

Конспект занятия преподавателя математики Рузановой В.М. на тему:

«Вычисление объемов геометрических тел с помощью определенного интеграла»

Цели:

1. Воспитательные:

- а) научить организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;
- б) принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях;
- в) воспитывать познавательную активность, самостоятельность;
- г) воспитывать умение работать в коллективе, команде.

2. Развивающие:

- а) развивать логическое мышление, пространственное воображение;
- б) развивать умение действовать по алгоритму, составлять алгоритмы действий;
- в) развивать упорство в достижении поставленных целей, в том числе и в профессиональной деятельности;
- г) развивать умение осуществлять поиск и использование информации из разных областей знаний, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

3. Образовательные:

- а) закрепить навыки нахождения определенного интеграла;
- б) научить применять интегрирование функций в качестве способа решения геометрических задач на нахождение объёмов.

Задачи:

- а) расширение кругозора учащихся;
- б) развитие интереса к математике и другим наукам

Оборудование: компьютер, проектор, классная доска. Презентация на тему «Объемы с помощью интегралов».

План урока.

1. Организационный момент. Вступительное слово учителя. Постановка задачи.
2. Повторение определения объема, формул объёмов прямой призмы и прямого цилиндра.
3. Объяснение нового материала: раскрытие связи между двумя науками: алгеброй и геометрией. Вывод основной формулы для нахождения объёмов геометрических тел.
4. Коллективное решение задачи 1. Составление алгоритма действий.
5. Вывод формулы объема тела вращения.
6. Решение задач на нахождение объёмов геометрических тел. Нахождение объема эллипсоида вращения

7. Нахождение объема тора.
 8. Итоги урока. Домашнее задание. Рефлексия.
- Занятие рассчитано на два академических часа.

Ход занятия

1. Вступительное слово преподавателя:

Всем известный, гениальный математик 19 века Николай Иванович Лобачевский говорил:

«Нет ни одной области математики, как бы абстрактна она ни была, которая когда-нибудь не окажется применимой к явлениям действительного мира»

Сегодня мы с вами поговорим о том, где применяется математическое действие – интегрирование. Например, с помощью интеграла вычисляются объемы различных тел.

2. Но прежде чем приступить к вычислению объемов сложных геометрических тел, вспомним, что называется объемом тела, и вспомним, как найти объем простых тел, таких как прямая призма и цилиндр.

Приведите примеры, в каких случаях нам нужно вычислить объем тела?

Сколько воды нужно, чтобы наполнить бассейн? Сколько сока поместится в кружке? Как определить, золотая корона или нет? Все это и многое другое относится к понятию объема. Что такое объём?

Объемом тела называется часть пространства, которое занимает тело. Объемы измеряются в кубических единицах: куб м, куб см, куб км, литрах $1\text{ л} = 1\text{ куб дм}$.

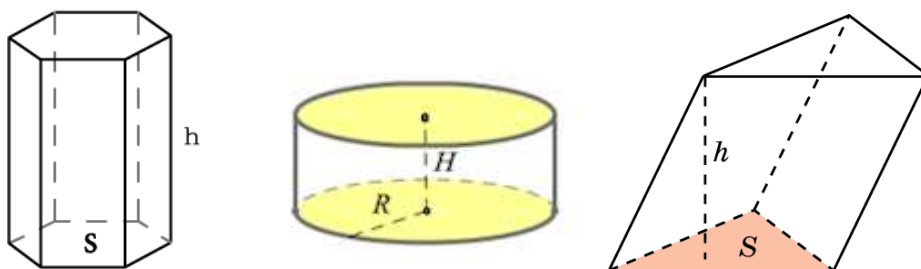
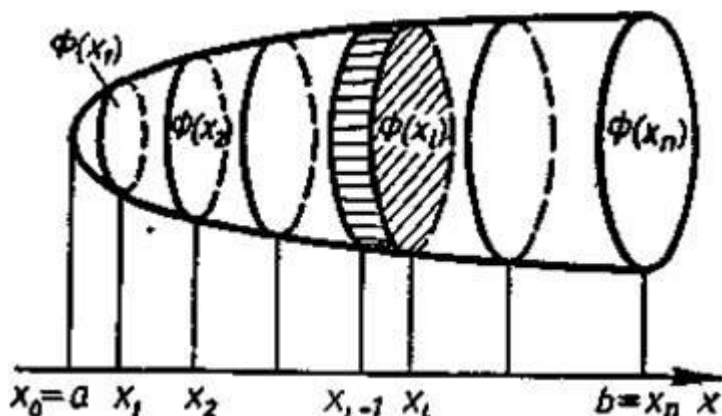


Рис 1.

На рисунке мы видим цилиндры и призмы, что общего в формуле вычисления объемов этих тел? Общего в них то, эти тела имеют нижнее и верхнее основания, расположенные на параллельных плоскостях. Правильно, нужно площадь основания умножить на высоту тела. $V = S \cdot H$

3. Рассмотрим произвольное тело, и поместим его в ортогональную систему координат. Представим себе, что наше тело заключено между двумя параллельными плоскостями α и β , которые перпендикулярны оси абсцисс и пересекают ее в точках **a** и **b**. Разобьем весь отрезок от **a** до **b** на n частей, примем, что начальная точка $a = x_0$, а конечная точка будет совпадать с $b = x_n$. Расстояние между каждым $x_{i-1} - x_i$ будет равно Δx_i . Через каждую точку x_i проведем плоскость, перпендикулярную оси абсцисс. Рассмотрим часть нашего тела, которая получается между двумя такими плоскостями, проходящими через точку x_{i-1} и x_i , Обозначим его Φ_i , это

тело может иметь различную форму, но мы приблизительно будем находить объем этого тела как произведение площади основания S_i на высоту Δx_i : $V_i = S_i \cdot \Delta x_i$



Если тело разбито на части как можно найти его объём? Объём тела равен сумме объёмов тел, его составляющих. Поэтому объём всего тела примерно равен сумме этих объёмов:

$V \approx \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n S_i \cdot \Delta x_i$ Чем больше n , тем точнее приближённое значение объёма всего тела и меньше Δx_i .

С другой стороны, сумма

$\sum_{i=1}^n S_i \cdot \Delta x_i$ является интегральной

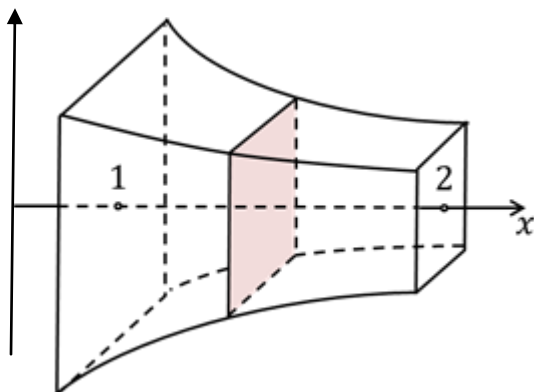
суммой для непрерывной функции $S = S(x)$ на числовом отрезке $[a; b]$, поэтому предел интегральной суммы равен интегралу на этом отрезке при $n \rightarrow \infty$, $V = \int_a^b S(x) dx$.

4. **Задача 1:** сечение тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и проходящей через точку с абсциссой x , является квадратом, сторона которого равна $\frac{1}{x}$. Найти объем этого тела.

К доске приглашается ученик

Решение: воспользуемся только что доказанной формулой.

$$V = \int_a^b S(x) dx$$



По рисунку видно, что пределами интегрирования будут числа $a = 1, b = 2$. Поскольку сечение плоскости – квадрат, значит, площадь сечения равна

$$S(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}.$$

Тогда получим, что объём этой фигуры равен

$$V = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \Big|_1^2 = -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = -\frac{1}{2} + 1 = 0,5 \text{ (ед. куб.)}$$

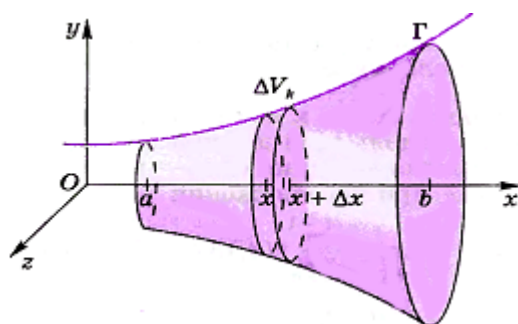
Составим алгоритм проделанных действий: а) располагаем тело на рисунке таким образом, чтобы его ось симметрии совпадала с осью абсцисс.

б) Находим, как изменяется площадь сечения тела, перпендикулярного оси Ox .

в) Определяем пределы интегрирования a и b .

г) Интегрируем.

5. Вычисление объемов тел вращения



Сечение тела вращения – круг.

Площадь круга $S = \pi \cdot R^2$

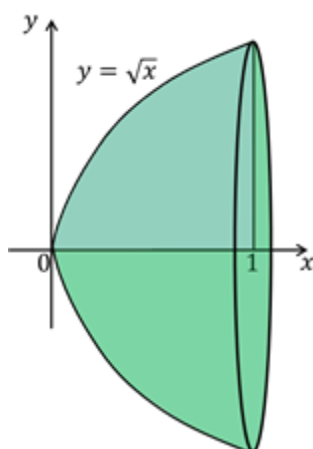
Какая величина в этой формуле является переменной? – радиус.

Значит, радиус является функцией $R = f(x)$, которая характеризует площадь сечения тела вращения в каждой точке промежутка $[a; b]$.

Переменная площадь сечения равна $S = S(x) = \pi \cdot R^2(x)$

Тогда объём тел вращения: $V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \pi R^2(x) dx = \pi \int_a^b R^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

Следует учесть, что формула действительна только для вращения вокруг оси Ox , для вращения вокруг оси Oy интегрирование должно производиться по переменной y .



Пример: найти объём тела, полученного вращением данной кривой, заданной формулой $y = \sqrt{x}$ вокруг оси абсцисс.

Решение: очевидно, что границами интегрирования будут числа $a = 0, b = 1$.

В сечении полученного тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox будет круг, радиус которого равен ординате точки с абсциссой x , то есть радиусом этого круга будет $r = \sqrt{x}$.

Площадь такого круга равна $S(x) = \pi \cdot (\sqrt{x})^2 = \pi x$ (ед. кв.). Поскольку x принимает только неотрицательные значения, то можно записать, что площадь сечения равна πx (ед. кв.).

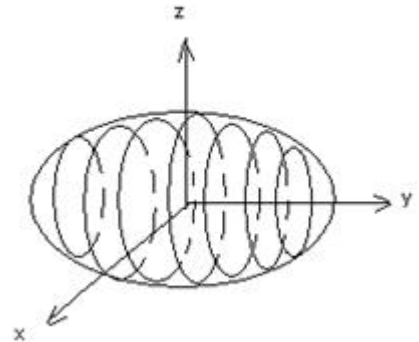
Вычислим объём полученного тела как $\int_0^1 \pi x dx$. Применив формулу Ньютона-Лейбница, получим, что объём данного тела равен

$$V = \int_0^1 \pi x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2} \text{ (ед. куб.)}$$

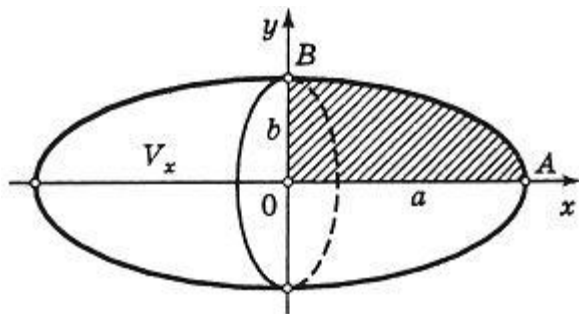
Итак, если кривая $y = f(x)$ вращается вокруг оси абсцисс, то объём получаемого тела вращения равен $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

6. **Задача 2:** Определить объём тела, ограниченного поверхностью, полученной от

вращения эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг большой оси.
Такое тело называется эллипсоида вращения.



Решение.



Расположим эллипс так, чтобы большая ось была вдоль оси абсцисс. Учитывая, что эллипс симметричен относительно осей координат, то достаточно найти объём, образованный вращением вокруг оси Ox кривой AB и полученный результат удвоить.

Обозначим объём тела вращения через V_x ;

тогда на основании формулы $V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$ имеем $\frac{1}{2} V_x = \pi \int_0^a y^2 dx$, где 0 и а - абсциссы точек

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

В и А. Из уравнения эллипса находим . Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} V_x &= \pi \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \pi b^2 \int_0^a dx - \frac{\pi b^2}{a^2} \int_0^a x^2 dx = \\ &= \pi b^2 \cdot x \Big|_0^a - \frac{\pi b^2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \pi b^2 a - \frac{\pi b^2}{a^2} \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} \pi a b^2. \end{aligned}$$

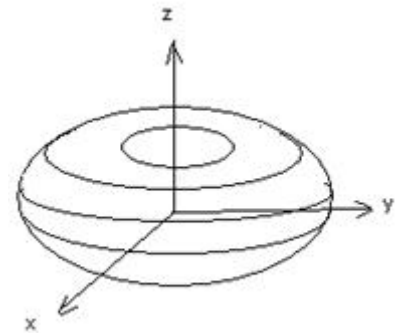
$$V_x = \frac{4}{3} \pi a b^2$$

Таким образом, искомый объем равен:

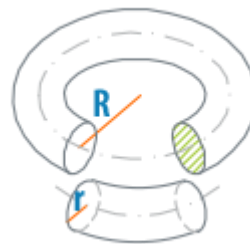
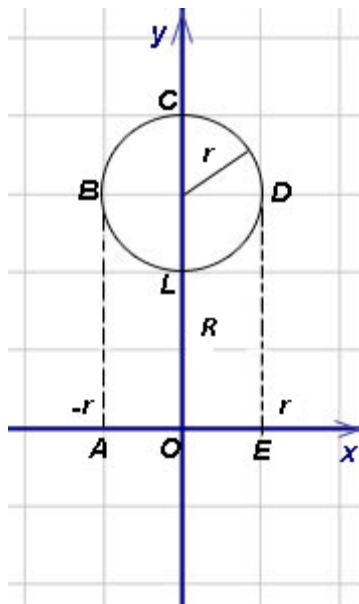
При вращении эллипса вокруг малой оси b,

$$V_y = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

объем тела равен:



7. **Задача 3.** Найдем объем тела вращения, которое носит название – тор или тороид. Форму тора имеет, например, бублик. Тором называется тело, полученное вращением круга радиуса r вокруг оси, лежащей в его плоскости на расстоянии R от центра круга ($r < R$).



Решение. Пусть круг вращается вокруг оси Ox (рис.). Объем тора можно представить как разности объемов тел, полученных от вращения криволинейных трапеций $ABCDE$ и $ABLDE$ вокруг оси Ox .

Уравнение окружности $LBCD$ имеет вид $x^2 + (y - R)^2 = r^2$

причём уравнение окружности $y = R \pm \sqrt{r^2 - x^2}$

Используя разность объёмов тел, получаем для объёма тора V выражение

$$V = \pi \int_{-r}^r ((R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2) dx$$

В силу симметрии фигуры относительно оси ординат, имеем:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^r ((R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2) dx = \\ &= 2\pi \int_0^r (R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} - (r^2 - x^2)) dx = \\ &= 2\pi \int_0^r 4R\sqrt{r^2 - x^2} dx = 8\pi \cdot R \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

Далее, для вычисления интеграла можно воспользоваться заменой переменной $x = r \sin t$, тогда

$$dx = r \cos t dt; \quad t = \arcsin \frac{x}{r}; \quad \text{но при } x = 0 \Rightarrow t = 0; \quad \text{при } x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$V = 8\pi \cdot R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t dt = 8\pi \cdot R \cdot r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = 8\pi \cdot R \cdot r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

Дальше нужно воспользоваться формулой понижения степени: $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$

$$V = 8\pi^2 R \cdot r^2 \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 4\pi^2 R \cdot r^2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi^2 R \cdot r^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 r^2 R$$

в результате преобразований и обратной замены получится: $V = 2\pi^2 r^2 R$

8. Итог занятия:

Сегодня на нашем занятии мы с вами разобрали достаточно сложные примеры вычисления объёмов геометрических тел. Мы вместе убедились в том, что математическое действие интегрирование находит практическое применение, например, при нахождении объёмов.

Домашнее задание: узнать самостоятельно, в каких областях науки применяется действие нахождение определенных интегралов.

Учебник геометрии: № 675, 727. Учить п.78 стр. 165.

Занятие окончено. Что вам удалось на уроке? Что показалось сложным? Над чем ещё надо поработать?

Литература:

1. Алимов Ш.А. Учебник «Алгебра 10-11» - М.: «Просвещение» , 2006.
2. Геометрия, 10–11: Учеб. для общеобразоват. учреждений/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 2014.
3. Б.Г. Зив. Дидактические материалы по геометрии для 11 класса. – М. Просвещение, 2013.
4. Ю.А. Глазков, И.И. Юдина, В.Ф. Бутузов. Рабочая тетрадь по геометрии для 11 класса. – М.: Просвещение, 2013.
5. Б.Г. Зив, В.М. Мейлер, А.П. Баханский. Задачи по геометрии для 7 – 11 классов. – М.: Просвещение, 2013.
6. С.М. Саакян, В.Ф. Бутузов. Изучение геометрии в 10 – 11 классах: Методические рекомендации к учебнику. Книга для учителя. – М.: Просвещение, 2013.
7. А.П. Киселев. Элементарная геометрия. – М.: Просвещение, 1980;