

2.4 Функции, их свойства и графики

1. Найдите область определения функции

$$\underline{y = \log_2(\sin 3x - \sin x)} \quad (1)$$

Решение:

Область определения функции (1) находится из условия

$$\sin 3x - \sin x > 0 \quad (2)$$

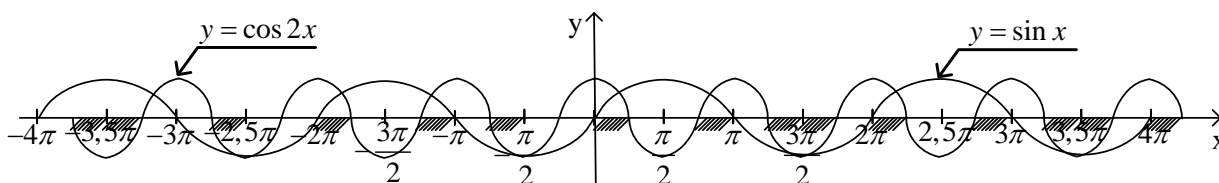
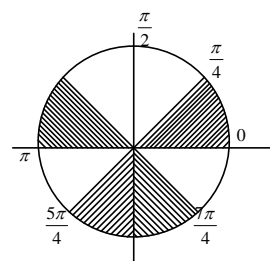
Преобразуем левую часть неравенства (2) в произведение, получим:

$2 \cos 2x \cdot \sin x > 0$. Решение этого неравенства находится из условия:

$$\begin{cases} \cos 2x > 0, \\ \sin x > 0, \end{cases}$$

ИЛИ

$$\begin{cases} \cos 2x < 0, \\ \sin x < 0. \end{cases}$$



Ответ: $(2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n) \cup (\frac{3}{4}\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n) \cup (\frac{5}{4}\pi + 2\pi n; \frac{7}{4}\pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.

2. Найдите область значений функции:

$$\underline{y = \frac{x-1}{x^2+1}}$$

Решение: $D(y) = \mathbb{R}$. Исследуем непрерывную и дифференцируемую на \mathbb{R}

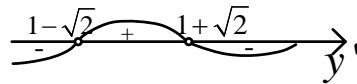
функцию $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ с помощью производной.

Имеем:

$$y' = \frac{x^2 + 1 - (x-1)2x}{(x^2 + 1)^2},$$

$$y' = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y' = 0 \text{ при } \begin{cases} -x^2 + 2x + 1 = 0, \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$



$$y' < 0 \text{ при } x \in (-\infty; 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}; +\infty)$$

$y' > 0$ при $x \in (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$, значит, функция $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ убывает на $(-\infty; 1 - \sqrt{2}]$ и на $[1 + \sqrt{2}; +\infty)$; возрастает на $[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$.

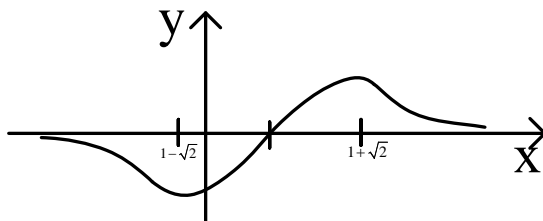
$1 - \sqrt{2}$ - точка минимума,

$1 + \sqrt{2}$ - точка максимума.

$$y_{\min} = y(1 - \sqrt{2}) = \frac{1 - \sqrt{2} - 1}{(1 - \sqrt{2})^2 + 1} = \frac{-\sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(1 - \sqrt{2})} = -\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

$$y_{\max} = \frac{1 + \sqrt{2} - 1}{(1 + \sqrt{2})^2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2(1 - 2)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

$$y = 0 \text{ при } x = 1.$$



$$\text{Ответ: } E(y) = \left[-\frac{\sqrt{2} + 1}{2}; \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right].$$

3. Постройте график функций, предварительно заменив ее тождественной функцией.

$$\underline{\underline{y = \sqrt{x + 2\sqrt{x+1} + 2} + \sqrt{x - 2\sqrt{x+1} + 2}}}$$

Решение:

$$y = \sqrt{x+2\sqrt{x+1}+2} + \sqrt{x-2\sqrt{x+1}+2} = \sqrt{(\sqrt{x+1})^2 + 2\sqrt{x+1}+1} + \sqrt{(\sqrt{x+1})^2 - 2\sqrt{x+1}+1} =$$

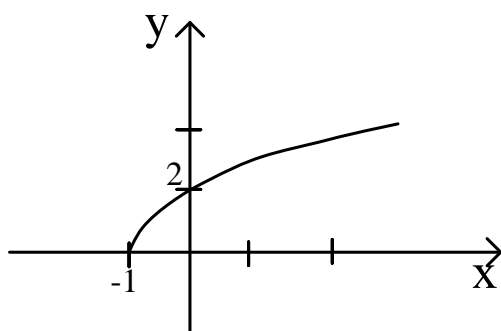
$$= |\sqrt{x+1}+1| + |\sqrt{x+1}-1|$$

Если $x+1 < 1$, т.е. $x < 0$, то $y = \sqrt{x+1}+1 - \sqrt{x+1}+1$,
 $y = 2$.

Если $x+1 > 1$, т.е. $x > 0$, то $y = \sqrt{x+1}+1 + \sqrt{x+1}-1$,
 $y = 2\sqrt{x+1}$.

$$D(y) = [-1; +\infty) \text{ т.к. } x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1.$$

Т.о.,
$$\begin{cases} y = 2, & \text{если } x \in [-1; 0] \\ y = 2\sqrt{x+1} & \text{если } x \in (0; +\infty), \end{cases} \quad x \in (-1; +\infty)$$



4. При каком значении a уравнение $-x^4 + 2x^2 + 8 = a$ не имеет корней?

Решение:

1 способ

$$-x^4 + 2x^2 + 8 = a$$

Пусть $x^2 = t$, тогда

$$-t^2 + 2t + (8-a) = 0,$$

$$t^2 - 2t - (8-a) = 0,$$

$$D_1 = 1 + 8 - a = 9 - a.$$

Уравнение не имеет корней в двух случаях:

1) Либо $D_1 < 0$, т.е. $9 - a < 0$,
 $a > 9$.

2) либо $D_1 > 0$, но $t_{1,2} < 0$, т.е.

$$\begin{cases} 9 - a \geq 0, \\ 1 - \sqrt{9 - a} < 0, \\ 1 + \sqrt{9 - a} < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 - a \geq 0, \\ \sqrt{9 - a} > 1, \\ \sqrt{9 - a} < -1, \end{cases}$$

- эта система решений не имеет.

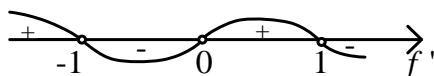
Значит, уравнение не имеет корней при $a > 9$.

2 способ

Для ответа на вопрос задачи исследуем функцию $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$ с помощью производной.

Находим $f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1) = -4x(x-1)(x+1)$.

Критическими точками функции являются: -1, 0, 1.



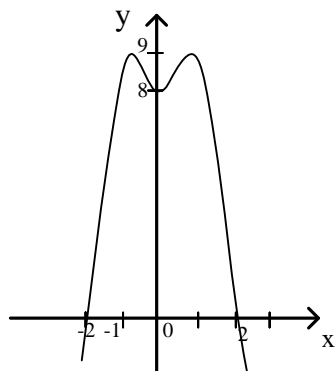
Функция $f(x)$, непрерывная на \mathbb{R} , возрастает на промежутке $(-\infty; -1] \cup [0; 1]$, убывает на $[-1; 0] \cup [1; +\infty)$. Функция четная.

Составим таблицу

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
f'	+	0	-	0	+	0	-
f	\nearrow	9 max	\searrow	8 min	\nearrow	9 max	\searrow

Учитывая характер монотонности функции, отраженный в таблице, делаем вывод, что функция не принимает значений, больших 9, следовательно при всех $a > 9$, уравнение $-x^4 + 2x^2 + 8 = a$ не имеет корней. Для большей наглядности приведем эскиз графика $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$

$$f(5) = f(-5) = -567$$



Ответ: $(9; +\infty)$.

5. Для каждого значения a определите число решений системы уравнений и приведите геометрическую интерпретацию полученного решения.

$$\begin{cases} x - y = a, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - a, \\ 2x^2 - 2ax + (a^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

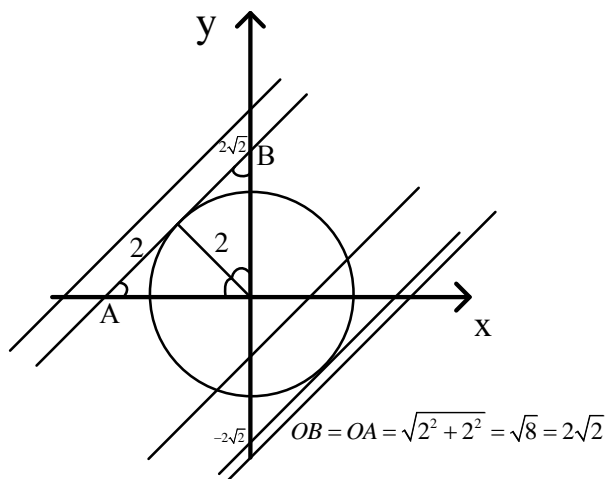
Решим второе уравнение системы:

$$D_1 = a^2 - 2(a^2 - 4) = a^2 - 2a^2 + 8 = 8 - a^2.$$

Если $D_1 > 0$, т.е. $8 - a^2 > 0$,
 $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$, то решения два.

Если $D_1 < 0$, т.е. $8 - a^2 < 0$,
 $a \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$, то решений нет.

Если $D_1 = 0$, т.е. $8 - a^2 = 0$,
 $a = \pm 2\sqrt{2}$, то решение одно.



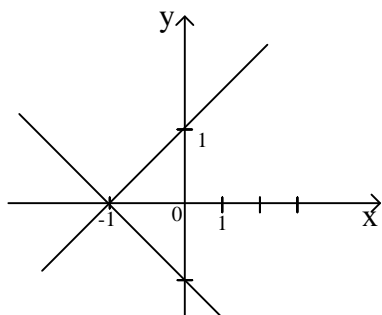
Ответ: при $|a| > 2\sqrt{2}$ решений нет, при $|a| = 2\sqrt{2}$ - одно решение, при $|a| < 2\sqrt{2}$ - два решения.

6. Изобразите на плоскости Oxy множество точек $P(x; y)$, координаты которых удовлетворяют условию: $|x+1| = |y|$ (1)

Решение:

Модули двух чисел равны, если эти числа либо равны, либо противоположны. Значит, уравнение (1) равносильно совокупности двух:

$$x+1=y \quad \text{или} \quad -x-1=y$$



$$|x+1|=|y|$$

7.

$$\begin{cases} y \leq 5 - 2|x|, \\ y \geq 2 - \frac{1}{2}|x|. \end{cases}$$

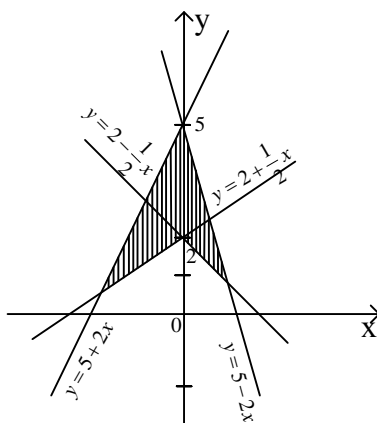
Решение:

Если $x < 0$, то система равносильна

$$\begin{cases} y \leq 5 + 2x, \\ y \geq 2 + \frac{1}{2}x. \end{cases}$$

Если $x \geq 0$, то

$$\begin{cases} y \leq 5 - 2x, \\ y \geq 2 - \frac{1}{2}x. \end{cases}$$



8. Укажите число решений уравнения в зависимости от параметра a :

$$\underline{\underline{\left| \frac{2x-1}{x+1} \right| = a}} \quad (1)$$

Решение:

1) Если $a < 0$, то уравнение (1) не имеет решений, т.к. модуль не может быть отрицательным.

2) Если $a = 0$, то $\frac{2x-1}{x+1} = 0, \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, т.е. 1 решение.

3) Если $a > 0$, то уравнение (1) равносильно совокупности двух уравнений:

$$\frac{2x-1}{x+1} = a,$$

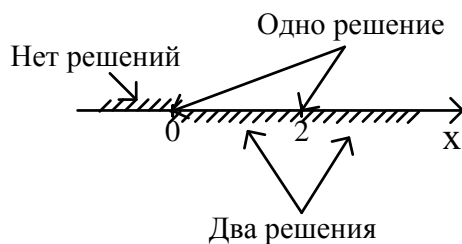
а) $\frac{2x-1-ax-a}{x+1} = 0,$

$$\begin{cases} x(2-a) = 1+a, \\ x+1 \neq 0. \end{cases}$$

Если $a \neq 2$, то $x = \frac{1+a}{2-a}$. Заметим, что знаменатель левой части уравнения не обращается в нуль, т.е. ($x \neq -1$) ни при каких a , т.к. если бы $x = -1$, то

$$-1 = \frac{1+a}{2-a},$$
$$\frac{1+a+2-a}{2-a} = 0,$$
$$\frac{3}{2-a} = 0.$$

Если $a = 2$, то $1+a \neq 0$, значит, уравнение $x(2-a) = 1+a$ корней не имеет.



$$\frac{2x-1}{x+1} = -a,$$

б) или $\frac{2x-1+ax+a}{x+1} = 0,$

$$\begin{cases} 2x+ax = 1-a, \\ x+1 \neq 0. \end{cases}$$

Решим уравнение $2x+ax = 1-a$

Если $2+a \neq 0$, т.е. $a \neq -2$, то $x = \frac{1-a}{2+a}$. (Но $a \neq -2$, т.к. рассматривается случай $a > 0$). Значит, последняя система имеет единственное решение.

Ответ: при $a \in (-\infty; 0)$ - решений нет, при $a = 0$ и при $a = 2$ - одно решение, при $a \in (0; 2) \cup (2; +\infty)$ - два решения.