

**А.В. Купко,**  
преподаватель информатики

## **ИНФОРМАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ИНФОРМАТИКИ: КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ**

### **Предисловие**

Много лет назад, учась в физико-математической школе, я пытался самостоятельно изучать любимую мною физику глубже, чем нам давали преподаватели (должен отметить, хорошие преподаватели, учившие нас не только физике, математике и другим дисциплинам, но, прежде всего, самостоятельности). Я брал учебники для вузов, но в них физика была спрятана за слишком сложной высшей математикой, брал вузовские учебники высшей математики, но в них смысл был спрятан за доказательствами вроде бы очевидных утверждений. И вот, наконец, мне в руки попала книга “Высшая математика для начинающих”, написанная физиком Я.Б. Зельдовичем, в которой без лишнего “тумана” сложные вещи излагались на доступном уровне. Благодаря этой книге я открыл для себя высшую математику. В эти же годы в нашей стране стали выходить выпуски совершенно нового, оригинального курса физики – “Фейнмановские лекции по физике”. С этого курса, смею думать, взросло не одно поколение физиков не только в нашей стране, но во всём мире. Благодаря ему я разобрался в градиентах, дивергенциях и роторах, которыми была заполнена “Теория поля” Л.Д. Ландау и просмотр которой вызывал чувство неполноценности в десятикласснике, пусть даже физико-математической школы. Неизгладимое впечатление оставили 5-й и 6-й выпуски, в которых в доступной форме излагались уравнения Максвелла и вообще элементы теории поля.

Также запомнилось решение Кеплеровой задачи численным методом, приведенное во втором выпуске как пример интегрирования уравнений движения.

По окончании университета я много лет занимался (и продолжаю заниматься) различными физическими задачами, решая уравнения математической физики, преимущественно численными методами.

Волею обстоятельств в течение семи лет я преподаю информатику в лицее “Профессионал”. В процессе преподавательской деятельности возникло желание, наряду с решением традиционных задач программирования (сортировка массивов и т. п.) и естественных для экономического отделения задач составления платёжных ведомостей и бухгалтерских проводок, дополнить курс программирования решением реальных задач, имеющих ясный физический смысл. Одной из таких задач является Кеплерова задача.

### **Постановка задачи**

Рассмотрен полный цикл построения и исследования информационной модели на примере движения планет в Солнечной системе (Кеплерова задача) [1].

Эта работа находится на стыке информатики, физики и астрономии и позволяет в рамках школьного курса выполнить компьютерный (вычислительный) эксперимент и на основании его результатов изучить законы Кеплера, исследовать движение космических аппаратов к другим планетам, определить параметры их траекторий.

В работе реализуется личностно-ориентированный принцип обучения с дифференцированным подходом к учащимся, позволяющий в максимальной степени реализовать их творческий потенциал. Дифференцированность подхода реализуется в поэтапности работы, при этом более способные учащиеся не “скучают” в ожидании отстающих, а выполняют более сложные этапы. В работе можно выделить такие этапы:

1. Рассмотреть уравнения движения тела (материальной точки) вокруг гравитирующего центра и разработать алгоритм их численного интегрирования.
2. Разработать программу численного интегрирования уравнений движения с выводом результатов в текстовый файл.
3. Разработать графический интерфейс к программе (вывод траектории движения на экран).

4. Исследовать численно параметры движения и “доказать” законы Кеплера:
  - а) первый закон – о траекториях движения (орбитах) как эллипсах;
  - б) второй закон – о секторных скоростях;
  - в) третий закон – о пропорциональности квадратов периодов обращения кубам больших полуосей орбит.
5. Построить модель Солнечной системы с учётом притяжения планет только к Солнцу.
6. Усложнить модель, учтя также силы взаимного притяжения, действующие между планетами.
7. Исследовать влияние планет друг на друга, то есть возмущения в движении планет в усложнённой модели (6) по сравнению с результатами “простой” модели (5). Этот этап существенно отличается по своей сложности и трудоёмкости от предыдущих и по своему уровню соответствует скорее курсовой работе с элементами научного исследования.
8. Рассмотреть траектории движения межпланетных космических аппаратов, подобрать необходимые параметры траекторий (начальные скорости) и определить продолжительность перелёта между заданными планетами.

Данная работа прошла апробацию в лицее “Профессионал” на протяжении 5 лет в курсе информатики для учащихся экономического отделения. Тема рассчитана на 6 часов классных занятий (3 занятия по 2 часа), но для реализации всех её этапов в полном объёме требуется дополнительно самостоятельная работа учащихся, в том числе за компьютером. Ниже представлено примерное содержание занятий (обязательный минимум) по часам:

Номер часа	Содержание занятия
1	Качественное описание физических процессов. Математическая формулировка.
2	Введение в разностные схемы. Разработка алгоритма численного интегрирования.
3	Разработка программы численного интегрирования с выводом результатов в текстовый файл.
4	Разработка графического интерфейса программы.
5	Тестирование и отладка программы, выполнение расчётов по программе.
6	Контрольная работа (тематическая аттестация).

Рассмотрим последовательно содержание занятий.

Вначале необходимо вспомнить формулировки закона всемирного тяготения и второго закона Ньютона, изученные в курсе физики.

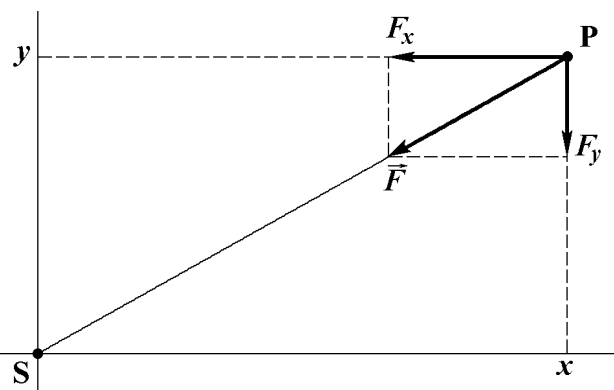
Пусть в точке S находится Солнце, а в точке P – планета. Предполагаем, что масса Солнца намного больше массы планеты, в таком случае можно считать Солнце неподвижным. На планету P со стороны Солнца действует сила  $\vec{F}$ , направленная по линии, соединяющей планету с Солнцем. Вектор силы может быть разложен на две составляющие по осям X и Y декартовой системы координат, связанной с Солнцем.

Согласно закону всемирного тяготения сила  $\vec{F}$  определяется следующим выражением:

$$\vec{F} = -G \frac{M_s m}{r^2} \vec{e}_r \quad (1)$$

где  $M_s$  и  $m$  – массы Солнца и планеты, соответственно,  $r$  – расстояние между центрами Солнца и планеты,  $G$  – гравитационная постоянная,  $\vec{e}_r$  – единичный вектор в направлении от Солнца к планете. Из подобия треугольников (см. рисунок) нетрудно получить выражения для  $F_x$  и  $F_y$ :

$$F_x = -G \frac{M_s m}{r^2} \cdot \frac{x}{r}, \quad F_y = -G \frac{M_s m}{r^2} \cdot \frac{y}{r}. \quad (2)$$



Согласно второму закону Ньютона ускорение, с которым движется тело, пропорционально векторной сумме всех сил, действующих на тело. В нашем случае на планету действует единственная сила  $\vec{F}$ , определяемая выражением (1). Таким образом, второй закон Ньютона для планеты Р определяется выражением:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \frac{M_S}{r^2} \vec{e}_r, \quad (3)$$

где  $\vec{a}$  – вектор ускорения. Это векторное уравнение может быть представлено в виде двух скалярных уравнений относительно проекций векторов на оси X и Y:

$$a_x = \frac{F_x}{m} = -G \frac{M_S}{r^2} \cdot \frac{x}{r}, \quad a_y = \frac{F_y}{m} = -G \frac{M_S}{r^2} \cdot \frac{y}{r}. \quad (4)$$

Для замыкания полной системы уравнений необходимо задать начальные координаты  $x$ ,  $y$  и начальные значения проекций скорости  $V_x$  и  $V_y$ . На этом построение математической модели можно считать завершённым.

### Разработка алгоритма

Далее наступает этап разработки алгоритма решения полученной системы уравнений. Для этого необходимо вспомнить некоторые элементы высшей математики, а именно понятие производной как скорости изменения некоторой величины. Так, ускорение тела – это скорость изменения во времени скорости тела, а скорость тела, в свою очередь, – это скорость изменения во времени координаты. Для  $x$ -компонентов мы можем написать:

$$\frac{dx}{dt} = V_x, \quad \frac{dV_x}{dt} = a_x. \quad (5)$$

Теперь самое время рассказать о разностных методах решения дифференциальных уравнений. Необходимо вспомнить определение производной как предела отношения приращения функции к приращению аргумента при приращении аргумента, стремящемся к нулю, а затем вовремя остановиться. То есть не устремлять приращение аргумента к нулю, а оставить его хотя и малым, но конечным числом:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \Rightarrow \frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h}. \quad (6)$$

Слева записано строгое равенство, а справа – приближённое равенство при хотя и малом, но конечном  $h$ . Интуитивно понятно, что чем меньшее значение будет иметь приращение аргумента  $h$ , тем точнее будет это приближённое равенство.

Для обеспечения достаточной точности расчёта необходимо выбирать величину  $h$  достаточно малой, но вот критерий достаточности в каждом конкретном случае определяется условиями задачи. Например, для расчёта движения тела, брошенного под углом к горизонту, на поверхности Земли (камня, пули, снаряда) величину  $h$  следует выбирать равной сотым или тысячным долям секунды, а при расчёте движения в Солнечной системе, причём с гораздо большими скоростями, как мы увидим дальше, значения  $h$  могут достигать сотен, тысяч и десятков тысяч секунд, обеспечивая при этом удовлетворительную точность расчёта.

Но продолжим наши изыскания в области разностных методов. Комбинируя выражения (5) и (6), получаем:

$$\begin{cases} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = V_x \Rightarrow x(t+h) = x(t) + V_x \cdot h \\ \frac{V_x(t+h) - V_x(t)}{h} = a_x \Rightarrow V_x(t+h) = V_x(t) + a_x \cdot h. \end{cases} \quad (7)$$

Мы получили простые алгебраические выражения, которые позволяют получить значения искомых величин (координаты и скорости) в момент времени  $t+h$ , если известны их значения и значение ускорения  $a_x$  в предыдущий момент времени  $t$ . Но ведь значение ускорения  $a_x$  определяется, согласно (4), через значения координат  $x$  и  $y$ , то есть они легко могут быть вычислены! (Напоминаем, что значение  $r$  определяется через  $x$  и  $y$  согласно теореме Пифагора, см. рисунок!)

Итак, добавляя к (7) аналогичные выражения для  $y$ -компонентов, получаем систему 4 уравнений для отыскания 4 неизвестных  $x, y, V_x$  и  $V_y$  как функций времени  $t$ :

$$\begin{cases} V_x(t+h) = V_x(t) + a_x(t) \cdot h \\ V_y(t+h) = V_y(t) + a_y(t) \cdot h \\ x(t+h) = x(t) + V_x(t) \cdot h \\ y(t+h) = y(t) + V_y(t) \cdot h. \end{cases} \quad (8)$$

Для замыкания этой системы уравнений необходимо задать начальные условия. Начинаем расчёт с момента времени  $t = 0$ . Для этого момента необходимо задать координаты и скорости:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad V_x(0) = V_{x0}, \quad V_y(0) = V_{y0}. \quad (9)$$

На первом шаге по (8) мы можем вычислить значения искомых величин для момента времени  $t = h$ . На следующем шаге вычисляем значения для следующего момента времени  $t = 2h$ , на следующем шаге – для  $t = 3h$ , и так далее. Таких шагов может быть очень много – тысячи, десятки и сотни тысяч.

В результате численного интегрирования мы получаем значения искомых величин не в произвольные моменты времени, а для моментов времени, кратных  $h$ . Как говорят, мы произвели дискретизацию непрерывных функций. В этом заключается особенность численных методов – решение для непрерывных функций получается в дискретных точках, или узлах разностной сетки. Это решение может быть представлено в виде таблицы. При необходимости для промежуточных моментов времени решение может быть получено путём интерполяции табличных данных.

Графики искомых величин как функций времени представляют собой кусочно-ломаные линии, состоящие из отрезков прямых, хотя графики реальных физических величин, конечно же, должны изображаться плавными линиями без изломов. Любой численный расчёт является приближённым, имеет погрешность, которая и проявляется в отличии кусочно-ломаных линий от реальных плавных кривых. Но чем короче отрезки ломаной, тем точнее они аппроксимируют (приближают) плавную кривую. Поэтому чем меньше  $h$ , тем меньше погрешность численного расчёта.

Рассмотренный нами метод интегрирования дифференциальных уравнений (8) называется методом Эйлера, а его разностная аппроксимация – явной схемой первого порядка аппроксимации. Схема называется явной, потому что значения функций для нового момента времени определяются значениями всех величин в предыдущий момент времени, для которого они считаются известными. А первый порядок означает, что погрешность вычислений по этому методу пропорциональна шагу интегрирования в первой степени: так, если мы уменьшим значение  $h$  в 10 раз, то и погрешность вычислений уменьшится в 10 раз. Это не самая лучшая схема, на практике обычно используют схемы повышенного порядка аппроксимации. Но даже в классе разностных схем одного порядка аппроксимации возможны различные варианты, учитывающие особенности решаемой задачи. Так, нетрудно увидеть, что в двух первых уравнениях системы (8) предполагается, что на временном интервале от  $t$  до  $t+h$  компоненты скорости изменяются, как при равноускоренном движении; в то же время в двух последующих уравнениях предполагается равномерное движение с постоянной скоростью, без учёта ускорения. Как известно, при равноускоренном движении перемещение определяется формулой:

$$x(t+h) = x(t) + V_x(t) \cdot h + \frac{a_x(t) \cdot h^2}{2} \quad (10)$$

Напрашивается мысль так “подправить” два последних уравнения системы (8), чтобы в них учитывалось ускорение, то есть для вычисления  $x$  и  $y$  использовать дополнительную, ещё не учтённую в (8) информацию о характере движения (обычно чем больше конкретной информации о решаемой задаче учитывается при использовании универсальных математических методов, тем точнее получается решение):

$$\begin{cases} V_x(t+h) = V_x(t) + a_x(t) \cdot h \\ V_y(t+h) = V_y(t) + a_y(t) \cdot h \\ x(t+h) = x(t) + V_x(t) \cdot h + \frac{a_x(t) \cdot h^2}{2} \\ y(t+h) = y(t) + V_y(t) \cdot h + \frac{a_y(t) \cdot h^2}{2} \end{cases} \quad (11)$$

Наконец, можно учесть тот факт, что в системе уравнений (8) к моменту вычисления  $x(t+h)$  и  $y(t+h)$  уже оказываются вычисленными  $V_x(t+h)$  и  $V_y(t+h)$ , эти значения могут быть использованы в правых частях двух последних уравнений, при этом система остаётся явно разрешимой:

$$\begin{cases} V_x(t+h) = V_x(t) + a_x(t) \cdot h \\ V_y(t+h) = V_y(t) + a_y(t) \cdot h \\ x(t+h) = x(t) + V_x(t+h) \cdot h \\ y(t+h) = y(t) + V_y(t+h) \cdot h \end{cases} \quad (12)$$

Подставив выражения для  $V_x(t+h)$  и  $V_y(t+h)$  в два последних уравнения системы (12), можно увидеть, что полученная система уравнений отличается от системы (11) только отсутствием коэффициента 2 в знаменателях последних слагаемых.

Итак, мы получили три разные системы уравнений (8), (11) и (12) для численного решения одной и той же задачи. Назовём эти методы, соответственно, “классическим методом Эйлера”, “методом Эйлера с учётом ускорения” и “методом Эйлера-Зейделя” (Зейдель предложил вычислять каждую последующую неизвестную системы с учётом уже вычисленных значений предыдущих неизвестных). Все эти методы явные, имеют первый порядок аппроксимации. Априори (заранее) трудно отдать предпочтение какому-либо из них, необходимо выполнить решение одной и той же задачи разными методами и сравнить погрешности полученных решений.

Как упоминалось выше, существуют разностные схемы более высокого порядка аппроксимации. В качестве примера рассмотрим неявную схему второго порядка аппроксимации. Для этого вернёмся к выражениям (7). В этих выражениях при вычислении  $x$  и  $V_x$  в момент времени  $t+h$  давайте определим значения скорости  $V_x$  и ускорения  $a_x$ , стоящие в правой стороне равенств, как полусумму их значений в моменты времени  $t$  и  $t+h$ :

$$\begin{cases} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{1}{2} [V_x(t) + V_x(t+h)] \Rightarrow x(t+h) = x(t) + \frac{h}{2} [V_x(t) + V_x(t+h)] \\ \frac{V_x(t+h) - V_x(t)}{h} = \frac{1}{2} [a_x(t) + a_x(t+h)] \Rightarrow V_x(t+h) = V_x(t) + \frac{h}{2} [a_x(t) + a_x(t+h)] \end{cases} \quad (13)$$

Полученное выражение явно сложнее предыдущего (7), главное, для вычисления  $x(t+h)$  необходимо знать значение скорости  $V_x(t+h)$ , которое к этому моменту ещё не вычислено, а для вычисления  $V_x(t+h)$  необходимо знать  $a_x(t+h)$ , которое также ещё не может быть вычислено. Поскольку значения  $x(t+h)$  и  $V_x(t+h)$  явно не выражаются через известные величины, схема называется неявной. Для её решения используется метод итераций (повторений): сначала по (13) вычисляем  $x(t+h)$ , заменяя в правой части  $V_x(t+h)$  на  $V_x(t)$ , и  $V_x(t+h)$ , заменяя в правой части  $a_x(t+h)$  на  $a_x(t)$ , — это соответствует схеме метода Эйлера, но затем уточняем по (13) значения  $x(t+h)$  и  $V_x(t+h)$ , используя в правых частях значения  $V_x(t+h)$  и  $a_x(t+h)$ , полученные на предыдущей итерации, и так повторяем несколько раз. Кажется, по сравнению с явными методами этот метод более трудоёмкий, и действительно, на каждом временном шаге приходится выполнять в несколько раз больше вычислений, чем в явных методах. Но оказывается, благодаря усложнению, эта схема приобретает ряд преимуществ — во-первых, она становится существенно более точной (порядок аппроксимации повышается до двух: при уменьшении  $h$  в 10 раз погрешность вычислений уменьшится в  $10^2 = 100$  раз, и так далее), во-вторых, эта схема становится безусловно устойчивой. Но мы сейчас не будем углубляться в теорию устойчивости разностных схем: этот материал выходит за рамки нашей работы.

Следует отметить, что также существуют явные схемы повышенного порядка аппроксимации. Так, в научной практике часто используют довольно эффективный явный метод Рунге-Кутты четвёртого порядка [2], однако, мы его не рассматриваем вследствие сложности его вывода и громоздкости выражений. Этот метод был использован учащейся лицея Ларисой Истоминой в работе, выполненной для конкурса Малой Академии наук, см. настоящий сборник, но её работа выходит за рамки школьного курса информатики.

### Разработка программы

Итак, мы получили все необходимые выражения для разработки программы и можем приступить к программированию. Ниже в качестве примера приведен фрагмент программы на Паскале, в котором в цикле выполняется решение системы уравнений (12) с выводом результатов в текстовый файл. Программирование систем уравнений (8) и (11) предлагаем выполнить самостоятельно. Какая же из трёх систем уравнений точнее? И как проверить точность расчёта?

Для оценки точности расчёта можно использовать какое-либо выражение (закономерность), ещё не использованное в алгоритме. В нашем случае может быть использован закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mV^2}{2} - G \frac{M_s m}{r} = E = const. \quad (14)$$

Первое слагаемое слева – это кинетическая энергия, следующее слагаемое определяет потенциальную энергию в гравитационном поле. Полная энергия  $E$  в процессе движения должна оставаться величиной постоянной. Естественно, численный расчёт имеет какую-то погрешность, и значение энергии со временем будет изменяться, однако, если расчёт корректен, это значение не должно сильно отличаться от начального значения. Мерой точности расчёта может служить величина

$$\delta = \left| \frac{E - E_0}{E_0} \right|, \quad (15)$$

определяющая относительное изменение (как говорят, дисбаланс) энергии, где  $E_0$  – значение энергии, вычисленное в начальный момент времени. Исследуя, во сколько раз изменяется  $\delta$  при изменении шага интегрирования, скажем, в 10 раз, можно экспериментально определить порядок аппроксимации используемого метода.

Для проверки работоспособности программы предлагаем выполнить расчёт движения Земли вокруг Солнца. Значения параметров в системе СИ взяты из справочника [3], а также из таблиц, приведенных в компьютерной энциклопедии “Red Shift 4”. Как известно, Земля вращается вокруг Солнца по эллиптической орбите с эксцентриситетом  $e \approx 0,0167$ . Начальная точка выбрана расположенной на оси  $X$  на расстоянии в  $1-e \approx 0,9833$  а.е., при этом орбитальная скорость имеет только  $y$ -компоненту. Значение начальной скорости подобрано таким, чтобы период обращения оказался равным 365,256 суток, что соответствует длительности земного года. Расчёт движения выполняется для временного интервала 366 суток, то есть чуть больше полного оборота. Значение шага интегрирования по времени выбрано равным 864 с, или сотой доле суток.  $n$  – счётчик числа шагов интегрирования по времени – используется для ограничения объёма выводимой в файл информации. Рекомендуем в операторе вывода WriteLn использовать форматную печать.

```
G := 6.6726e-11;      { Гравитационная постоянная }
Ms := 1.9891e30;      { Масса Солнца }
x  := 149.59787e9;    { Астрономическая единица }
x  := x*0.9833;
y  := 0;
Vx := 0;
Vy := 30.288143e3;    { Подбранное значение начальной скорости }
h  := 864;             { Шаг интегрирования по времени }
t  := 0;              { Начальное значение времени }
```

```

n := 0; { Начальное значение номера шага }
Repeat
  n := n+1;
  t := t+h;
  r2 := Sqr(x)+Sqr(y); { Квадрат расстояния }
  r := Sqrt(r2); { Расстояние между Солнцем и планетой }
  a := -G*Ms/r2; { Ускорение планеты }
  ax := a*x/r; { x – компонента ускорения }
  ay := a*y/r; { y – компонента ускорения }
  Vx := Vx+ax*h; { Вычисление x – компоненты скорости }
  Vy := Vy+ay*h; { Вычисление y – компоненты скорости }
  x := x+Vx*h; { Вычисление координаты x }
  y := y+Vy*h; { Вычисление координаты y }
  if n mod 1000 = 0 then WriteLn(F,t,x,y,Vx,Vy);
Until t/86400 >= 366;

```

Для проверки работоспособности программы и оценки точности расчёта была выполнена серия расчётов разными методами со значениями шага интегрирования от 86 400 с (сутки) до 86,4 с (тысячная доля суток). Некоторые результаты расчёта, позволяющие судить о точности методов, приведены ниже в таблице.

Наряду с тремя методами первого порядка, для сравнения приведены результаты расчёта неявным методом второго порядка аппроксимации с заданным количеством итераций. В качестве параметров, определяющих точность, используются период одного оборота вокруг Солнца и максимальное значение дисбаланса механической энергии. Варианты расчётов с разными шагами интегрирования обозначены буквами от “а” до “д”, соответствующие значения шага интегрирования приведены в первых строках таблицы.

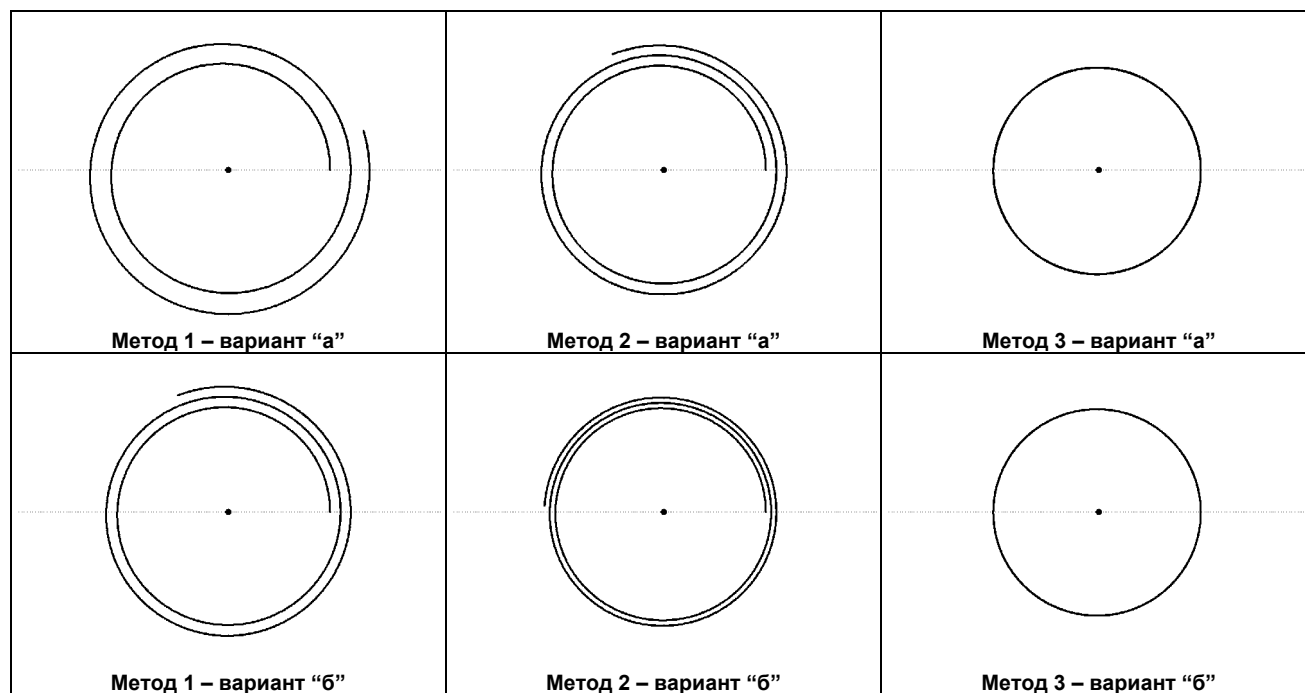
#### Сравнительный анализ точности расчётов разными методами

Параметр	Вариант	Классический метод Эйлера	Метод Эйлера с учётом ускорения	Метод Эйлера-Зейделя	Неявный метод 2-го порядка
		Метод 1	Метод 2	Метод 3	Метод 4
Шаг интегрирования по времени, секунды	а	86 400	86 400	86 400	86 400
	б	43 200	43 200	43 200	43 200
	в	8 640	8 640	8 640	8 640
	г	864	864	864	864
	д	86,4	86,4	86,4	86,4
Период обращения, сутки	а	427,7974	395,9735	365,3360	365,2710
	б	395,6945	380,3394	365,2760	365,2598
	в	371,2145	368,2299	365,2568	365,2561
	г	365,8490	365,5525	365,2560	365,2560
	д	365,3153	365,2856	365,2560	365,2560
Дисбаланс энергии, относительные единицы	а	0,17094146	0,09540193	0,00048343	$1,49 \cdot 10^{-5}$
	б	0,09544846	0,05069876	0,00018821	$3,72 \cdot 10^{-6}$
	в	0,02107146	0,01067554	0,00003041	$1,49 \cdot 10^{-7}$
	г	0,00215768	0,00108031	0,00000290	$1,49 \cdot 10^{-9}$
	д	0,00021629	0,00010816	0,00000029	$1,49 \cdot 10^{-11}$

Как можно увидеть из таблицы, три первых метода действительно имеют первый порядок аппроксимации, поскольку при уменьшении шага интегрирования в 10 раз дисбаланс энергии уменьшается также примерно в 10 раз. В последнем методе при уменьшении шага интегрирования в 10 раз дисбаланс энергии уменьшается в  $10^2$  раз, следовательно, этот метод имеет второй порядок аппроксимации.

Ниже приведены изображения расчётных траекторий движения в течение 1000 суток для вариантов “а” и “б” трёх первых методов. Как видно, при больших шагах интегрирования два первых метода дают слишком грубую, неверную картину движения: движение якобы происходит по незамкнутым орбитам, представляющим собой раскручивающиеся спирали. С уменьшением шага интегрирования степень “раскрутки” спирали уменьшается, и в пределе траектории становятся замкнутыми.

### Расчётные траектории движения пробного тела вокруг Солнца



Интересно сравнить вариант “б” метода 1 с вариантом “а” метода 2: эти варианты практически совпадают. Следовательно, метод 2 вдвое точнее (при равных шагах интегрирования), либо вдвое экономнее (при равной точности расчёта) по сравнению с методом 1. Метод 3 уже при шаге интегрирования в 1 сутки обеспечивает приемлемую точность расчёта, которая существенно повышается с уменьшением шага.

В результате анализа полученных результатов можно сделать такой важный для практики вывод, что даже в классе методов одного порядка аппроксимации абсолютные погрешности результатов для разных методов имеют существенно различные значения. Классический метод Эйлера обеспечивает не слишком высокую точность; второй метод, в котором при нахождении приращения координат учитывается “равноускоренность” движения, обеспечивает примерно вдвое большую точность, и, наконец, третий метод, в котором при вычислении приращения координат используются вычисленные значения скоростей, обеспечивает существенно большую точность (в  $200 \div 750$  раз при разных значениях шага интегрирования), причём с уменьшением шага интегрирования относительная точность возрастает.

Все три метода имеют примерно одинаковую степень сложности при программировании и требуют одинаковых ресурсов вычислительной системы (равных объёмов оперативной памяти и равного машинного времени при одинаковом количестве шагов интегрирования), обеспечивая в то же время существенное различие в точности. Очевидно, для дальнейших расчётов следует выбрать метод, обеспечивающий максимальную точность!

### Вычислительный эксперимент

Разработав и проверив расчётную программу, можно приступить к исследованию законов Кеплера. В результате расчётов (конечно, если программа верна) мы видим, что траектории движения являются замкнутыми кривыми.



### Первый закон Кеплера

Первый закон Кеплера утверждает, что орбиты планет являются эллипсами, при этом Солнце находится в одном из его фокусов. Это утверждение, естественно, обобщается на любые замкнутые орбиты при движении в гравитационном поле, – малых планет, комет, спутников планет, космических аппаратов и т.д.

Предположим, что это утверждение верно. Как доказать, что полученные в результате численного расчёта траектории (орбиты) являются эллипсами? Для этого надо вспомнить свойство эллипса. Как известно, эллипс – это фигура, у которой сумма расстояний от любой её точки до фокусов есть величина постоянная. Следовательно, для доказательства того, что орбита – эллипс, надо показать, что сумма расстояний от любой её точки до фокусов одинакова для всех точек орбиты.

Если расчёт начинать из точки, расположенной на оси X, а начальную скорость направить по оси Y, легко увидеть, что получаемая траектория симметрична относительно оси X, таким образом, фокусы должны располагаться на этой же оси. Предположив, что начало координат является одним из фокусов, получаем выражение для X-координаты второго фокуса:

$$X_{f2} = x_{\max} + x_{\min}, \quad (16)$$

где  $x_{\max}$  и  $x_{\min}$  – максимальное (справа) и минимальное (слева) значения X-координаты точек орбиты (не забудьте, что  $x_{\min}$  – отрицательно). Вывод этого выражения с учётом симметрии орбиты очень прост, предлагаем выполнить его самостоятельно.

Для доказательства того, что орбита – эллипс предлагается выполнить расчёт одного оборота с выводом расчётных значений координат построчно в текстовый файл, определяя при этом минимальное и максимальное значения X-координаты. Затем в специально разработанной процедуре (или в автономной программе) в цикле последовательно ввести из файла значения координат точек и вычислить для них сумму расстояний от фокусов:

$$L = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - X_{f2})^2 + y^2}, \quad (17)$$

записывая полученные значения в другой файл и сравнивая их между собой (можно вычислить среднее значение по всем точкам и среднее квадратичное отклонение). Если относительное отклонение от среднего значения будет достаточно малым (того же порядка, что и дисбаланс энергии) и с уменьшением  $h$  будет убывать, можно считать первый закон Кеплера подтверждённым результатами нашего компьютерного моделирования с точностью до вычислительной погрешности.

Ниже в таблице приведены результаты таких расчётов для варианта с начальной скоростью 35 км/с и двумя значениями шага интегрирования по времени, отличающимися в 10 раз. В таблице приведены максимальное значение дисбаланса энергии  $\delta_{\max}$ , минимальное и максимальное расстояния между гравитирующими телами  $R$ , минимальное, максимальное и среднее значения суммы расстояний от расчётных точек орбиты до фокусов  $L$ , среднее квадратичное и относительное среднее квадратичное отклонения величины  $L$ .

Результаты “проверки” первого закона Кеплера

Обозначение параметра	Численное значение параметра при шаге	
	$h = 8\,640\text{ с}$	$h = 864\text{ с}$
Количество шагов интегрирования	7 495	74 949
$\delta_{\max}$	0,000582	0,000058
$R_{\min}$ , МЛН. КМ	149,597733	149,597869
$R_{\max}$ , МЛН. КМ	333,548461	333,547330
$L_{\min}$ , МЛН. КМ	482,657974	483,096367
$L_{\max}$ , МЛН. КМ	483,634278	483,194028
$L_{\text{ср}}$ , МЛН. КМ	483,146401	483,145200
$\sqrt{((\Delta L)^2)_{\text{ср}}}$ – ср. кв. откл., МЛН. КМ	0,350838	0,035097
$\sqrt{((\Delta L/L_{\text{ср}})^2)_{\text{ср}}}$ – отн. ср. кв. откл.	0,000726	0,000073

Как следует из табличных данных, при изменении шага интегрирования в 10 раз точность расчёта  $L_{\text{ср}}$  также изменяется в 10 раз, в соответствии с первым порядком метода интегрирования. При том, что расстояние между телами изменяется более чем в два раза, сумма расстояний от любой точки орбиты до фокусов является постоянной с относительной погрешностью, не превосходящей  $8 \cdot 10^{-5}$ , таким образом, справедливость первого закона Кеплера может считаться подтверждённой.

Полученная расчётная орбита является эллипсом с большой полуосью 241,6 млн. км, малой полуосью 223,4 млн. км и эксцентриситетом 0,3807.

Предлагаем учащимся самостоятельно разработать аналогичную программу и проанализировать полученные результаты для орбит с произвольными параметрами.

### Второй закон Кеплера

Второй закон Кеплера утверждает, что радиус-вектор планеты в равные промежутки времени описывает равные площади. Физический смысл этого утверждения заключается в сохранении момента импульса (момента количества движения). Действительно, в центрально-симметричном поле сила направлена по линии, соединяющей тела, плечо силы относительно центрального тела всегда равно нулю, а это означает, что момент силы также равен нулю. Но согласно второму закону Ньютона для вращательного движения, именно момент силы определяет скорость изменения момента импульса. Следовательно, при нулевом моменте силы момент импульса вращающегося тела должен сохранять своё значение.

Момент импульса определяется выражением:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{V}, \quad (18)$$

где крестиком обозначено векторное произведение. Можно показать, что площадь, описываемая радиусом-вектором за единицу времени (за 1 секунду), определяется выражением:

$$s = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \vec{V} \right|, \quad (19)$$

которое с точностью до постоянного множителя совпадает с абсолютной величиной вектора момента импульса (18). Как известно, модуль векторного произведения равен произведению модулей векторов на синус угла между ними, но в данном случае удобнее рассмотреть выражение компонентов векторного произведения в декартовой системе координат:

$$M_z = m(xV_y - yV_x), \quad s = \frac{1}{2} |xV_y - yV_x|. \quad (20)$$

Таким образом, для подтверждения справедливости второго закона Кеплера достаточно показать, что в процессе численного интегрирования сохраняется величина  $|xV_y - yV_x|$ . Необходимо вычислять эту величину на каждом шаге интегрирования и выводить её значение в файл.

### Третий закон Кеплера

Третий закон Кеплера утверждает, что квадраты периодов обращения планет пропорциональны кубам больших полуосей орбит этих планет. Данное утверждение должно быть верным для любых замкнутых орбит. Для его проверки необходимо выполнить серию расчётов с различными начальными положениями на оси X и различными начальными скоростями в направлении оси Y. Расчёт достаточно выполнять для полупериода обращения (условие прекращения расчёта – достижение отрицательного значения координаты Y). Большая полуось орбиты определяется как полусумма абсолютных значений  $x_{\text{max}}$  и  $x_{\text{min}}$ , а период обращения – как удвоенное время движения от  $x_{\text{max}}$  до  $x_{\text{min}}$ .

Рекомендуется организовать в программе построчный вывод значений большой полуоси орбиты и периода обращения в текстовый файл с добавлением записей в конец файла (используя процедуру Append), затем разработать автономную программу, в которой построчно из файла вводятся соответствующие значения и вычисляется отношение квадрата периода обращения к кубу большой полуоси орбиты. Очевидно, это отношение должно быть одинаковым для всех вариантов расчёта. Здесь не лишним будет провести элементарные выкладки и получить соотношение, связывающее для круговых орбит квадрат периода обращения  $T$  с кубом радиуса орбиты  $R$ :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}, \quad (21)$$

из которого следует, что это отношение определяется массой гравитирующего центрального тела и не зависит от параметров орбиты. Можно проверить, что эта формула обобщается на случай эллиптических орбит, если вместо радиуса  $R$  использовать значение большой полуоси эллипса.

Итак, мы рассмотрели алгоритмы проверки законов Кеплера при компьютерном моделировании движения в поле тяготения. Можно сказать, мы как бы повторяем работу, выполненную Иоганном Кеплером, с тем отличием, что Кеплер исследовал экспериментальные данные, полученные астрономом Тихо Браге при наблюдении планеты Марс, мы же используем экспериментальные данные, полученные в результате вычислительного эксперимента.

### Развитие модели

На следующем этапе можно построить модель Солнечной системы, заменив в программе простые переменные массивами и выполняя расчёт движения всех 9 планет одновременно. В этой простейшей модели учитывается только притяжение планет к Солнцу, а движение всех планет выполняется в одной плоскости. Несмотря на “грубость” модели, она правильно передаёт основные характеристики Солнечной системы и демонстрирует на экране траектории и относительное движение планет вокруг Солнца (рекомендуется выводить на экран либо группу планет от Меркурия по Марс или Юпитер, либо от Марса или Юпитера по Плутон).

Реальные орбиты планет лежат в разных плоскостях с небольшими углами между ними. В более точной модели необходимо учитывать пространственное расположение орбит, при этом естественно учесть и силы взаимодействия между планетами. В этом случае возникают возмущающие силы, изменяющие параметры орбит. В процессе вычислительного эксперимента можно “выключать” одни и “усиливать” другие взаимодействия между планетами, исследуя влияние конкретной планеты на орбиты других планет. Но рассмотрение такой модели – тема отдельной работы.

### Заключение

В качестве темы контрольной работы (тематической аттестации) предлагается исследование возможности межпланетного полёта космического аппарата к какой-либо планете. Эта тема всегда вызывает интерес учащихся. В рамках простой модели могут быть определены параметры орбиты, длительность перелёта и сделаны выводы о возможности пилотируемых полётов космонавтов с посещением планет и их спутников либо о целесообразности использования беспилотных космических аппаратов. При этом учащиеся имеют возможность проявить эрудицию в вопросах астрономии и космонавтики.

Работа позволяет углубить знания учащихся и ощутить взаимосвязи между, казалось бы, различными науками, интегрированность знаний об окружающем нас мире.

### Литература

1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 1 и 2. (3-е изд.) – М.: Мир, 1977.– 440 с.
  2. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров.– М.: Наука, 1972.– 400 с.
  3. Физические величины: Справочник / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова.– М.: Энергоатомиздат, 1991.– 1232 с.
- 
-



Л.Г. Истомина,  
выпускница лицея 2001 года,  
член МАН

## ПОЧЕМУ НАШЕ ПРОСТРАНСТВО ТРЁХМЕРНОЕ (Моделирование движения Земли вокруг Солнца в пространствах различной размерности)

*Во всём мне хочется дойти  
До самой сути.*

**Б. Пастернак**

### Введение

Ещё в раннем детстве каждый человек на собственном опыте знакомится с тем, что наш мир имеет три измерения (вперёд-назад, вправо-влево, вверх-вниз). В дальнейшем на уроках геометрии это эмпирическое знание приобретает научную

основу, которая находит выражение прежде всего в декартовой ортогональной системе координат с осями  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  (через произвольную точку пространства можно провести не более трёх взаимно перпендикулярных прямых). С годами факт трёхмерности становится столь очевидным, что большинство людей принимает его как должное и, более того, единственно возможное.

Долгое время наука, отвечая на вопрос “**как** устроен мир?”, не могла ответить на вопрос “**почему** мир устроен так, а не иначе?”. И всё-таки пытливые человеческие умы не желали ограничиваться только констатацией того, **как** устроен наш мир, но пытались найти объяснение, **почему** он устроен именно так, а не иначе. В частности, почему наш мир трёхмерный, и не может ли быть так, что существуют миры с иным числом измерений, например, четыре или пять? Интерес к этому вопросу возник после создания специальной и особенно общей теории относительности, в которых наш мир рассматривается как четырёхмерный пространственно-временной континуум, а также попыток некоторых учёных создать новые, более общие физические теории, в которых мир должен иметь дополнительные степени свободы, то есть дополнительные измерения.

Одной из первых работ, посвящённых исследованию размерности нашего мира, была работа Пауля Эренфеста “Каким образом в фундаментальных законах физики проявляется то, что пространство имеет три измерения?”, выполненная в 1917 году [1]. Перевод этой работы на русский язык приведен в [2]. П. Эренфест попытался выяснить, что было бы, если бы наше пространство имело иную размерность (скажем, два или четыре). И выяснилась удивительная картина: оказывается, при этом очень многие физические явления оказались бы невозможными. Изменения в физической картине мира имели бы настолько катастрофический характер, что в тех пространствах было бы невозможно возникновение жизни.

П. Эренфест рассмотрел движение планеты в гравитационном поле Солнца в евклидовых пространствах разной размерности. В своём анализе он использовал энергетический подход, позволяющий без решения уравнений движения исследовать характер движения по функциональной зависимости энергии от расстояния. В настоящей работе дополнительно к энергетическому также рассмотрен динамический подход, в рамках которого выполнено интегрирование уравнений движения. Это позволило наглядно продемонстрировать особенности траекторий и динамику движения.

Аналитические методы интегрирования уравнений движения рассматриваются в курсах теоретической механики, однако используемый при этом математический аппарат выходит за рамки “школьной” математики [3-5]. Поэтому в настоящей работе использован иной метод – вычислительный эксперимент на компьютере. Численное интегрирование уравнений движения выполнялось конечно-разностным методом. Основы данного метода описаны в работе преподавателя лицея А.В. Купко, представленной в настоящем сборнике.

### Основные положения

Рассмотрим движение частицы в центрально-симметричном поле в пространствах различной размерности на примере движения Земли в гравитационном поле Солнца. В качестве исходного рассматриваем движение в трёхмерном пространстве [1, 3, 4, 6].

В центрально-симметричном поле сила направлена по линии, соединяющей тела. При этом в трёхмерном пространстве сила обратно пропорциональна квадрату расстояния, а потенциальная энергия – обратно пропорциональна расстоянию:

$$\vec{F} = -G \frac{M_s m}{r^2} \vec{e}_r, \quad U = -G \frac{M_s m}{r}, \quad (1)$$

где  $M_s = 1,9891 \cdot 10^{30}$  кг – масса Солнца,  $m = 5,9764 \cdot 10^{24}$  кг – масса Земли,  $G$  – гравитационная постоянная, имеющая размерность  $M^{-1}L^3T^{-2}$ , в системе СИ –  $m^3/(кг \cdot c^2)$ , её численное значение –  $6,6726 \cdot 10^{-11}$ . Значения постоянных взяты из справочника [8] и из таблиц компьютерной энциклопедии “Red Shift 4”.

Движение Земли вокруг Солнца происходит по почти круговой орбите с радиусом (характерным размером)  $r_0 = 149,59787$  млн. км, или  $1,4959787 \cdot 10^{11}$  м. Согласно (1), характерные значения силы и потенциальной энергии равны:  $F_0 \approx 3,53 \cdot 10^{22}$  Н,  $U_0 \approx 5,28 \cdot 10^{33}$  Дж.

В предположении равномерного движения по окружности из условия равенства центростремительной силы силе притяжения получаем выражения для характерной скорости (орбитальной скорости Земли) и характерного времени (времени обращения Земли вокруг Солнца):

$$\frac{mV_0^2}{r_0} = G \frac{M_s m}{r_0^2}, \quad V_0 = \sqrt{G \frac{M_s}{r_0}}, \quad T_0 = \frac{2\pi r_0}{V_0} = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{GM_s}}, \quad (2)$$

$V_0 \approx 29,8$  км/с,  $T_0 \approx 31,6$  млн. с.

Можно показать, что при движении тела в центрально-симметричном силовом поле сохраняется его момент импульса, а движение осуществляется в плоскости. Действительно, при центрально-симметричном взаимодействии сила, действующая на тело, направлена по радиус-вектору, плечо силы тождественно равно нулю, поэтому момент силы также всегда равен нулю. Согласно второму закону Ньютона для вращательного движения, скорость изменения момента импульса определяется моментом силы, действующей на вращающееся тело, таким образом, момент импульса тела остаётся неизменным. Но момент импульса – это вектор, направленный перпендикулярно плоскости, проведенной через радиус-вектор и вектор скорости движущегося тела. Следовательно, плоскость движения будет сохранять свою ориентацию в пространстве.

Поскольку при доказательстве использовано лишь свойство центральной симметрии взаимодействия, утверждения о сохранении момента импульса и о движении в плоскости, сохраняющей свою ориентацию, справедливы для движения в пространствах любой размерности.

### Закон всемирного тяготения в $n$ -мерных пространствах

То, что сила взаимодействия в трёхмерном пространстве обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами, имеет глубокий физический смысл. При такой зависимости сохраняется поток напряжённости силового поля через любую замкнутую поверхность (теорема Гаусса), причём этот поток пропорционален суммарному заряду, охватываемому этой замкнутой поверхностью [7]. Эта теорема легко доказывается для сферической замкнутой поверхности с центром сферы, расположенном в центре Солнца (площадь поверхности пропорциональна квадрату радиуса сферы, а напряжённость на поверхности этой сферы всюду нормальна к поверхности и имеет одинаковую величину, обратно пропорциональную квадрату радиуса; таким образом, поток через поверхность оказывается не зависящим от радиуса сферы). Оказывается, из данного утверждения следует принцип суперпозиции, а математически эквивалентным является утверждение, что потенциал поля (потенциальная энергия единичного заряда, то есть тела массой 1 кг) удовлетворяет уравнению Лапласа. Следуя П. Эренфесту [1], естественно предположить, что это свойство гравитационного взаимодействия сохраняется и в

пространствах с размерностью, не равной трём. Отсюда следует, что в  $n$ -мерном пространстве сила гравитационного взаимодействия должна быть обратно пропорциональна расстоянию между телами в степени  $n-1$  (площадь поверхности гиперболы в  $n$ -мерном пространстве пропорциональна радиусу гиперболы в степени, на единицу меньше размерности пространства).

Таким образом, закон всемирного тяготения Ньютона в  $n$ -мерном пространстве должен иметь следующий вид:

$$\vec{F}^{(n)} = -G^{(n)} \frac{M_s m}{r^{n-1}} \vec{e}_r. \quad (3)$$

В плоскости движения Земли вокруг Солнца можно ввести декартову систему координат  $(x, y)$  либо эквивалентную ей полярную систему координат  $(r, \varphi)$  с началом в центре Солнца. Полярная система координат более удобна, так как в ней сила зависит только от координаты  $r$  и не зависит от угловой координаты  $\varphi$ .

Сила в потенциальном поле является градиентом потенциальной энергии [7]:

$$\vec{F} = -\text{grad } U = -\nabla U = -\frac{dU}{dr} \vec{e}_r. \quad (4)$$

Поскольку сила зависит только от радиальной координаты, потенциальная энергия также зависит только от  $r$ :

$$U = -\int F(r) dr. \quad (5)$$

Проинтегрируем (5) с учётом выражения для силы (3). Следует выделить случай  $n = 2$ , для которого первообразной функцией является натуральный логарифм:

$$U^{(2)}(r) = G^{(2)} M_s m \ln(r) + C, \quad (6)$$

$$U^{(n)}(r) = -G^{(n)} \frac{M_s m}{(n-2)r^{n-2}} + C \quad \text{при } n > 2, \quad (7)$$

где  $C$  – постоянные интегрирования. Согласно (7), при  $n > 2$  и  $r \rightarrow \infty$  значение потенциальной энергии стремится к постоянной величине  $C$ , которую можно выбрать равной нулю (это соответствует вполне естественному физическому условию отсутствия взаимодействия между телами при бесконечно большом расстоянии между ними). А согласно (6), для  $n = 2$  значение потенциальной энергии при  $r \rightarrow \infty$  беспрестанно возрастает, не имея асимптоты; значение постоянной интегрирования в (6) может быть выбрано произвольным. Окончательно получаем:

$$U^{(2)}(r) = G^{(2)} M_s m \ln\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad (8)$$

$$U^{(n)}(r) = -G^{(n)} \frac{M_s m}{(n-2)r^{n-2}} \quad \text{при } n > 2. \quad (9)$$

Размерности, а значит, и числовые значения гравитационных постоянных  $G^{(n)}$  в пространствах разной размерности не совпадают. Выберем их значения такими, чтобы во всех пространствах период обращения Земли вокруг Солнца, согласно (2), был одинаковым и равным земному году. В этом случае их значения оказываются равными:

$$G^{(2)} = G^{(3)} / r_0 \approx 4,4603 \cdot 10^{-22} \quad \text{м}^2 / \text{кг} \cdot \text{с}^2, \quad (10)$$

$$G^{(4)} = G^{(3)} \cdot r_0 \approx 9,9821 \quad \text{м}^4 / \text{кг} \cdot \text{с}^2, \quad (11)$$

$$G^{(5)} = G^{(3)} \cdot r_0^2 \approx 1,4933 \cdot 10^{12} \quad \text{м}^5 / \text{кг} \cdot \text{с}^2, \quad (12)$$

$$G^{(6)} = G^{(3)} \cdot r_0^3 \approx 2,2340 \cdot 10^{23} \quad \text{м}^6 / \text{кг} \cdot \text{с}^2. \quad (13)$$

### Качественный анализ движения согласно П. Эренфесту

Рассмотрим закон сохранения механической энергии Земли при движении вокруг Солнца. Кинетическая энергия Земли пропорциональна квадрату скорости движения по орбите, то есть квадрату модуля вектора скорости. Но вектор скорости можно представить в виде векторной суммы радиальной составляющей скорости, направленной вдоль радиус-вектора, и азимутальной составляющей, направленной перпендикулярно радиус-вектору:

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_\varphi, \quad V^2 = V_r^2 + V_\varphi^2, \quad E_k = \frac{m}{2}(V_r^2 + V_\varphi^2). \quad (14)$$

Механическая энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E_0 = E_k + U(r) = \frac{m}{2}(V_r^2 + V_\varphi^2) + U(r) = \text{const}. \quad (15)$$

Рассмотрим выражение для момента импульса:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{V}. \quad (16)$$

Поскольку векторное произведение радиус-вектора и радиальной составляющей скорости тождественно равно нулю (эти векторы коллинеарны), в выражении (16) остаётся только азимутальная составляющая скорости, для абсолютной величины момента импульса получаем:

$$M = m r V_\varphi = \text{const}. \quad (17)$$

Отсюда можно найти значение азимутальной составляющей скорости  $V_\varphi$  и подставить его в (15), окончательно получаем выражение для механической энергии, в котором исключена зависимость от угловой координаты  $\varphi$  и от азимутальной компоненты скорости:

$$E_0 = \frac{m V_r^2}{2} + \frac{M^2}{2 m r^2} + U(r) = \text{const}. \quad (18)$$

Это выражение соответствует закону сохранения механической энергии при одномерном движении вдоль координаты  $r$  в силовом поле с эффективной потенциальной энергией

$$U_{\text{эфф}}(r) = \frac{M^2}{2 m r^2} + U(r). \quad (19)$$

Таким образом, двумерное движение в плоскости по сложной траектории формально сводится к одномерному движению вдоль радиальной координаты в поле эффективного потенциала (19), зависящего только от радиальной координаты. Добавочный член в выражении эффективного потенциала (19), учитывающий кинетическую энергию азимутального движения, называется центробежным потенциалом. При этом надо помнить, что радиус-вектор, вдоль которого происходит одномерное движение, вращается с переменной угловой скоростью  $\omega$ , то есть истинное движение остаётся двумерным. Угловая скорость вращения радиус-вектора может быть найдена из условия сохранения момента импульса (17):

$$V_\varphi = r \omega, \quad M = m r^2 \omega, \quad \omega = \frac{M}{m r^2}. \quad (20)$$

Из закона сохранения механической энергии с учётом (18) и (19) следует:

$$V_r^2 = \frac{2}{m} [E_0 - U_{\text{эфф}}(r)], \quad V_r = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left[ E_0 - \frac{M^2}{2 m r^2} - U(r) \right]}. \quad (21)$$

Очевидно, подкоренное выражение в (21) должно быть неотрицательным. Область допустимых значений радиуса  $r$  удобно находить графически. Для этого строим график функции  $y = U_{\text{эфф}}(r)$  и проводим горизонтальную линию  $y = E_0$ . Область, в которой график функции лежит ниже горизонтальной линии, соответствует допустимым значениям радиуса. В точках пересечения графика с горизонтальной линией скорость обращается в нуль, это – точки поворота при движении вдоль радиуса.

Построив графики для разных значений  $n$ , мы можем отметить следующие особенности:

В двумерном пространстве график эффективного потенциала уходит в бесконечность как при малых, так и при больших  $r$ . Для любого конечного значения  $E_0$  существуют две точки поворота, между которыми осуществляется движение.

В трёхмерном пространстве график эффективного потенциала при малых  $r$  уходит в бесконечность, начиная с некоторого значения  $r$ , эффективный потенциал становится отрицательным, и пройдя через минимум, при больших  $r$  стремится к нулю снизу, оставаясь отрицательным. Если  $E_0 < 0$ , движение оказывается финитным, в противном случае возможен уход на бесконечное расстояние.

В пространствах размерности  $n > 3$  оказывается возможным как “падение” на центр, так и удаление на бесконечность. Существует единственная круговая орбита, но она соответствует не точке минимума графика эффективного потенциала, а точке максимума, то есть она является неустойчивой. Малейшее возмущение в движении неизбежно ведёт к “сходу” с круговой орбиты, и в зависимости от характера возмущения, переходу на спиральную траекторию “падения” на центр либо уходу в бесконечность.

### Численное интегрирование уравнений движения

В системе программирования Borland Pascal 7.0 была составлена программа “ERENFEST”, позволяющая выполнять расчёты и визуализировать их результаты в виде графиков и рисунков траекторий движения для пространств размерностью от 2 до 6 включительно.

Численное интегрирование уравнений движения выполняется согласно методике, описанной в работе преподавателя лицея А.В. Купко (см. настоящий сборник). При этом была использована явная схема первого порядка аппроксимации (метод Эйлера-Зейделя) с постоянным шагом интегрирования по времени  $h$ . Для контроля точности расчёта использовался закон сохранения механической энергии.

В процессе испытаний программы были выполнены расчёты движения пробного тела вокруг Солнца в пространствах размерностью от 2 до 6 с начального расстояния  $x_0 = 1$  а.е. для значений скорости  $V_y$  от 20 до 40 км/с. При этом шаг интегрирования по времени  $h$  выбирался равным от 86,4 до 8640 секунд, или от 0,001 до 0,1 суток.

Оказалось, что при движении пробного тела в ограниченной области ( $r_{\min} < r < r_{\max}$ ) или при его уходе в бесконечность обеспечивается приемлемая точность расчёта (дисбаланс энергии  $E$  не превосходит  $10^{-4}$ ) за разумное время счёта (десятки секунд при процессоре типа Pentium-100).

В то же время при расчёте движения типа “падения” на гравитирующий центр в пространствах размерности  $n > 3$  обнаружилось резкое возрастание погрешности при приближении к центру. Абсолютная погрешность в энергии во много раз превышала начальное значение энергии  $E_0$ , результаты расчёта становились некорректными (искажался вид траекторий), а затем в работе программы возникала аварийная ситуация типа “переполнения”.

С целью повышения точности расчёта в вычислительном блоке программы явный метод первого порядка аппроксимации был заменен неявным методом второго порядка аппроксимации с заданным количеством итераций на каждом шаге. При этом существенно повысилась точность расчёта (при равных значениях шага интегрирования по времени), однако некорректность в работе программы при “падении” на центр сохранилась, наступая несколько позже, чем в предыдущем случае.

Выполненный анализ показал, что некорректность в работе программы вызывается резким возрастанием скорости движения, а значит, кинетической энергии тела при его приближении к центру. В законе сохранения механической энергии

$$E_k + U(r) = E_0 = \text{const} \quad (22)$$

с приближением к центру первое слагаемое возрастает в сотни и тысячи раз по сравнению с начальным значением; в свою очередь, во втором, отрицательном слагаемом также во много раз возрастает его абсолютная величина. Таким образом, баланс энергии в (22) достигается путём сложения двух больших по абсолютной величине, но разных по знаку чисел.

Для достижения баланса в выражении (22) необходимо, чтобы на каждом шаге интегрирования изменение каждого слагаемого в левой части равенства составляло малую часть от  $E_0$ . Это условие



достаточно проверять для одного из слагаемых, например, кинетической энергии. Изменение кинетической энергии за время  $\Delta t$  определяется выражением:

$$\Delta E_k \approx m \vec{V} \cdot \Delta \vec{V} \approx m \vec{V} \cdot \vec{a} \cdot \Delta t, \quad (23)$$

где  $\vec{a}$  – ускорение. Из условия малости изменения кинетической энергии на каждом шаге интегрирования получаем условие, ограничивающее значение шага интегрирования  $h$ :

$$\frac{m(V_x a_x + V_y a_y) h_{\max}}{E_0} = K, \quad h_{\max} = K \frac{E_0}{m(V_x a_x + V_y a_y)}, \quad (24)$$

где  $K \approx 0,01 \div 0,0001$  – коэффициент, определяющий, какую долю от  $E_0$  может составлять  $\Delta E_k$ . Значение этого коэффициента, определяющее в конечном итоге точность расчёта, подбирается эмпирически в соответствии с желаемой точностью расчёта. Вначале расчёт выполняется с заданным постоянным шагом интегрирования  $h$ . При этом на каждом шаге вычисляется  $h_{\max}$ , и если текущее значение  $h$  оказывается больше максимально допустимого, оно уменьшается до значения  $h_{\max}$ , и далее расчёт выполняется с уменьшенным значением шага.

После внесения изменений в программу оказалось, что уменьшение шага в процессе счёта обеспечивает выполнение баланса энергии с высокой точностью, но приводит к резкому увеличению времени счёта. Движение “планеты” по экрану компьютера практически прекращается, траектория как бы “застывает”.

Дальнейший анализ показал, что в выражении (24) значение  $E_0$  не является физически выделенным, определяющим. Так, возможно движение и с нулевой механической энергией, при этом выражение (24) становится сингулярным, тогда как физически никаких особенностей в движении нет. Для корректности численного интегрирования уравнений движения важно не абсолютное, а относительное изменение кинетической энергии по сравнению с её текущим значением. Условие (24) является слишком “жёстким” и может быть ослаблено заменой  $E_0$  на текущее значение  $E_k$ :

$$\frac{m(V_x a_x + V_y a_y) h_{\max}}{E_k} = K, \quad h_{\max} = K \frac{V_x^2 + V_y^2}{2(V_x a_x + V_y a_y)}. \quad (25)$$

“Ослабленное” условие (25) обеспечивает соблюдение баланса энергии с заданной относительной точностью. При этом абсолютная погрешность возрастает и может превысить значение  $E_0$  во много раз, но результаты расчёта (значения координат и скоростей) остаются корректными. Время расчёта “падения” на гравитирующий центр оказывается вполне приемлемым даже при использовании метода первого порядка! Однако неявная схема второго порядка аппроксимации всё же является более экономичной и требует существенно меньших ресурсов вычислительной системы при прочих равных условиях (одинаковых относительных погрешностях).

Для оценки относительной точности численного интегрирования может быть использован закон сохранения энергии, но в качестве определяющего параметра следует брать не значение механической энергии, а текущее значение скорости (или её квадрата). Пусть движение начинается со скоростью  $V_0$  с расстояния  $r_0$ . Тогда в произвольной точке траектории должно выполняться соотношение:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{G^{(n)}}{n-2} \cdot \frac{M_s}{r^{n-2}} = \frac{mV_0^2}{2} - \frac{G^{(n)}}{n-2} \cdot \frac{M_s}{r_0^{n-2}}, \quad (26)$$

следующее из закона сохранения энергии. Из (26) получаем:

$$V^2 = V_0^2 + \frac{2G^{(n)}M_s}{(n-2)r_0^{n-2}} \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{n-2} - 1 \right]. \quad (27)$$

Из этого выражения для текущего значения  $r$  может быть вычислено точное (согласно закону сохранения энергии) значение абсолютной величины (модуля) скорости. Сравнивая с этим значением значение модуля скорости, полученное путём численного интегрирования, можно оценить как абсолютную, так и относительную погрешность численного интегрирования.

Ниже приведен текст вычислительного блока программы.

### Вычислительный блок программы (схема второго порядка)

```

Iter := -1;                { Счётчик итераций }
Repeat
  Inc(Iter);
  R := Sqrt(Sqr(X)+Sqr(Y));
  A := FA(R);              { Вычисление ускорения }
  Ax := A*X/R;
  Ay := A*Y/R;
  if Iter = 0 then         { На нулевой итерации }
  begin
    Xj := X;               { сохраняем значения, }
    Yj := Y;               { вычисленные в момент }
    Vxj := Vx;             { времени T }
    Vyj := Vy;
    Axj := Ax;
    Ayj := Ay;
    T := T+HT;             { и увеличиваем время на HT }
  end;
  Vx := Vxj+(Ax+Axj)*HT/2; { На каждой итерации повторяем }
  Vy := Vyj+(Ay+Ayj)*HT/2; { вычисление значений }
  X := Xj+(Vx+Vxj)*HT/2;   { интегрируемых функций }
  Y := Yj+(Vy+Vyj)*HT/2;   { для момента времени T+HT }
  if Iter = MaxIter then
  begin
    HTmax := K*(Sqr(Vx)+Sqr(Vy))/Abs(Vx*Ax+Vy*Ay);
    if HT > HTmax then HT := HTmax;
    PutPixel(X0+Round(X/MG), Y0-Round(Y/MG), Yellow);
    Iter := -1;
  end;
Until ( T/86400 >= Tmax ) or ( R <= Rs ) or KeyPressed;

```

В дальнейшем при переработке программы под операционную систему Windows в системе визуального программирования Delphi в алгоритме расчёта для интегрирования системы уравнений был использован явный метод Рунге-Кутты 4-го порядка [10]. Это привело к ускорению расчёта траекторий. Естественно, при возрастании скорости также производится дробление шага интегрирования по времени, но в существенно меньшей степени. Так, если при расчёте явным методом первого порядка шаг интегрирования по времени приходилось уменьшать до миллисекунд, при расчёте по неявной схеме второго порядка точности при той же относительной погрешности шаг интегрирования мог быть увеличен на порядок, достигая десятков миллисекунд, то при использовании метода Рунге-Кутты шаг интегрирования мог быть увеличен примерно на 3 порядка ( $\sim 1000$  раз), достигая нескольких секунд.

### Результаты вычислительного эксперимента

С использованием разработанной программы были проведены серии расчётов в пространствах различной размерности (от 2 до 6). При этом начальная точка располагалась на расстоянии 1 а.е., а начальная скорость задавалась перпендикулярной к радиус-вектору. Начальное значение скорости задавалось равным  $V_0 \approx 29,8$  км/с, что соответствовало движению по круговой орбите, а затем изменялось как в меньшую, так и в большую сторону относительно  $V_0$ . Для каждого из вариантов расчётов также строились графики зависимости эффективной потенциальной энергии от расстояния. Ниже в таблицах приведены результаты расчётов, выполненных с начальной скоростью  $V_0 = 26,0$  км/с.

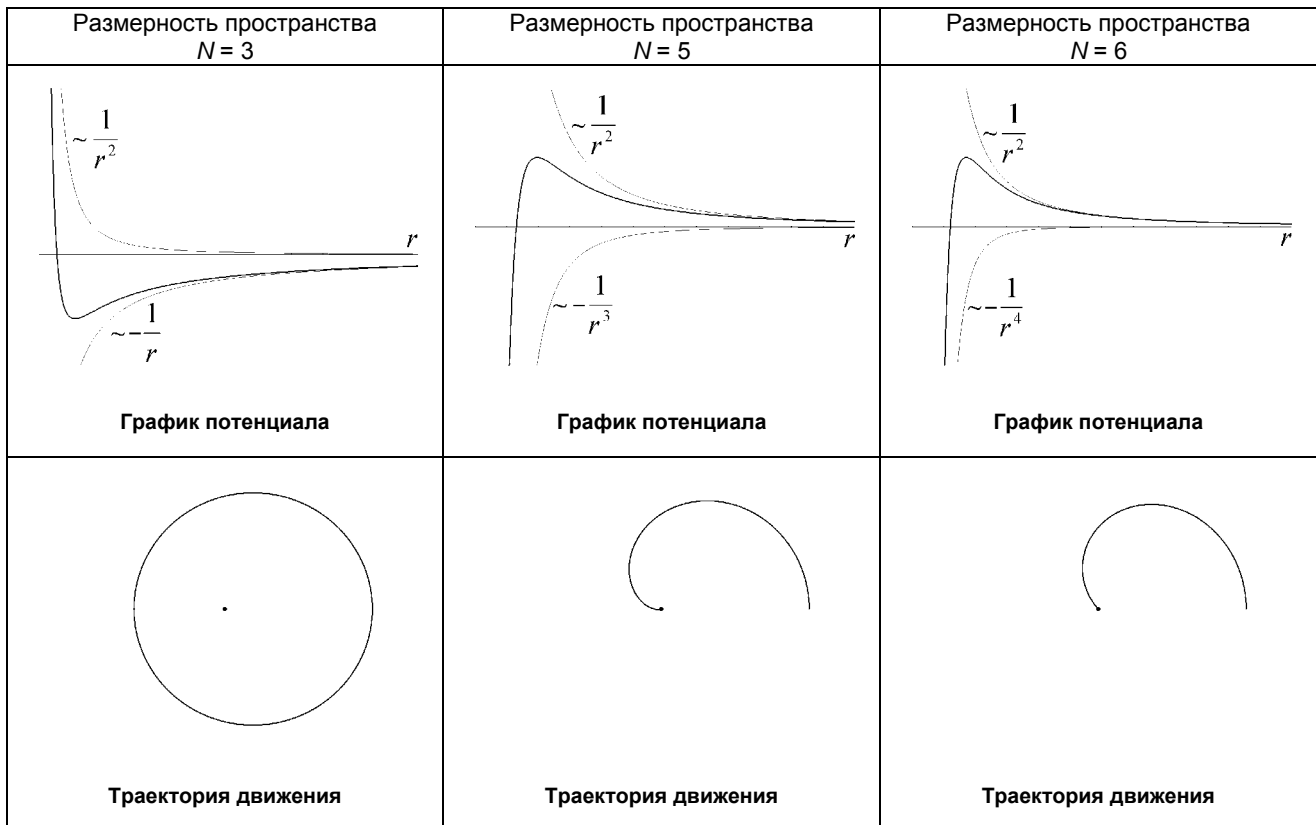
## Результаты расчётов для двумерного пространства



В двумерном пространстве кривая зависимости эффективной потенциальной энергии от расстояния представляет собой “потенциальную яму”, демонстрируя, что движение всегда будет происходить в ограниченной области пространства: при  $r \rightarrow 0$  график уходит в бесконечность как квадратичная гипербола, при  $r \rightarrow \infty$  график уходит в бесконечность по логарифмическому закону, в промежутке имеется минимум, соответствующий круговой орбите.

Расчётные орбиты в двумерном случае незамкнуты и располагаются в кольцевой области между некоторыми  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$  (финитное движение). Уход на бесконечность невозможен, все тела (планеты, кометы, космические аппараты) связаны навечно со своим Солнцем, понятия “второй космической скорости” не существует.

## Результаты расчётов для пространств размерностью 3, 5 и 6



В трёхмерном пространстве кривая зависимости эффективной потенциальной энергии от расстояния при  $r \rightarrow 0$  уходит в бесконечность как квадратичная гипербола (как и в двумерном случае), но при  $r \rightarrow \infty$ , в отличие от предыдущего случая, график имеет горизонтальную асимптоту. В промежутке при конечном значении  $r$  имеется минимум с отрицательной энергией, соответствующий круговой орбите. При энергии больше минимальной, но меньшей нуля движение происходит по замкнутым орбитам в финитной области (по эллипсам), а при неотрицательной энергии движение является инфинитным (уход

в бесконечность по параболе или гиперболе). Падение на центр невозможно, за исключением редкого случая “лобового удара”.

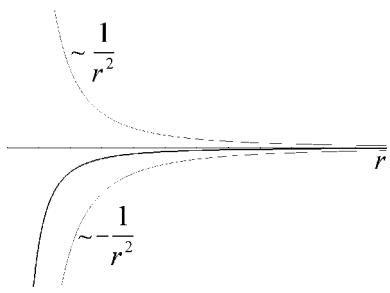
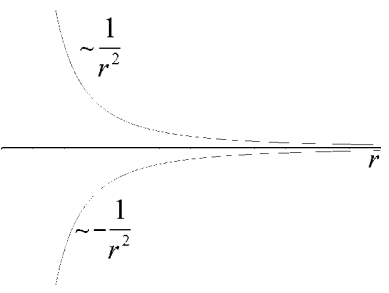
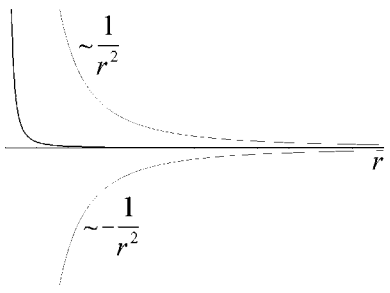
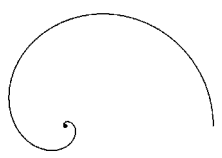
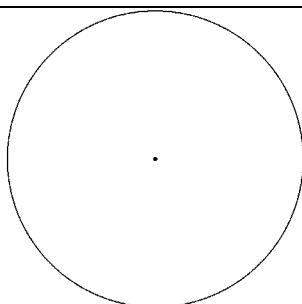
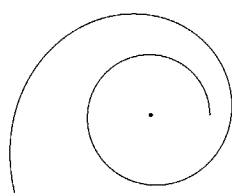
В случае размерности пространства, равной четырём, кривая зависимости эффективной потенциальной энергии от расстояния не имеет экстремумов и, в зависимости от соотношения между центробежным и гравитационным потенциалами, представляет собой либо отрицательную квадратичную гиперболу (при этом наблюдается “падение” на центр), либо положительную квадратичную гиперболу (при этом наблюдается уход на бесконечность).

Возможно промежуточное состояние, когда оба потенциала в точности уравниваются, и эффективный потенциал обращается в нуль. В этом случае возможно движение по окружности, но оно оказывается неустойчивым: достаточно появиться малейшему возмущению, чтобы круговое движение превратилось в движение по пологой спирали либо к центру, либо на бесконечность в зависимости от знака этого возмущения.

Нами было подобрано значение начальной скорости  $V_0 \approx 29,78606$  км/с, при котором первые витки траектории выглядят как окружность, но со временем наблюдается “сход” с этой окружности. Так, при выполнении расчёта движения в течение 30000 суток (более 80 витков) расстояние от центра уменьшилось с 149,6 млн. км до 141,2 млн. км.

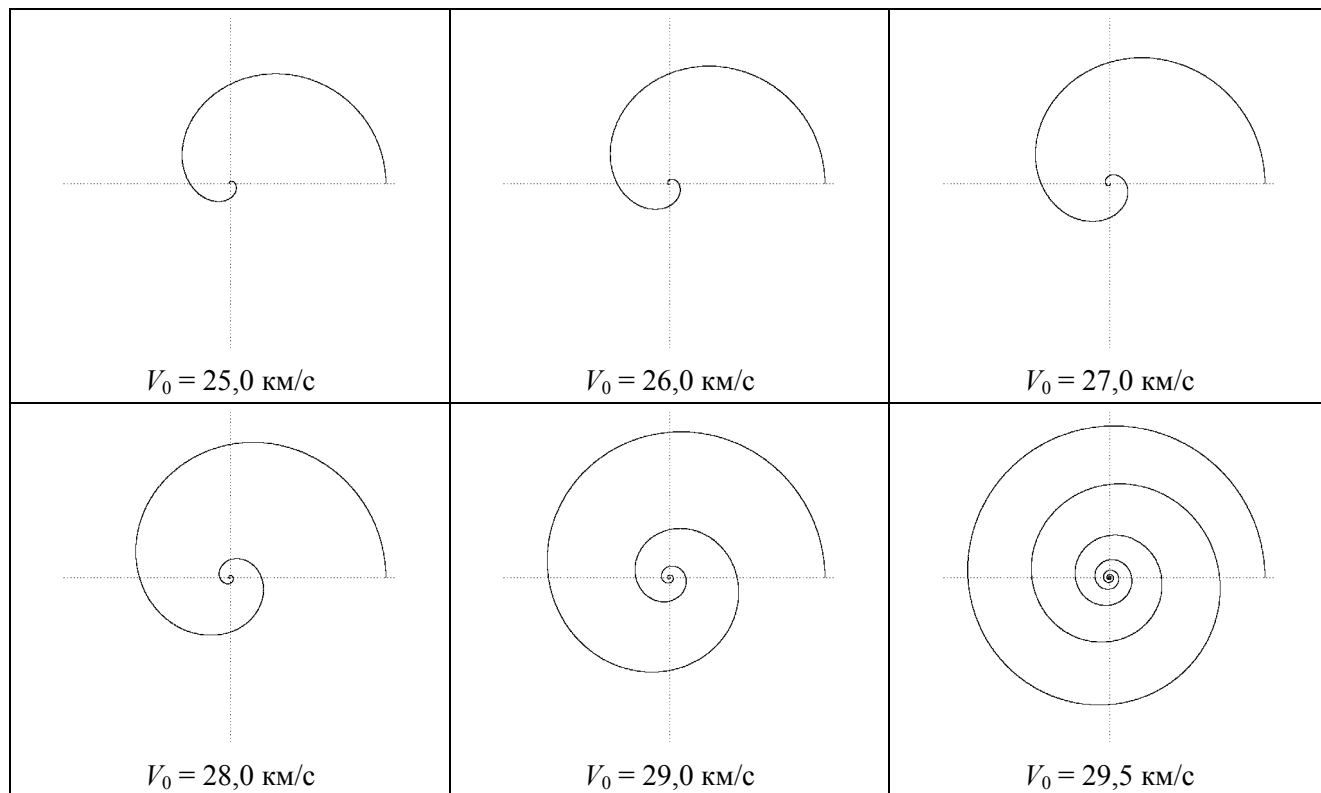
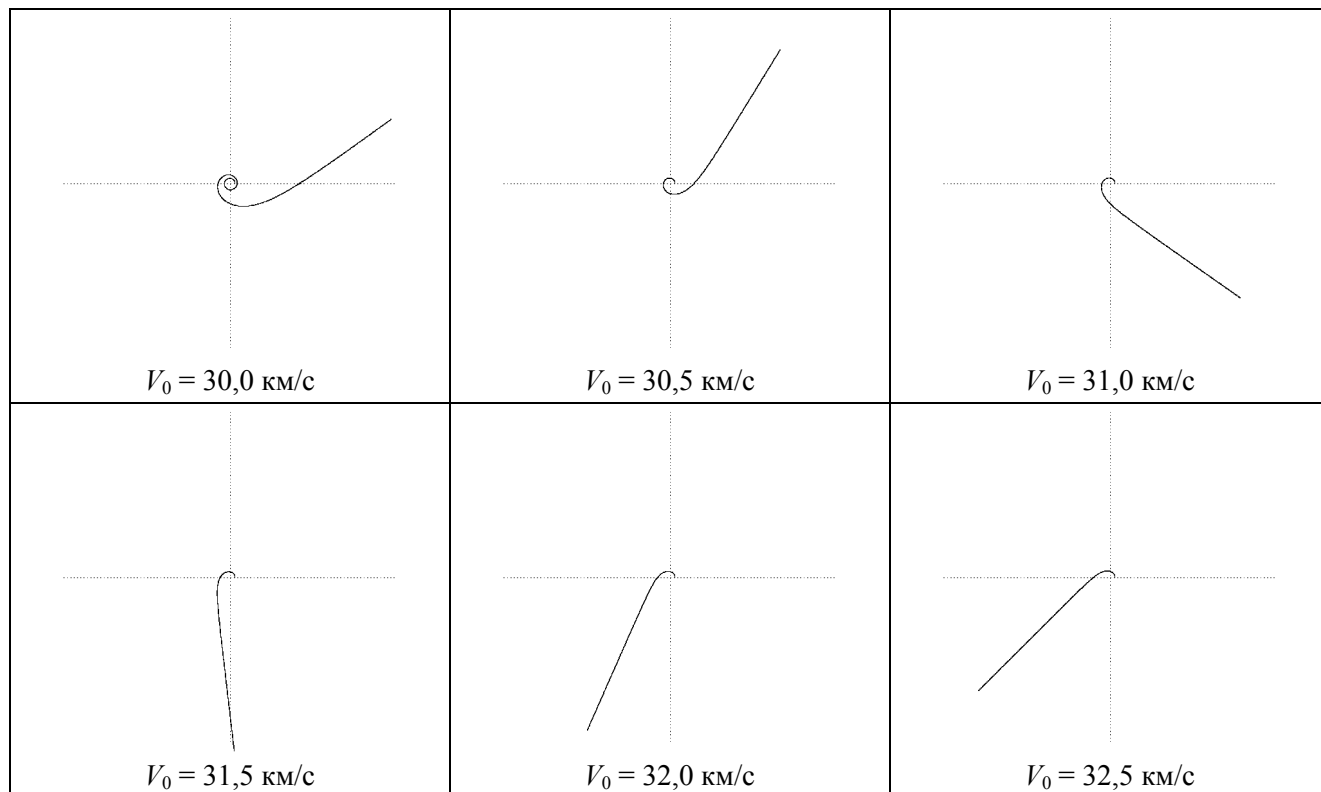
Неизбежный уход с круговой орбиты означает, что стационарная круговая орбита является неустойчивой, существование таких орбит возможно лишь в течение небольшого (по астрономическим масштабам – пренебрежимо малого) времени. При значениях скорости, отличных от выбранного значения  $V_0$ , движение изначально происходит по спирали с падением за конечное время на гравитирующий центр, либо с уходом на бесконечность.

#### Результаты расчётов для четырёхмерного пространства с разными начальными скоростями

$V_0 = 26,0$ км/с	$V_0 = 29,78606$ км/с	$V_0 = 30,0$ км/с
 <p>График потенциала</p>	 <p>График потенциала</p>	 <p>График потенциала</p>
 <p>Траектория движения</p>	 <p>Траектория движения</p>	 <p>Траектория движения</p>

Таким образом, в пространстве размерности 4 возможно либо падение на центр, либо инфинитное движение. Стационарные орбиты невозможны.

В следующих таблицах приведены изображения траекторий движения пробного тела в четырёхмерном пространстве с начального расстояния в 1 а.е. с разными начальными скоростями при падении на Солнце и при его уходе от Солнца в бесконечность. Как видно из рисунков, при скорости более 31 км/с тело уходит на бесконечность, не совершив ни одного полного оборота вокруг Солнца.

Траектории “падения” на гравитирующий центр (  $N = 4$  )Траектории ухода на бесконечность (  $N = 4$  )

В случае пространств размерностью более четырёх кривая зависимости эффективного потенциала от расстояния имеет максимум, соответствующий круговой орбите, но точка максимума энергии – это точка неустойчивого равновесия! Слева от максимума всегда происходит “падение” на центр, справа – уход на бесконечность. Движение имеет такой же характер, как и в четырёхмерном пространстве, но в силу бóльшей зависимости силы от расстояния с ростом размерности  $N$  неустойчивости в движении

проявляются более резко, “падение” на центр либо уход в бесконечность происходят быстрее и в меньшем диапазоне скоростей.

### Анализ результатов

Настоящая работа выполнена в рамках классической ньютоновой механики с рассмотрением только сил гравитации. За рамками работы в силу их сложности остались электродинамические и квантовомеханические процессы, лежащие в основе атомной и ядерной физики, физики молекул, в том числе сложных органических соединений, составляющих основу живой материи, и другие явления. В то же время результаты работы охватывают достаточно широкий круг явлений, в частности, существование устойчивых планетных систем у звёзд, а следовательно, возникновения жизни во Вселенной.

Для возникновения жизни во Вселенной требуется одновременное выполнение большого числа условий. Эти условия сформулированы в **антропном принципе** [11, 12]. Одним из необходимых условий является возможность существования планетных систем вокруг звёзд, устойчивых на протяжении миллиардов лет. Также необходимы как возможность существования сложных систем, так и возможность их распада при определённых условиях (это необходимо для протекания химических реакций и возникновения сложных органических соединений, лежащих в основе жизни). Как мы видим, эти условия могут выполняться только в трёхмерном мире.

Как мне кажется, одного этого достаточно, чтобы представить, насколько бедно и убого выглядели бы миры иной размерности, лишённые своего главного украшения – жизни вообще и тем более жизни **разумной**. Можно сказать: нам здорово повезло в том, что размерность нашего пространства оказалась равной именно трём.

Из всего вышесказанного следует, что размерность пространства является одним из основных фундаментальных свойств нашей Вселенной, к изменению которого она очень чувствительна. Напрашивается следующий вывод: возможно, где-нибудь существуют миры с иной размерностью, чем три, но в этих мирах нет наблюдателей, которые могли бы отметить этот факт, как это делаем мы по отношению к нашему трёхмерному пространству.

В связи с вышесказанным мне хочется привести мнение А. Эйнштейна, высказанное им в интервью в 1920 году. На вопрос корреспондента **“А что находится вне нашего мира?”** он ответил, что убеждён в возможности существования других миров, не зависящих от нашего. А. Эйнштейн допускал возможность обнаружения астрономами других миров помимо нашего, но только таких, которые являются трёхмерными. **“И посему мы ограничены в своём знании только нашей конечной Вселенной и должны оставить другие миры, обладающие иной размерностью, научной фантастике”** [13].

С тех пор прошло много лет, и самые современные научные теории предполагают существование многомерного Мира с размерностью, по крайней мере не меньше 10, в котором спонтанно возникают Вселенные с различной размерностью, никак между собой не связанные, и одной из них является наша трёхмерная Вселенная [14]. Научная мысль обгоняет любую фантастику!

### Заключение

Результаты данного исследования, являющегося частью работы, посвящённой антропному принципу и проблемам современной космологии, в феврале 2001-го года были доложены на секции астрономии физико-математического отделения Харьковского территориального отделения Малой Академии наук. Работа заняла 2-е место.

Работа, посвящённая компьютерному моделированию движения планет вокруг Солнца в пространствах различной размерности, была представлена на финальный этап Всеукраинского конкурса учащихся и студентов “Мирный космос” (секция программирования), проведенный 21-22 апреля 2001-го года в г. Днепропетровске Украинским молодёжным аэрокосмическим объединением “Сузір’я”, и также была отмечена жюри конкурса.

В процессе дальнейшей работы был создан вариант расчётно-демонстрационной программы под Windows в среде программирования Delphi. В этом варианте улучшен интерфейс программы, некоторые

параметры, ранее вводимые с исходными данными (к примеру, масштабный множитель), теперь вычисляются с учётом разрешения экрана, добавлена операция “захвата” изображений графиков потенциала и траектории движения в графические BMP – файлы (именно эти рисунки приведены выше в таблицах). К настоящему времени имеются расчётно-демонстрационные программы моделирования движения планет в пространствах различной размерности как для DOS, так и для Windows.

Проведенное исследование показывает, насколько большое значение при решении различных вычислительных задач на компьютере имеет правильный выбор алгоритма расчёта, использование более сложных, но и более “экономных” алгоритмов. Этот этап работы доступен только человеку. Следовательно, компьютеризация науки, позволяя решать всё более сложные задачи, которые для прежних поколений учёных являлись неразрешимыми, вовсе не “отменяет” участие в этом процессе человека, его интеллекта, и звучащие иногда высказывания об умалении роли человека при широком использовании компьютеров кажутся надуманными и искусственными. В процессе познания законов природы главная роль ещё очень долго (я думаю – всегда) будет принадлежать человеческому интеллекту. И я сама решила посвятить свою жизнь этому увлекательнейшему занятию – познанию фундаментальных законов Вселенной.

В заключение хочу выразить благодарность замечательному человеку, преподавателю лицея, научному руководителю моей работы Анатолию Васильевичу Купко. Он учил меня не только работе на компьютере, программированию на Паскале и в Delphi, но открыл для меня красоту уравнений Максвелла и мощь численных методов, ввёл меня в мир современной физики и астрономии. На каждом этапе работы я ощущала его внимание и поддержку, готовность прийти на помощь и сделать сложные, порой кажущиеся неразрешимыми вопросы простыми и понятными, доступными и решаемыми. Огромное Вам спасибо, Анатолий Васильевич!

#### Список литературы

1. Ehrenfest P. In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions? – Proc. Amsterdam Acad., 1917. – Vol. 20, p. 200-209.
2. Горелик Г.Е. Размерность пространства: историко-методологический анализ. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 216 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М.: Наука, 1973. – 208 с.
4. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. – М.: Наука, 1970. – 448 с.
5. Коткин Г.Л., Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике. – М.: Наука, 1969. – 240 с.
6. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 1 и 2. (3-е изд.) – М.: Мир, 1977. – 440 с.
7. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 5. – М.: Мир, 1966. – 296 с.
8. Физические величины: Справочник / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.
9. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. – М.: Мир, 1975. – 392 с.
10. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
11. Климишин И.А. Релятивистская астрономия. – М.: Наука, 1989. – 288 с.
12. Розенталь И.Л. Геометрия, динамика, Вселенная. – М.: Наука, 1987. – 144 с.
13. Брайен Д. Альберт Эйнштейн. – Минск: Попурри, 2000. – 704 с.
14. Паркер Б. Мечта Эйнштейна: В поисках единой теории строения Вселенной. – СПб.: Амфора, 2000. – 333 с.

## Приложение

**Описание программы “EHRENFEST” (DOS-версия)****Назначение программы**

Программа предназначена для демонстрации особенностей движения в задаче двух тел в пространстве произвольного числа измерений. Программа рассчитана на учащихся лицеев и классов физико-математического профиля и студентов – физиков и астрономов.

**Область применения**

Программа может быть использована при чтении факультативов и спецкурсов по физике и астрономии, в работе астрономических и физических кружков.

**Функциональные возможности**

В программе выполняется численное интегрирование уравнений движения материальной точки в центрально-симметричном поле притяжения в пространствах размерностью от 2 до 6 включительно на примере движения Земли вокруг Солнца. Результаты расчёта выводятся в текстовый файл и представляются на экране компьютера в графическом виде (в виде графиков зависимости эффективного потенциала от расстояния и траекторий движения).

Для работы программы необходим IBM-совместимый персональный компьютер, оснащённый видеоадаптером и монитором типа VGA или SVGA и обеспечивающий графический режим VGA с разрешением 640 x 480 точек и палитрой в 16 цветов.

Программа предназначена для функционирования в операционной системе DOS, а также в операционных системах Windows 95/98/Millennium/2000 как DOS-приложение).

**Использованные инструментальные и технические средства**

Разработка программы выполнялась с использованием IBM-совместимого компьютера с процессором Pentium-100, ОЗУ – 16 Мбайт, SVGA-монитором и SVGA-адаптером. Операционная система – DOS и Windows 98 (сеанс DOS). Среда программирования – Borland Pascal 7.0. В программе используется графический режим VGA 640 × 480 × 16.

**Инсталляция и запуск программы**

Программа не требует инсталляции. Программный пакет включает файл с исходным текстом программы “erenfest.pas”, исполняемый файл “erenfest.exe” и файлы исходных данных типа \*.dat с примерами расчётов для пространств различной размерности (от 2 до 6). Для успешной трансляции программы необходимо наличие объектного файла “egavga.obj” с графическим драйвером.

Запуск программы осуществляется запуском исполняемого файла “erenfest.exe”. При этом в качестве первого параметра командной строки может быть задано имя файла исходных данных. При запуске программы без параметра командной строки исходные данные вводятся из файла с именем по умолчанию “erenfest.dat”, который должен находиться в текущей папке (каталоге), иначе программа завершает работу. Рекомендуется запускать программу из программной оболочки Norton Commander.

**Примечание.** Программные файлы имеют имя, отличающееся от фамилии П. Эренфеста пропущенной буквой “h”. Это сделано умышленно, поскольку DOS-имена не должны содержать более 8 символов.

**Функционирование программы**

В программе константами задаются значения массы и радиуса Солнца, астрономической единицы и гравитационной постоянной для трёхмерного случая, а также рассчитываются значения гравитационной постоянной для размерностей от 2 до 6 в соответствии с вышеприведенными выражениями.

Из файла исходных данных вводятся: размерность пространства, начальный шаг интегрирования по времени в секундах, начальные значения координат X и Y в астрономических единицах, начальные значения компонентов вектора скорости  $V_x$  и  $V_y$  в километрах за секунду, а также вспомогательные



величины – масштабный множитель (количество метров в одном пикселе), время задержки в миллисекундах на каждом шаге счёта и максимальное время движения в сутках.

Инициализируется графический режим VGA и на экран выводится следующее сообщение:

### ПРОГРАММА “EHRENFEST”

Программа выполняет расчет движения в задаче двух тел в пространстве произвольного числа измерений (от 2 до 6).

Для продолжения работы программы нажмите одну из следующих клавиш:

F1 – вывод настоящего сообщения.

F2 – построение и вывод графиков эффективного потенциала (черная линия), а также центробежного и гравитационного потенциалов (синие линии).

F3 – выполнение расчета с выводом на экран траектории движения.

Признак завершения расчета – появление вверху слева зеленого кружка.

Для принудительного завершения расчета – нажать любую клавишу.

При нажатии клавиши SpaceBar (длинная клавиша “пробел”) последовательно циклически выполняются команды F1-F2-F3-F1-F2 и т.д.

Для завершения работы программы нажмите клавишу Esc.

Автор программы: Лариса Истомина

Научный руководитель: Анатолий Васильевич Купко

Лицей “Профессионал”, г. Харьков-2001

Далее пользователь выбирает один из предложенных режимов путём нажатия на одну из функциональных клавиш (F2 либо F3), и в программе выполняется соответствующий расчёт с выводом на экран графиков потенциала либо выводом траектории движения точки (Земли) вокруг гравитирующего центра (Солнца). При расчёте траектории движения признаком завершения счёта служит появление в левом верхнем углу экрана зелёного кружка. Некоторые варианты расчёта “падения” на гравитирующий центр могут затянуться, если надоест ждать, для прерывания счёта можно нажать любую клавишу.

Для завершения работы программы необходимо нажать клавишу Esc.

Результаты расчётов выводятся в текстовый файл с расширением “txt” и именем, соответствующим имени файла исходных данных. В файл в виде таблицы выводятся: время движения в сутках, относительная погрешность вычисления (дисбаланс) полной механической энергии, расстояние от центра в миллионах километров, скорость в километрах за секунду.

---

---