1 — ребенок овладел ходьбой и осваивает ближайшее окружение;

• 2 — понимает речь и действует, пользуясь словесными указаниями;

• 3 — действует посредством слова, задает вопросы;

• 5 — «возраст грации» — гармония памяти, воображения и чувств, которые уже позволяют ребенку охватить мир во всей его целостности;

• 8 — на передний план выходят чувства. Им служит воображение, а мышление силами своей критичности направлено на поддержку внутренней и внешней гармонии жизни;

• 13 — начинает работать механизм таланта, направленный на превращение приобретенного в процессе наследования материала, развивая свой собственный талант;

• 21 — механизм творчества приблизился к состоянию гармонии и делаются попытки выполнять талантливую работу;

• 34 — гармония мышления, чувств, воображения: рождается способность к гениальной работе;

• 55 — в этом возрасте, при условии сохраненной гармонии души и тела, человек готов стать творцом. И так далее...

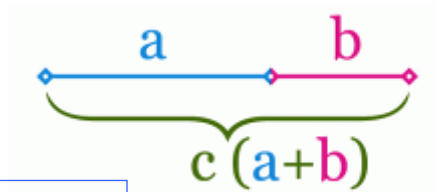
1.7. Спираль Фибоначчи

В математике нет иной формы, которая обладала бы такими же уникальными свойствами, как спираль, потому, что в основе строения спирали лежит правило Золотого сечения!

Чтобы понять математическое построение спирали, повторим, что такое Золотое сечение.

Золотое сечение - это такое пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части,

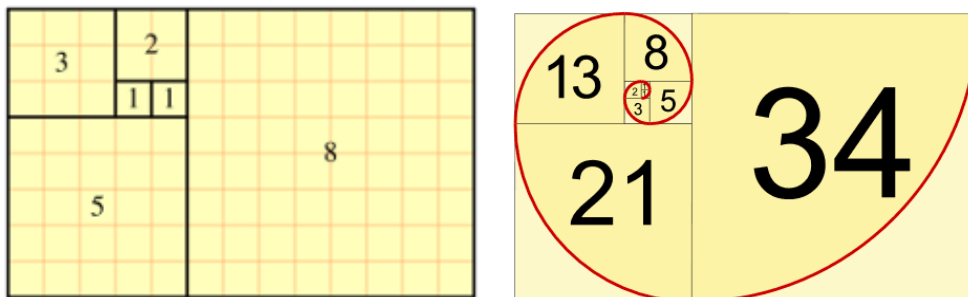
как сама большая часть относится к меньшей, или, другими словами, меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему.



То есть $(a+b) / a = a / b$

Прямоугольник с именно таким отношением сторон стали называть золотым прямоугольником. Его длинные стороны соотносятся с короткими сторонами в соотношении 1,168 : 1.

Золотой прямоугольник обладает многими необычными свойствами. Отрезав от золотого прямоугольника квадрат, сторона которого равна меньшей стороне прямоугольника, мы снова получим золотой прямоугольник меньших размеров.



Этот процесс можно продолжать до бесконечности. Продолжая отрезать квадраты, мы будем получать все меньшие и меньшие золотые прямоугольники. Причем располагаться они будут по логарифмической спирали, имеющей важное значение в математических моделях природных объектов.

Например, спиралевидную форму можно увидеть и в расположении семян подсолнечника, в ананасах, кактусах, строении лепестков роз и так далее.



Нас удивляет и восхищает спиральное строение ракушек.



У большинства улиток, которые обладают раковинами, раковина растет в форме спирали. Однако нет сомнения, что эти неразумные существа не имеют представления не только о спирали, но не обладают даже простейшими математическими знаниями, чтобы самим создать себе спиралевидную раковину.

Но тогда как же эти неразумные существа смогли определить и избрать для себя идеальную форму роста и существования в виде спиральной раковины? Могли ли эти живые существа, которых ученых мир называет примитивными формами жизни, рассчитать, что идеальной для их существования будет спиральная форма ракушки?

Пытаться объяснить происхождение подобной даже самой примитивной формы жизни случайным стечением неких природных

обстоятельств по меньшей мере абсурдно. Совершенно ясно, что этот проект является осознанным творением.

Спирали есть и в человеке. С помощью спиралей мы слышим:



Также, во внутреннем ухе человека имеется орган Cochlea ("Улитка"), который выполняет функцию передачи звуковой вибрации. Эта костевидная структура наполнена жидкостью и сотворена в форме улитки, имеющей в себе золотые пропорции.



Спирали есть на наших ладонках и пальцах:

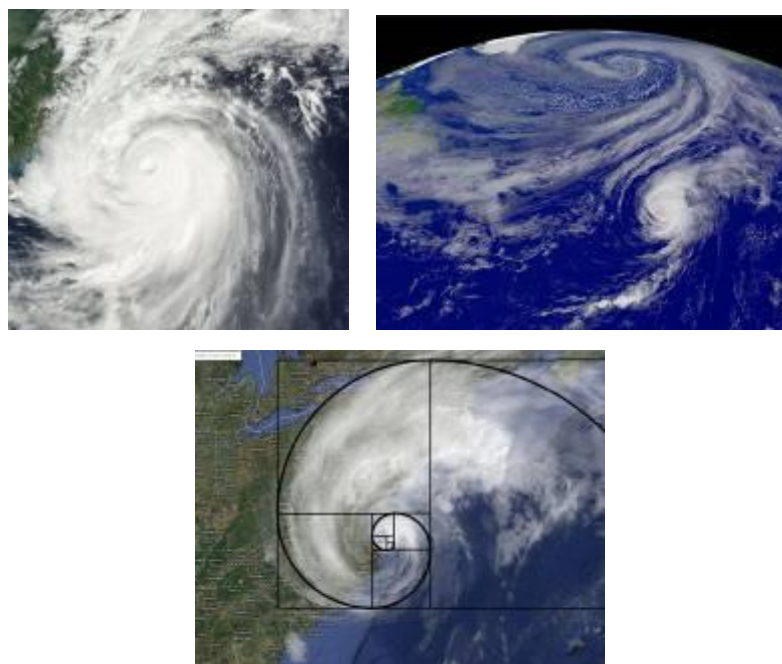


В животном мире мы также можем найти множество примеров спиралей.

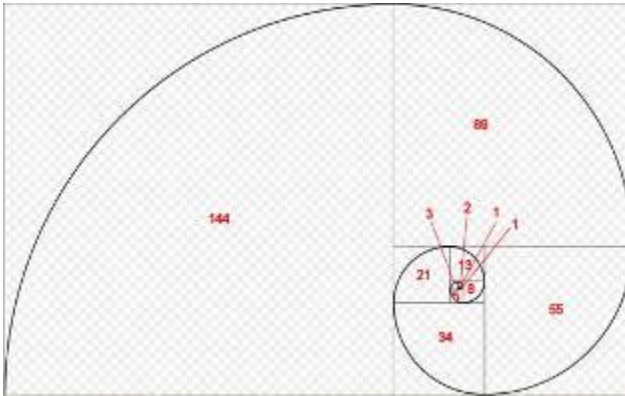
В форме спирали развиваются рога и бивни животных, когти львов и клювы попугаев являют собой логарифмические формы и напоминают форму оси, склонной обратиться в спираль.



Интересно, что спиралью закручивается ураган, облака циклона и это хорошо видно из космоса:



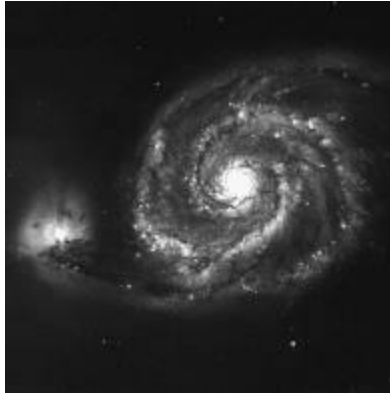
В океанских и морских волнах спираль можно математически отразить на графике с точками 1,1,2,3,5,8,13,21,34 и 55.



Такую «бытовую» и «прозаическую» спираль тоже все узнают.
Ведь вода убегает из ванной по спирали:



Да и живём мы с вами в спирали, ведь галактика – это спираль,
соответствующая формуле Золотого сечения!



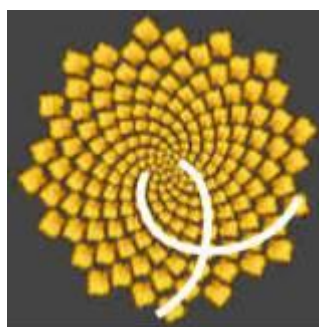
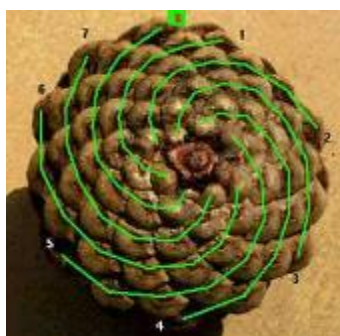
Итак, мы выяснили, что если взять Золотой прямоугольник и разбить его на более мелкие прямоугольники в точной последовательности Фибоначчи, а потом каждый из них разделить в таких пропорциях еще и еще, то получится система, которая называется спираль Фибоначчи. Эту спираль мы обнаружили в самых неожиданных предметах и явлениях. Теперь понятно, почему спираль называют ещё «кривой жизни». Спираль стала символом эволюции, ведь и развивается всё именно по спирали.

2. Экспериментальная часть

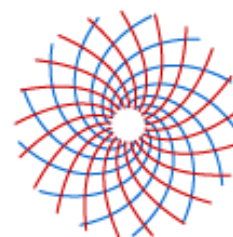
2.1. Наши исследования

В экспериментальной части мы продолжили наши наблюдения и изучили строение сосновой шишки, тысячелистника, комара и человека. И убедились, что в этих, таких разных на первый взгляд объектах, незримо присутствуют те самые числа последовательности Фибоначчи.

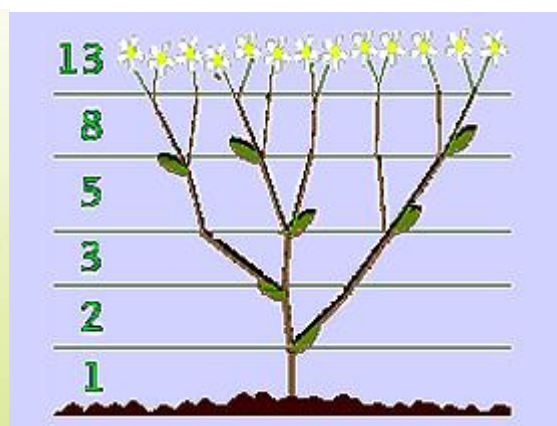
Рассмотрев и изучив сосновую шишку поближе, замечаем две серии спиралей Фибоначчи: одна - по часовой стрелке, другая - против, их число **8 и 13**.



1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...



Рассмотрев и изучив внимательно строение стеблей и цветов тысячелистника, заметим, что каждая новая ветвь тысячелистника растет из пазухи, и от новой ветви растут новые ветви. Складывая старые и новые ветви, мы нашли число Фибоначчи в каждой горизонтальной плоскости.

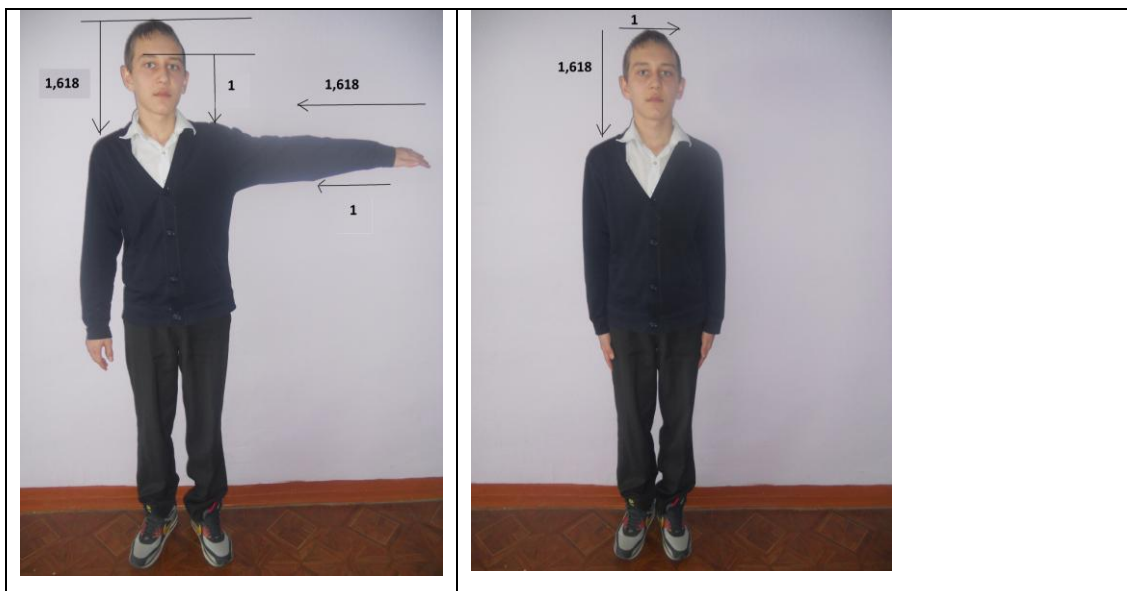


А проявляются ли числа Фибоначчи в морфологии различных организмов? Рассмотрев всем известного комара, видим: **3** пары ног, в голове **5** усиков – антенн, брюшко делится на **8** сегментов.



Найдём пропорции различных частей нашего тела, и убедимся, что они действительно составляют число, очень близкое к золотому сечению.

Занесём данные измерений и вычислений в таблицу.





№	t/s	Наши измерения (в см.)
1.	расстояние от кончиков пальцев до запястья / от запястья до локтя	37 / 22 \approx 1,62 \approx 1,618
2.	расстояние от уровня плеча до макушки головы /от плеча до бровей	29 / 18 \approx 1,61 \approx 1,618
3.	длина головы / ширина головы	24 / 14,8 \approx 1,62 \approx 1,618
4.	От макушки головы до пупка/от макушки головы до плеча	47 / 29 \approx 1,63 \approx 1, 618
5.	От макушки головы до плеча/ длина головы	29 / 18 \approx 1,61 \approx 1, 618
6.	От бровей до середины губ/ от бровей до основания носа	8 / 5 \approx 1, 6 \approx 1, 618

Видим, что пропорция "фи", которая равна отношению соседних чисел из ряда Фибоначчи, проявляется и в человеческом теле.

Вывод: в наших исследованиях мы увидели, что в окружающих нас растениях, живых организмах и даже в строении человека проявляют себя числа из последовательности Фибоначчи, что отражает гармоничность их

строения. Сосновая шишка, тысячелистник, комар, человек устроены с математической точностью.

Мы искали ответ на вопрос: как проявляет себя ряд Фибоначчи в окружающей нас действительности? Но, отвечая на него, получали новые и новые вопросы.

Откуда взялись эти числа? Кто этот архитектор вселенной, попытавшийся сделать её идеальной? Спираль скручивается или раскручивается? Как удивительно человек познаёт этот мир!!!

2.2. Составление программы

Также в экспериментальной части нами были изучены основы языка программирования Паскаль и составлена программа, отображающая на экран числа последовательности Фибоначчи. Эта программа намного упрощает ручное вычисление, так как она автоматически высчитывает эти числа в зависимости от требуемого количества в течение пары секунд. Что у человека заняло бы намного больше времени.

```
Program Fib;
Uses crt;
Type mas=array[1..100] of integer;
Var i,n,: integer;
    a: mas;
begin
    clrscr;
    write('n=');readln(n);
    a[1]:=1; a[2]:= 1;
    for i:= 3 to n do
        begin
```

```
        a[i]:= a[i-1] + a[i-2];
    end;
    for i:= 1 to n do
    begin
        writeln('a[',i,']= ',a[i]);
    end;
    readln;
end.
```

Заключение

Самим творцом во все объекты

Заложен уникальный код,

И тот, кто дружен с математикой,

Его познает и поймёт!

Мы изучили и проанализировали проявление чисел последовательности Фибоначчи в окружающей нас действительности. Мы обнаружили удивительную математическую связь между числом спиралей у растений, числом веток в любой горизонтальной плоскости и числами в последовательности Фибоначчи. Мы увидели, как морфология различных организмов тоже подчиняется этому таинственному закону. Также мы увидели строгую математику в строении человека.

Мы узнали, что сосновые шишки, раковины улиток, волны океана, рога животных, облака циклона и галактики – все они образуют логарифмические спирали. Даже человеческий палец, который составлен из трех фаланг, находящихся по отношению друг к другу в Золотой пропорции, принимает спиральную форму, когда сжимается.

Вечность времени и световые годы космоса разделяют сосновую шишку и спиральную галактику, но строение остаётся тем же самым: коэффициент **1,618!** Возможно, это первостепенный закон, управляющий природными явлениями.

Таким образом, наша гипотеза о существовании особых числовых закономерностей, которые отвечают за гармонию, подтверждается. Действительно, всё в мире продуманно и просчитано самым главным нашим дизайнером – Природой! Мы убедились, что у Природы есть свои законы, мы инструмент для познания тайн природы.

Список использованной литературы

1. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. – М., Наука, 1984.
2. Гика М. Эстетика пропорций в природе и искусстве. – М., 1936.
3. Дмитриев А. Хаос, фракталы и информация. // Наука и жизнь, № 5, 2001.
4. Кашницкий С. Е. Гармония, сотканная из парадоксов // Культура и жизнь. – 1982.– № 10.
5. Малай Г. Гармония – тождество парадоксов // МН. – 1982.– № 19.
6. Соколов А. Тайны золотого сечения // Техника молодежи. – 1978.– № 5.
7. Стахов А. П. Коды золотой пропорции. – М., 1984.
8. Урманцев Ю. А. Симметрия природы и природа симметрии. – М., 1974.
9. Урманцев Ю. А. Золотое сечение // Природа. – 1968.– № 11.
10. Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П. Золотое сечение/Три взгляда на природу гармонии.-М., 1990.
- 11.Шубников А. В., Копчик В. А. Симметрия в науке и искусстве. -М.: Наука, 1972.
12. http://www.chydesa-sveta.ru/en/chisla_fibonachchi.html
13. <http://zagadkamoszga.ru/node/630>
14. <http://magov.net/blog/3621.html>
15. <http://greenword.ru/2009/06/fibonacci-sequence.html>
16. <http://esopedia.ru/ChislaFibonachchi>
17. <http://reflection.org.ua/vselennaya/zagadka-chisel-fibonachi.html>