

## Фактормножество в примерах и упражнениях

В заметке приводится конспект вводного занятия по теме “фактормножество”. Переход к фактормножеству является самой сложной из базовых операций над множествами (объединение, пересечение, разность, переход к подмножеству, декартово произведение множеств) и потому почти никогда не изучается при первоначальном прохождении основ теории множеств в школе, как на уроках, так и на математических кружках. В то же время эта операция крайне важна для понимания ряда ключевых понятий школьной программы (например, при введении понятия вектора или при обсуждении углов произвольной величины и периодичности тригонометрических функции), “базовой” кружковой программы (сравнимость чисел по модулю, компоненты связности графов и многое другое), да и для развития математической интуиции ребенка, равно как и способности её вербализовать. Данная разработка представляет собой вводное обсуждение и серию возрастающих по сложности упражнений и может быть полезна для использования на кружковых занятиях 7-11 классов (в зависимости от уровня кружка). Представленный материал многократно проходил апробацию со школьниками разного возраста и уровня подготовки.

### Отношение эквивалентности — что это?

Напомним, если дано множество  $A$ , то можно перейти к меньшему множеству — *подмножеству*  $A$ , выбрав из  $A$  только часть элементов по некоторому признаку. Операция факторизации представляет из себя другой способ “уменьшить множество” — ничего не выбрасывая из этого множества, но мысленно склеивая некоторые (например, схожие по какому-либо признаку) элементы в один новый элемент.

Чтобы реализовать что-то подобное, самый прямой способ — точно описать, какие пары элементов мы считаем “похожими”, а какие нет. Если список интересующих нас “пар похожих элементов” полностью задан, то говорят, что на множестве  $A$  *задано отношение*. Более точно, говорят, что на множестве  $A$  задано отношение  $R$ , если про каждую пару элементов  $a, b$  из  $A$  зафиксировано одно из двух: либо “верно, что  $a R b$ ”, либо “неверно, что  $a R b$ ”. Или, используя больше слов, “ $a$  находится с  $b$  в отношении  $R$ ” или “ $a$  НЕ находится с  $b$  в отношении  $R$ ”. Вместо  $R$  для обозначения отношения можно использовать любую другую букву или математический символ (что и будет происходить ниже).

**Комментарий:** если ученики знакомы с понятием декартова произведения множеств, то можно дать ещё более формальное и короткое определение: отношение — это просто подмножество множества  $A \times A$ . Однако это определение, конечно, труднее усваивается неопытными в формализме учениками.

Известный ученикам с первого класса пример отношения — это отношение порядка, например, отношение  $<$ . Если дано множество  $A = \{1, 2, 3\}$ , и мы хотим объяснить человеку, не знакомому с понятием “меньше”, в каких случаях следует использовать

значок  $<$ , можно просто констатировать: “верно, что  $1 < 2$ , что  $1 < 3$ , что  $2 < 3$ ” и “неверно, что  $1 < 1$ , что  $2 < 1$ , что  $3 < 1$ , что  $2 < 2$ , что  $3 < 2$ , что  $3 < 3$ ”.

Поставим теперь задачу о склеивании: давайте скажем, что мы хотим разбить множество  $A$  на классы так, чтобы если  $a R b$ , то  $a$  и  $b$  обязательно попали в один класс, а если неверно, что  $a R b$ , то  $a$  и  $b$  обязательно попали бы в два разных класса. Если нам удастся проверить нечто подобное, то дальше мы в каждом классе все элементы склеим в один новый и получим некоторое новое множество, “фактормножество”. На самом деле, можно и не говорить ничего про склеивание, а просто рассматривать “множество классов”, т.е. множество подмножеств, на которое мы разбили множество. Однако это сложнее себе представить.

Но всегда ли можно реализовать такое разбиение множества, как описано выше? Нет, например, уже упомянутое отношение порядка для этого совершенно непригодно. Сформулируем, какие условия для этого необходимы.

Давайте рассмотрим бытовой пример: пусть имеется множество людей и  $a R b$  будет означать “ $a$  нравится  $b$ ”, что бы это ни значило. Тогда наша цель — разбить группу на идеальные компании без внутренних антипатий и таким образом, чтобы все симпатичные каждому человеку люди оказались в одной с ним компании. В такой формулировке любому ясно, в чём могут состоять препятствия: во-первых чувства могут быть не взаимными, может случиться так, что  $a$  хотел бы оказаться с  $b$  в одной компании, а наоборот — нет. Кроме того, даже если всюду предполагать взаимность чувств, “друзья моих друзей — не обязательно мои друзья”, и это ещё одно препятствие к идеальному разбиению. Третье, самое простое, но, возможно, наименее очевидное препятствие состоит в том, что человек может не нравиться самому себе! В этом случае ему в любой компании будет неуютно. Суммируя, мы получаем следующее главное для нас определение:

Отношение  $\sim$  на множестве  $A$  называется **отношением эквивалентности**, если выполняется:

- 1)  $a \sim a$  для любого элемента  $a$  множества  $A$ .
- 2) Если  $a \sim b$ , то обязательно  $b \sim a$ .
- 3) Если  $a \sim b$  и  $b \sim c$ , то  $a \sim c$  ( $a, b, c$  — любые элементы множества  $A$ , не обязательно различные).

Мы видим, что в этом определении математически закодированы все проблемы, описанные в предыдущем абзаце (точнее постулировано отсутствие соответствующих проблем). Свойство 1) называется рефлексивностью, свойство 2) — симметричностью, свойство 3) — транзитивностью. Если дано отношение эквивалентности  $\sim$  и  $a \sim b$  для каких-то  $a$  и  $b$ , мы будем называть  $a$  и  $b$  эквивалентными друг другу.

Возвращаясь к уже рассмотренному примеру, отношение  $<$  является транзитивным, но вовсе не является ни рефлексивным, ни симметричным.

Может показаться, что свойство 1) лишнее, так как его можно вывести из первых двух. Действительно, если  $a \sim b$ , то, по второму свойству,  $b \sim a$ . Если же  $a \sim b$  и  $b \sim a$ , то, по свойству 3) (полагая  $c$  равным  $a$ ) получаем, что  $a \sim a$ , так что рефлексивность не нуждается в отдельном постулировании. Это короткое “рассуждение” способно поставить в тупик не самого глупого человека, однако, конечно же, неверно и очень полезно понять, почему.

Оказывается, что сформулированный нами “список проблем” является полным. Это значит, что

**Если на множестве  $A$  задано отношение эквивалентности  $\sim$ , то  $A$  можно разбить на непересекающиеся подмножества, называемые *классами эквивалентности* так, чтобы любые два эквивалентные элемента попали в один класс, а любые два неэквивалентные элементы попали в разные классы эквивалентности.**

Разбиение осуществляется очень просто: пусть каждый элемент  $a$  возьмет себе в класс все такие  $x$ , что  $a \sim x$  — тогда мы получим то, что называется *классом эквивалентности элемента  $a$*  — вот и разбили на классы (каждый элемент попал, как минимум, сформированный им же класс). Надо ещё проверить, конечно, что после этого получится то, что надо, для этого и нужны три наших свойства. А именно, нужно проверить такое утверждение:

*Если  $a$  и  $b$  эквивалентны, то класс  $a$  совпадает с классом  $b$ . Если  $a$  и  $b$  не эквивалентны, то класс  $a$  не имеет с классом  $b$  общих элементов. Получающееся разбиение на классы удовлетворяет условиям из предыдущего утверждения.*

Вывести это утверждение из свойств 1-3 (аксиом эквивалентности) совсем несложно и полезно предложить ученикам. Мы же обратимся к примерам.

Множество классов эквивалентности называется “фактормножеством”. Как уже отмечалось, адекватный способ представить себе фактормножество — это мысленно склеить элементы каждого класса в один.

## **Классы эквивалентности и фактормножества. Самые наглядные примеры.**

Вот несколько ключевых примеров.

- 1) Некоторым архетипичным примером может служить множество, состоящее из клеток некоторой прямоугольной таблицы. Назовём две клетки эквивалентными, если они находятся в одной строке. Все аксиомы отношения эквивалентности тут проверяются моментально, точно так же легко выписывается класс эквивалентности данной клетки: это вся её строка. Таким образом, фактормножество представляет из себя как бы жирный столбец — исходную таблицу, в которой все клетки на одной высоте слиплись в одну.

Поскольку в этом примере по сути идёт речь о декартовом произведении двух множеств, его можно в свою очередь клонировать в бесчисленное количество различных примеров. Приведём один из них: множество минут в сутках можно закодировать как (номер часа, номер минуты в часе), что даёт таблицу  $24 \times 60$ . Если теперь объявить эквивалентными любые две минуты внутри одного часа (то есть промежутка от  $x$  часов 00 минут до  $x + 1$  часа 00 минут), то фактормножеством будет как бы множество часов.

- 2) Обратимся к ключевому примеру из теории чисел. Назовём два целых числа *сравнимыми по модулю  $n$* , если их разность делится на  $n$ . Можно двумя способами убедиться, что это отношение эквивалентности: напрямую проверить три аксиомы или понять, что числа сравнимы по модулю  $n$  тогда и только тогда, когда они дают одинаковые остатки при делении на  $n$ . В этом случае проверка аксиом становится тривиальной, и, кроме того, ясно, что получается ровно  $n$  классов эквивалентности (они называются *классами вычетов*), соответствующих  $n$  различным остаткам. Каждый класс при этом бесконечен.
- 3) Рассмотрим ещё один пример: назовем числа  $a$  и  $b$  близкими, если их неполные частные при делении на  $n$  совпадают. Это, конечно, отношение эквивалентности, и легко понять, что каждый класс эквивалентности состоит ровно из  $n$  чисел (например, при  $n = 5$  класс числа 13 — это в точности все числа с неполным частным 2, то есть  $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ ). Число классов эквивалентности в этом примере бесконечно, то есть бесконечно фактормножество.

Внимательный читатель заметит, что последние два примера близко связаны как друг с другом, так и с первым примером. А именно, пример 2 получается как частный случай примера 1, если выписать все целые числа в виде таблицы с  $n$  столбцами и бесконечным числом строк подходящим образом (например, при  $n = 2$  выписать в первую строчку все чётные числа, и под каждым из них написать число на единицу большее). Третий пример же получается, если соответствующую таблицу повернуть на 90 градусов.

- 4) Ещё один пример: немного кривая таблица. Рассмотрим множество всех точек на координатной плоскости. Скажем, что две точки эквивалентны, если они находятся на одинаковом расстоянии до начала координат  $O$ . В этом случае ясно, что классы эквивалентности — это окружности с центром в  $O$ , за исключением “вырожденного класса”, который состоит из одной точки — самой точки  $O$ . Фактормножество и будет множеством таких окружностей (включая вырожденную). Для наглядности можно выбрать *трансверсаль*, т.е. выбрать по представителю из каждого класса. Наиболее наглядно это можно сделать, проведя любой луч из начала координат (например, лежащий на оси абсцисс): этот луч пересечёт по разу каждый класс эквивалентности, т.е. будет трансверсалью. Трансверсаль можно воспринимать как наглядное изображение более сложной вещи — фактормножества, “множества множеств”.

Отметим, что если выколоть из плоскости точку  $O$ , то этот пример в каком-то смысле тоже укладывается в концепцию таблицы, или декартова произведения: каждая оставшаяся точка  $A$ , однозначно задается парой  $(r, \varphi)$ , где  $r$  — длина отрезка  $OA$ ,  $\varphi$  — угол между лучом  $[OA)$  и осью  $[OX)$ . Здесь  $r$  — это произвольное положительное число, а  $\varphi \in [0, 2\pi)$  (так называемая *полярная система координат*). В этом случае переход к нашему фактормножеству заключается в “забывании” второй координаты.

Внимательно посмотрев на приведённые примеры, мы видим, что все их можно уложить в одну схему: каждый раз мы объявляем два элемента эквивалентными, если у них совпадает некоторый *классифицирующий признак* (номер строки, или остаток при делении на  $n$ , или неполное частное при делении на  $n$ , или расстояние до начала координат). В этом случае очевидно, что данное отношение представляет из себя отношение эквивалентности, и понятно, как представлять себе фактормножество: каждый его элемент соответствует одному из возможных значений признака. К такой модели может быть сведено **любое** отношение эквивалентности, хотя сам классифицирующий признак может быть далеко неочевиден. Соответствующим примерам посвящён, в основном, следующий раздел.

Мы же отметим, но без подробностей, ещё пару ключевых для школьной программы (и всей математики) примеров.

- 1) Вектора есть “классы эквивалентности направленных отрезков” (отношение эквивалентности — направленный отрезок  $AB$  эквивалентен направленному отрезку  $CD$ , если  $ABDC$  параллелограмм, возможно вырожденный). Трансверсаль в этом примере можно получить если, например, рассмотреть все мыслимые направленные отрезки с началом в начале координат (*радиус-вектора*).
- 2) Два вещественных числа  $a$  и  $b$  назовём *сравнимыми по модулю  $2\pi$* , если  $a - b = 2\pi k$ , где  $k$  — целое число. Переход от множества вещественных чисел к соответствующему фактормножеству соответствует наматыванию прямой на окружность. При этом у каждого получающегося класса эквивалентности, представляемого точкой на окружности, однозначно определены синус и косинус, что отражает  $2\pi$ -периодичность тригонометрических функций. Кроме того, точки на окружности можно складывать и вычитать, складывая и вычитая те вещественные числа, из которых они “произошли”, но нельзя умножать и делить — но это уже тема для отдельного большого разговора.

## Дальнейшие примеры.

Примеры ниже являются серией упражнений возрастающей сложности и подобраны так, чтобы правильный числовой ответ (количество элементов в фактормножестве) служил надежным индикатором того, что ученик разобрался в сути данной задачи,

что, впрочем, не отменяет и необходимости проговаривания деталей. Сами по себе эти примеры менее важны и более искусственны, чем примеры из предыдущего раздела, однако полезность их “прорешивания” для способного ученика, пожалуй, выше.

В каждом из упражнений ниже задано множество  $M$  и отношение эквивалентности на нём. Требуется определить размер фактормножества, т.е. количество классов эквивалентности. В данных задачах оно всюду оказывается конечным, т.е. натуральным числом, хотя само множество  $M$  в некоторых примерах бесконечно. Отметим, что полное решение задачи везде включает проверку того, что данное отношение вообще является отношением эквивалентности, но этот момент в обсуждениях ниже, как правило, опускается.

Большинство примеров построено на теоретико-числовом материале, то есть от решающего требуется хорошее понимание азов теории делимости (разложение натурального числа на простые множители, сложение и умножение остатков) и кое-где базовых соображений комбинаторики.

**Упражнение 1.**  $M = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$  и  $a \sim b$  если суммы цифр (в десятичной записи) чисел  $a$  и  $b$  равны.

**Решение:** Здесь всё просто, поскольку в задаче явно указан классифицирующий признак — сумма цифр. Каждый класс эквивалентности соответствует определенной сумме цифр, так что всё, что остаётся сделать — это выяснить, сколько разных значений может принимать сумма цифр для чисел из указанного интервала. Минимально возможная сумма — 1, максимально возможная — 27 (у числа 999) и все промежуточные варианты, очевидно, достигаются. Ответ: 27.

Те ученики, у которых уже такая задача вызывает проблемы, вероятно, к этому моменту не слишком хорошо представили себе происходящее, и их можно, с целью конкретизации материала, попросить явно выписать, например, самые маленькие по размеру классы в этом примере (один одноэлементный и два трёхэлементных), подобные контрольные вопросы возможны и в следующих примерах.

**Упражнение 2.**  $M = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$  и  $a \sim b$  если  $a^2 - b^2$  делится на 8.

**Решение:** Здесь классифицирующий признак не указан явно, однако ребенок, знакомый с примером про классы вычетов, тут же переформулирует:  $a \sim b$ , если  $a^2$  и  $b^2$  дают одинаковые остатки при делении на 8. Задача принимает такой же вид, как и в предыдущем примере, однако неопытный ученик может тут остановиться и дать ответ 8. В действительности не каждый остаток от деления на 8 является остатком какого-то квадрата. Чтобы разобраться в этом вопросе, можно, например, возвести в квадрат каждый из остатков и убедиться в том, что квадраты остатков (или что то же самое, остатки квадратов) от деления на 8 — это только 0, 1 и 4. Ответ: 3.

**Упражнение 3.**  $M$  — множество пар чисел вида  $(a, b)$ , где  $a, b$  — натуральные числа, не превосходящие 100. Здесь пары берутся *упорядоченные*, т.е.  $(1, 2)$  и  $(2, 1)$  — это две разные пары. Две пары  $(a, b)$  и  $(c, d)$  эквивалентны, если  $a + d = b + c$ .

**Решение:** Здесь тоже классифицирующий признак не указан явно, в частности, в данной ситуации сходу даже не очевидно, как и в большинстве примеров ниже, яв-

ляется ли это отношение вообще отношением эквивалентности. Неопытный ученик может принять сумму “ $a + d$ ” за подходящий признак, но будет, конечно же, неправ: эта сумма является характеристикой “пары пар”, а не отдельной пары (тем не менее, с её помощью можно, почти случайно, получить правильный ответ с неправильным решением, впрочем, незначительное изменение условия избавляет задачу от этой особенности). Однако, можно “развести” числа разных пар, перенеся некоторые слагаемые в другую часть:  $a - b = c - d$ . Теперь видно, что классифицирующим признаком является *разность* между первым и вторым числом в паре и, подобно предыдущим примерам, остаётся выяснить множество возможных значений этой разности. Ясно, что это все целые числа от  $-99 = 1 - 100$  до  $99 = 100 - 1$ . Итого, ответ: 199 классов.

Комментарий: эта задача легко визуализируется, если отметить на плоскости все точки, у которых пара координат такая, как указана в задаче. Тогда разбиение на классы эквивалентности задаётся прямыми  $x - y = k$ , параллельными биссектрисе второго координатного угла. Ровно 199-ю такими прямыми покрываются интересующие нас точки.

**Упражнение 4.**  $M = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$  и  $a \sim b$  если дробь  $\frac{a}{b}$  равна некоторой дроби  $\frac{p}{q}$ , где  $p, q$  — нечетные натуральные числа.

**Решение:** Отметим, что при сокращении числителя и знаменателя на общий множитель из дроби, у которой и числитель, и знаменатель нечётны, получается дробь такого же вида. Поэтому можно сказать, что  $a \sim b$ , если, разделив каждое из чисел  $a$  и  $b$  на их наибольший общий делитель, мы придём к паре нечётных чисел. Разложим  $a$  и  $b$  на простые множители; тогда указанное сокращение сведётся к процессу одновременного вычеркивания общих простых множителей. Мы хотим, чтобы по окончании этого процесса получились нечетные числа, то есть ни там, ни там не осталось двоек. Очевидно, что это произойдёт ровно в том случае, когда изначально количества двоек в разложении  $a$  и  $b$  на простые множители совпадали. Вот мы и нашли классифицирующий признак! Это количество двоек в разложении числа на простые множители (оно называется *степенью вхождения* простого числа 2 в данное натуральное число). Осталось понять, чему может быть равно это количество для чисел, не превосходящих 1000: поскольку  $2^9 = 512 < 1000$ , а  $2^{10} = 1024 > 1000$ , то степень вхождения может принимать все значения от 0 до 9. Ответ: 10.

**Упражнение 5.**  $M$  — множество всех натуральных делителей числа  $30^{30}$ .  $a \sim b$ , если при некотором показателе степени  $N$   $a^N$  делится на  $b$  и  $b^N$  делится на  $a$ .

**Решение:** Ясно, что любой делитель числа  $30^{30} = 2^{30} \cdot 3^{30} \cdot 5^{30}$  имеет вид  $2^k 3^l 5^m$ , где каждый из показателей  $k, l, m$  — натуральное число или ноль. То же относится и к произвольным их степеням. Если, скажем,  $a$  делится на какое-то простое число из этих трёх, а  $b$  не делится, то не будет делиться и любая степень  $b$ . В этом случае, никакая степень  $b$  тем более не будет делиться на  $a$ . Если же разложение  $b$  на простые множители содержит все простые делители  $a$  (но, возможно, какие-то из них в меньшем количестве, чем в  $a$ ) то, возведя  $b$  в достаточно большую степень  $N$ , можно добиться того, чтобы все степени вхождения стали больше, чем в  $a$ . В этом случае  $b^N$  будет делиться на  $a$ .

Всё то же верно, разумеется, и если поменять  $a$  и  $b$  ролями, и мы получаем классифицирующий признак:  $a \sim b$ , если множества простых делителей  $a$  и  $b$  (без учёта кратности) совпадают! Осталось заметить, что множествами простых делителей в нашем случае могут быть только следующие:  $\{2, 3, 5\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{2, 5\}$ ,  $\{3, 5\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{5\}$  и ... пустое множество простых делителей (у числа 1). Ответ: 8.

**Упражнение 6.**  $M$  — множество всех натуральных делителей числа  $30^{30}$ .  $a \sim b$ , если  $a$  и  $b$  делятся на квадраты одних и тех же натуральных чисел.

**Решение:** Здесь классифицирующий признак указан явно — это множество всех делителей-квадратов, так что по крайней мере то, что данное отношение — отношение эквивалентности, сомнений не вызывает. Однако это не позволяет сходу написать ответ. Следует заметить, что число вида  $2^k 3^l 5^m$  делится на квадрат числа  $2^x 3^y 5^z$  ровно в том случае, если  $k \geq 2x$ ,  $l \geq 2y$ ,  $m \geq 2z$ . Поэтому  $a \sim b$ , если при разложении на простые множители показатели при каждом из возможных простых множителей 2, 3, 5 у них либо совпадают, либо один из них имеет вид  $2t$ , а другой —  $2t + 1$ . Значит класс числа  $2^x 3^y 5^z$  определяется тройкой  $(2p, 2q, 2r)$ , где  $2p, 2q, 2r$  суть ближайшие снизу к показателям  $x, y, z$  соответственно чётные числа. Каждое из этих трёх чётных чисел может принимать 16 значений (от 0 до 30), поэтому всего получаем  $16 \cdot 16 \cdot 16 = 16^3$  вариантов значений классифицирующего признака. Ответ:  $16^3$ .

**Упражнение 7.**  $M = \mathbb{N}$  — множество всех натуральных чисел.  $a \sim b$  если произведение всех ненулевых цифр чисел  $a$  и  $b$  есть квадрат целого числа. (например  $330 \sim 632$ , так как  $3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = 324 = 18^2$ ).

**Решение:** Здесь сходу ещё менее понятно, почему это отношение эквивалентности (и почему количество классов конечно). Тут опять помогает разложение на простые множители: разложим каждую ненулевую цифру у чисел  $a$  и  $b$  и перемножим, как и предписывается в условии. Заметим, что, во-первых, все простые множители, которые теоретически могут у нас появиться — это 2, 3, 5, 7, а во-вторых, получившееся число будет квадратом в том и только том случае, если каждый из этих простых множителей будет присутствовать в четном количестве (возможно, равном нулю). В-третьих, общее количество, например, двоек в разложении  $a$  и  $b$  будет четным тогда и только тогда, когда по отдельности два количества имели одинаковую четность. То же, разумеется, верно и для остальных трёх простых цифр.

Поэтому  $a \sim b$ , если у  $a$  и  $b$  одинаковый набор “четностей степеней вхождения в произведение цифр” чисел 2, 3, 5, 7, который можно коротко называть характеристикой числа. Например, если  $a = 12345678910$ , то произведение ненулевых цифр имеет вид  $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^1$ , так что это число имеет характеристику (чет, чет, нечет, нечет). Осталось понять, сколько бывает различных характеристик: на каждой из четырех позиций возможно два значения — чет и нечет, так что всего имеем  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$  возможных комбинаций, т.е. 16 возможных характеристик, каждая из которых задаёт свой класс эквивалентности. Ответ: 16 классов.