

Министерство образования республики Татарстан
ГАОУ " Альметьевский государственный Институт Муниципальной
службы"
Факультет среднего профессионального образования

КОНКУРСНАЯ РАБОТА

в рамках республиканского конкурса индивидуальных проектов по
учебным дисциплинам общеобразовательного цикла
среди студентов первого курса профессиональных образовательных
организаций
Республики Татарстан

«Я и парабола»

Номинация: № 3 , математика

Специальность: "Технология продукции общественного
питания"

Автор: Фазлетдинова Алина Галимхановна, Курс: 1

Руководитель: Галиуллина Галия Науфаловна.

Введение

Каждый хоть раз жизни слышал о таких понятиях, как график функции, система координат и парабола. Всё это является составляющими темы «Функции», с которой знакомятся в учебных заведениях.

Функция – это зависимость переменной Y от переменной X , если каждому значению X соответствует единственное значение Y . С каждым годом мы усложняли уравнения и графики, вводили новые понятия. Узнали о многих графиках, в том числе и о параболе. И мне захотелось более подробно узнать об этом графике и я начала задумываться над тем, чтобы расширить свои знания в изучении этого материала.

В этом и заключается одна из целей, поставленных в данной работе - расширить знания по теме «парабола», узнать, где она встречается, и попрактиковаться в области их построения. Таким образом, объектом моего исследования стала парабола, график её функции имеет вид:
 $y=ax^2+bx+c$.

Для достижения целей работы было поставлено несколько задач:

- научиться строить параболу
- познакомиться и расширить знания в этой области
- научиться переводить график из одной системы в другую
- находить параболу в повседневной жизни

Я и парабола

Что такое парабола?

Парабола (παράβολή –греч.)- геометрическое место точек равноудаленных от данной прямой(называемой директрисой параболы) и данной точки (называемой фокусом параболы)

Фокус параболы – эта точка, от которой равноудалены все точки, лежащие на параболе.

Директриса параболы – это прямая, от которой равноудалены все точки, лежащие на параболе.

Ось симметрии параболы – это вертикальная линия, проходящая через фокус и вершину параболы перпендикулярно ее директрисе.

Вершина параболы – точка пересечения параболы и оси симметрии. Если парабола направлена вверх, то вершина является самой низкой точкой параболы; если парабола направлена вниз, то вершина является самой верхней точкой параболы.

Уравнение параболы. Уравнение параболы имеет вид: $y=ax^2+bx+c$.

Уравнение параболы также можно записать в виде $y = a(x - h)^2 + k$.

Если коэффициент «а» положительный, то парабола направлена вверх, а если коэффициент «а» отрицательный, то парабола направлена вниз.

Для запоминания этого правила: при положительном («позитивном») коэффициенте парабола «улыбается» (направлена вверх) и наоборот - при отрицательном («негативном») коэффициенте.

Например: $y=2x^2-1$. Парабола этого уравнения направлена вверх, так как $a=2$ (положительный коэффициент).

Если в уравнении в квадрат возводится «у», а не «х», то парабола «лежит на боку» и направлена вправо или влево. Например, парабола $x^2 = y + 3$ направлена вправо.

Ось симметрии параболы – это вертикальная линия, проходящая через вершину параболы. Ось симметрии задается функцией $x = p$, где p – координата «х» вершины параболы.

История создания параболы

В 17 веке Галилео Галилей доказал, что тело, брошенное под углом к горизонту, движется по параболе. Параболу мы наблюдаем в реальной жизни, как траекторию движения какого-либо тела.

Баскетболист бросает мяч и он летит в корзину почти по параболе.

Струя фонтана «рисует» линию, которая близка к параболе.

Парабола обладает очень важным оптическим свойством.

Коническими сечениями много занимались математики Древней Греции. Ученик Евклида, Аполлоний Пергский, живший в 260-170 г.г. до нашей эры, в основном труде “Конические сечения” дал полное изложение их теории. Долгое время конические сечения, считавшиеся вершиной греческой геометрии – эллипсы, параболы, гиперболы – казались плодом математической фантазии, не имеющим отношения к реальной действительности.

Уже в XVI Никколо Тарталья предположил, что траектория, брошенного тела, “не имеет ни одной части, которая была бы совершенно прямой”; в XVII веке Кеплер обнаружил, что по эллипсам движутся планеты; а Галилео Галилей (XVI-XVII в.в.) показал, что параболы возникают в совсем “земной” ситуации.

Парабола обладает очень важным оптическим свойством: лучи, исходящие из источника света, находящегося в фокусе параболы, оказываются направленными параллельно её оси. Это свойство используется при

изготовлении зеркал для прожекторов, автомобильных фар, телескопов и в других областях жизни.

Свойства квадратичной функции $y=x^2$

- 1) Область определения функции - множество всех действительных чисел, т.е. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Область значения функции - множество всех неотрицательных чисел, т.е. $E(y) = [0; +\infty)$.
- 3) Значение функции $y=0$ является наименьшим, а наибольшего значения функция не имеет.
- 4) Функция $y=x^2$ является четной, график симметричен относительно оси Oy .
- 5) Функция неперiodическая.
- 6) Парабола $y=x^2$ имеет с осями координат единственную общую точку $(0;0)$ - начало координат.
- 7) Значение аргумента $x=0$ является нулем функции.
- 8) На промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывающая, а на промежутке $[0; +\infty)$ - возрастающая.
- 9) Функция принимает положительные значения на множестве $(-\infty; 0] \cup [0; +\infty)$, т.е. все точки параболы, кроме начала координат.

Определяем дискриминант функции $y=ax^2+bx+c$:

$$x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D}) / 2a$$

- 1) при $D > 0$ два корня
- 2) при $D = 0$ один корень
- 3) при $D < 0$ корней нет

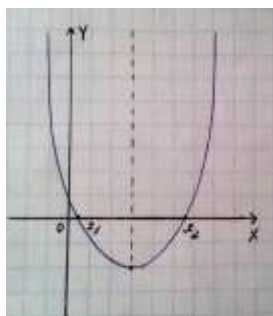
Экстремумы функции $y=ax^2+bx+c$:

при $a > 0$: $x_{\min} = -b/(2a)$, $y_{\min} = -D/(4a)$

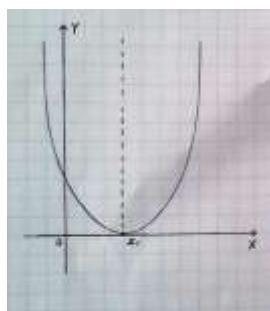
при $a < 0$: $x_{\max} = -b/(2a)$, $y_{\max} = -D/(4a)$

Свойства функции и вид её графика определяются, в основном, значениями коэффициента **a** и дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

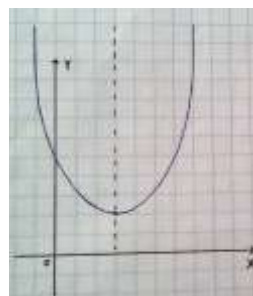
1) $a > 0$; $D > 0$



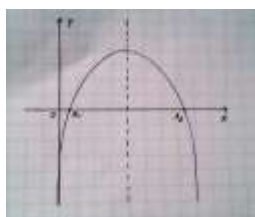
2) $a > 0$; $D = 0$



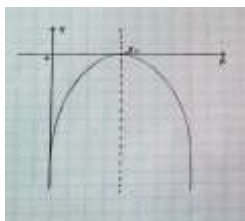
3) $a > 0$; $D < 0$



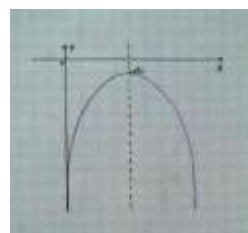
4) $a < 0$; $D > 0$



5) $a < 0$; $D = 0$



6) $a < 0$; $D < 0$



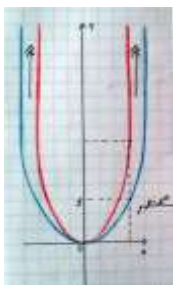
С помощью выделения полного квадрата любую квадратичную функцию можно представить в виде:

$$y = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x - m)^2 + n, \text{ где } m = -\frac{b}{2a}, n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

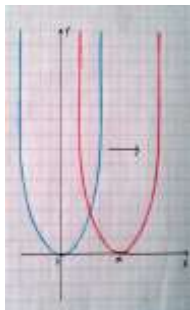
Это свойство позволяет построить график квадратичной функции с помощью элементарных преобразований графика функции $y = x^2$.

Построение графика $y = a(x - m)^2 + n$ можно произвести в три этапа:

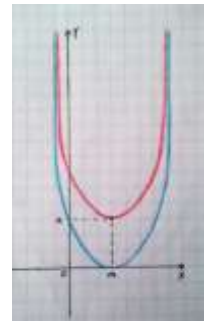
1).



2).



3).



Растяжение графика $y = x^2$ вдоль оси y в a раз (при $a < 1$ - это сжатие в 1 раз).

- Если $a < 0$, произвести ещё и зеркальное отражение графика относительно оси x (ветви параболы будут направлены вниз).

Результат преобразования: график функции $y = ax^2$

- Произвести параллельный перенос графика функции $y = ax^2$ вдоль оси x на m (вправо при $m > 0$ и влево при $m < 0$).

Результат преобразования: график функции $y = a(x-m)^2$

- Параллельный перенос графика функции $y = a(x-m)^2$ вдоль оси y на n (вверх при $n > 0$ и вниз при $n < 0$)

Результат преобразования: график функции $y = a(x-m)^2 + n$.

Применю теорию в практике.

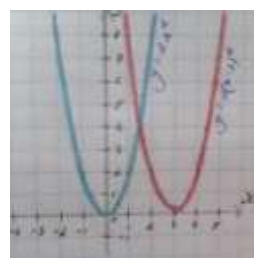
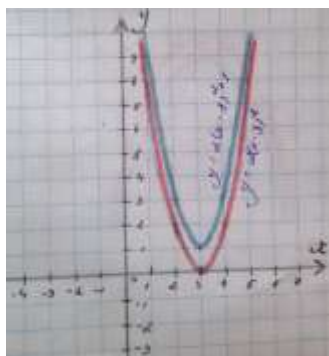
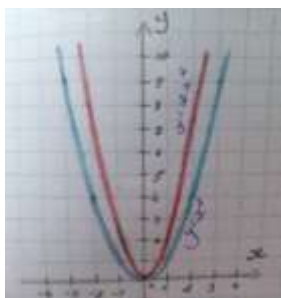
Примеры №1. Построить график функции $y = 2x^2 - 12x + 19$.

Решение: выделяю квадрат двучлена $y = 2x^2 - 12x + 19 = 2(x-3)^2 + 1$

1).

2).

3).

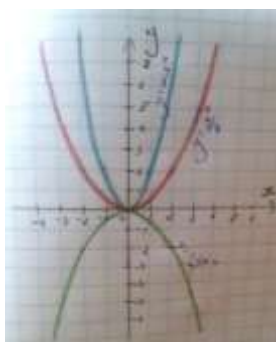


- 1) Растяжение графика функции $y = x^2$ вдоль оси y в 2 раза
- 2) Параллельный перенос графика функции $y = 2x^2$ вдоль оси x на 3 вправо
- 3) Параллельный перенос графика функции $y = 2(x - 3)^2$ вдоль оси y на 1 вверх.

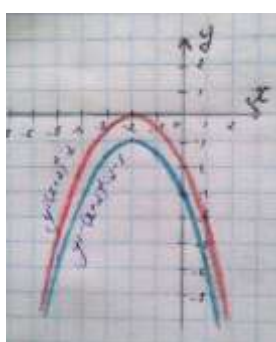
Пример №2. Построить график функции $y = -0,5x^2 - 2x - 3$.

$$y = -\frac{x^2}{2} - 2x - 3 = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1$$

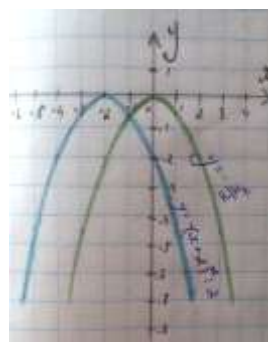
1).



2).



3).



- 1). Сжатие графика функции $y = x^2$ вдоль оси y в 2 раза и преобразование симметрии относительно оси x
- 2). Параллельный перенос графика функции $y = -x^2$ вдоль оси x на 2 влево
- 3). Параллельный перенос графика функции $y = -(x + 2)^2 / 2$ на 1 вниз

Пример № 3: построить график функции $y=x^2+4x+3$

Решение: Разберем все по действиям:

$c=3$, значит, парабола пересекает ОУ в точке с координатами $(0;3)$.

Ветви параболы смотрят вверх, так как $a=1; 1>0$.

Вычислим координаты вершины параболы.

$$a=1; b=4; c=3.$$

$$x=(-b)/2a=(-4)/(2*1)=-2,$$

$$y=(-2)^2+4*(-2)+3=4-8+3=-1.$$

вершина находится в точке с координатами $(-2;-1)$

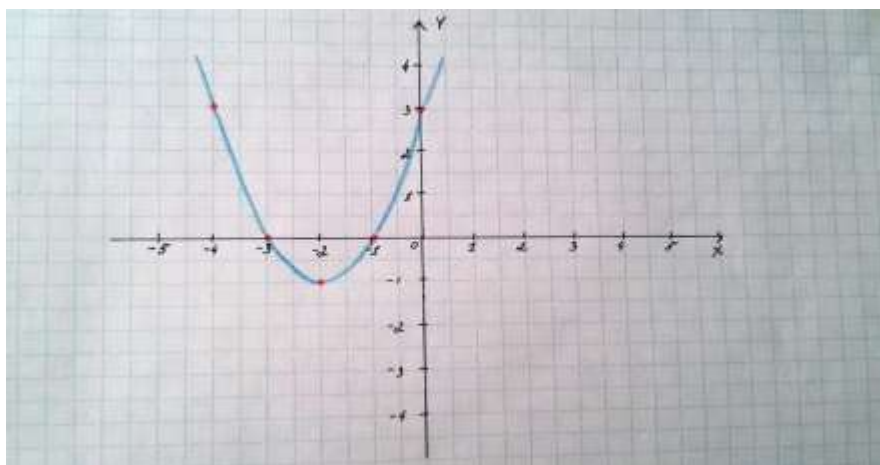
По формуле $D=b^2-4ac$, находим корни уравнения $x^2+4x+3=0$:

$$D=b^2-4ac=16-12=4$$

$$x=(-b\pm\sqrt{D})/2a,$$

$$x_1=(-4+2)/2=-1,$$

$$x_2=(-4-2)/2=-3.$$



Возьмем несколько произвольных точек, которые находятся рядом с вершиной $x=-2$

Подставляем вместо x значения в уравнение

$$y=x^2+4x+3$$

$$y=(-4)^2+4*(-4)+3=16-16+3=3$$

$$y=(-3)^2+4*(-3)+3=9-12+3=0$$

$$y=(-1)^2+4*(-1)+3=1-4+3=0$$

$$y=(0)^2+4*(0)+3=0-0+3=3$$

По значениям функции видно, что парабола симметрична относительно прямой $x=-2$.

Пример № 4: Построить график функции $y=-x^2+4x$.

Решение:

$c=0$, значит парабола пересекает ОУ в точке $x=0$ $y=0$. Ветви параболы смотрят вниз, так как $a=-1$; $-1<0$.

$$a=-1; b=4; c=0.$$

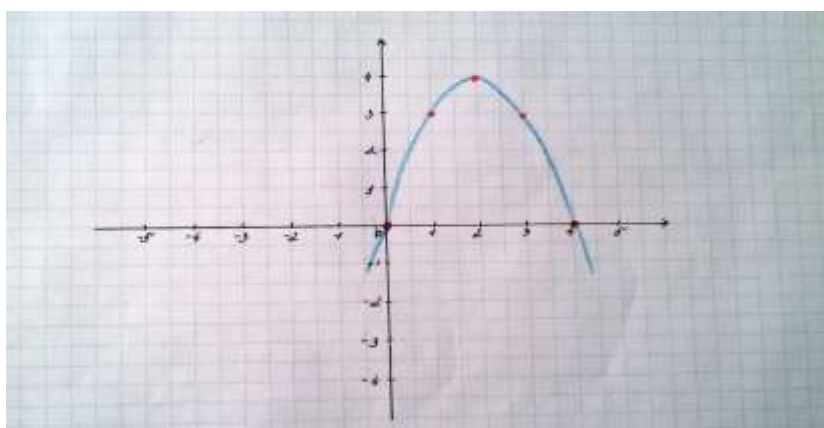
$$x=(-b)/2a=(-4)/(2*(-1))=2$$

$$y=-(2)^2+4*2=-4+8=4 \text{ вершина находится в точке с координатами } (2;4)$$

Найдем корни уравнения $-x^2+4x=0$

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2+bx=0$.

Чтобы его решить нужно вынести x за скобки, потом каждый множитель приравнять к 0. $x(-x+4)=0$, $x=0$ и $x=4$.



Возьмем несколько произвольных точек, которые находятся рядом с абсциссой вершины $x=2$

x	1	3	4
y	3	3	0

Подставляем вместо x значения в уравнение $y = -x^2 + 4x$

$$y = 0^2 + 4 \cdot 0 = 0$$

$$y = -(1)^2 + 4 \cdot 1 = -1 + 4 = 3$$

$$y = -(3)^2 + 4 \cdot 3 = -9 + 12 = 3$$

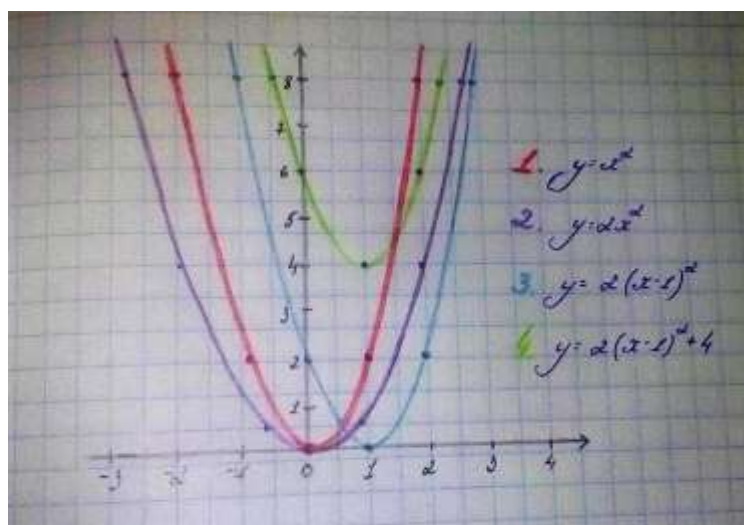
$$y = -(4)^2 + 4 \cdot 4 = -16 + 16 = 0$$

По значениям функции видно, что парабола симметрична относительно прямой $x=2$.

Построим для примера график функции $y = 2(x-1)^2 + 4$

Чтобы построить график этой функции, нужно:

- 1) Сначала построить график функции $y = x^2$,
- 2) Затем ординаты всех точек графика умножить на 2,
- 3) Затем сдвинуть его вдоль оси OX на 1 единицу вправо,
- 4) Затем вдоль оси OY на 4 единицы вверх:



Парабола и связь с космосом.

Траектории некоторых космических тел (комет, астероидов и других), проходящих вблизи звезды или другого массивного объекта (нейтронной звезды, чёрной дыры или просто планеты) на достаточно большой скорости имеют форму параболы (или гиперболы). Эти тела вследствие своей большой скорости и малой массы не захватываются гравитационным полем звезды и продолжают свободный полёт. Это явление используется для гравитационных манёвров космических кораблей (в частности аппаратов Вояджер) .



Парабола в технике

Антенна радиотелескопа



Использование параболоидов в технике. Параболоид вращения фокусирует пучок лучей, параллельный главной оси, в одну точку. Часто используется свойство параболоида вращения собирать пучок лучей,

параллельный главной оси, в одну точку — фокус, или, наоборот, формировать параллельный пучок излучения от находящегося в фокусе источника. На этом принципе основаны параболические антенны, телескопы-рефлекторы, прожекторы, автомобильные фары, антенна радиотелескопа.

Параболы в физическом пространстве

Падение баскетбольного мяча. При отсутствии сопротивления воздуха, траектория полета мяча представляет собой **параболу**.



Струи фонтана тоже представляют собой **параболу**.



Парабола в архитектуре



**Живописный мост
в Москве, Россия.**



**Бугринский мост через Обь,
Россия**



**Собор пресвятой
Девы Марии
в Бразилии**



**162-метровый монумент
в Сент-Луисе**



**вестибюль станции метро
«Красные ворота»**



Пон-дю-Гар — римский мост

Парабола в моем городе.

Альметьевск 2017 год.



**Мемориал, посвященный героям
Великой Отечественной войны**



Городской родник



Вход в магазин



Любимый Макдональдс.

Заключение

Вот и подошло к концу моё исследование. Составление этого проекта показалось мне интересной и познавательной работой. Я получила для себя полезные знания и еще больше заинтересовалась этой темой. Для работы над проектом я использовала компьютерные программы, такие как Microsoft Word и Microsoft Office Picture Manager, находила нужную информацию в интернете и в научной литературе.

Что же касается знаний, полученных при построении парабол, то здесь нужно выделить умение строить графики как простые, так и более сложные. Итогом работы можно считать успешное достижение поставленных целей: я расширила свои знания и получила практику в области построения графиков.

Тема «Парабола» очень интересная. Она встречается и используется в обычной жизни. Например, в моделировании мостов или зданий, иногда используется в архитектуре для строительства крыш и куполов, в конструкции прожекторов, фонарей, фар, а так же телескопов-рефлекторов

(оптических, инфракрасных, радио), в конструкции узконаправленных (спутниковых и других) антенн, необходимых для передачи данных на большие расстояния, солнечных электростанций и в других областях.

Выполнив эту работу, я приобрела огромный опыт, который пригодится мне на протяжении всей учебы и была рада исследовать эту тему в такой замечательной науке, как математика.

P.S.: спасибо моему научному руководителю за помощь и поддержку!

Литература

1. Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / [А.Н. Колмагоров, А.М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.]; под ред. А.Н. Колмагорова- М.:Просвещение, 2013.

2. Интернет:

- <https://ru.wikipedia.org/wiki/Парабола>
- <http://ru.wikihow.com/построить-параболу>
- <http://tutomath.ru/uroki/kak-postroit-parabolu.html>
- <http://www.ex1rs.com/articles/58410-43-Как-построить-параболу>
- <http://physiclib.ru/books/item/f00/s00/z00000041/st022.shtml>
- http://fizmat.by/math/function/quadratic_function
- http://reshyzadachy.blogspot.com/p/blog-page_10.html
- http://fizmat.by/math/function/preobraz_grafikov
- http://wiki.soiro.ru/Геометрические_и_оптические_свойства_параболы

- <https://www.google.com/search?q=Парабола+в+архитектура&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwjkh6iE9erTAhVmDZoKHZBjBUYQsAQILA&biw=1280&bih=675>
- <http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/8187>
- <http://studopedia.info/10-27768.html>
- <https://ru.wikipedia.org/wiki/Параболоид>
- <http://margaritas159.blogspot.fi/2013/01/blog-post.html>
- <https://www.tutoronline.ru/blog/kvadratichnaja-funkcija-i-ee-grafik>
- <http://festival.1september.ru/articles/646473/>