

Серия книг «Библиотека математического кружка» «Государственное издательство технико-теоретической литературы» была основана в 1950 году. Книги серии позволяют узнать много нового и интересного из области элементарной математики школьникам, кроме того, книги этой серии предназначены для преподавателей математики, руководителей математических кружков и студентов пединститутов. Данная серия книг издавалась с 1952 по 1988 год. Всего вышло 19 книг. Серия книг писалась ведущими педагогами и математиками, по ней училось несколько поколений советских математиков.

Книги серии «Библиотека математического кружка»:

1. Ченцов Н.Н., Шклярский Д.О., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. — М.: Наука, 1976. — 384 с.
 2. Ченцов Н.Н., Шклярский Д.О., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (планиметрия). — М.: ГТТИ, 1952. — 380 с.
 3. Ченцов Н.Н., Шклярский Д.О., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия). — М.: ГТТИ, 1954. — 267 с.
 4. Яглом И.М., Болтянский В.Г. Выпуклые фигуры. — М.-Л.: ГТТИ, 1951. — 343 с.
 5. Яглом А.М., Яглом И.М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. — М., 1954.
 6. Дынкин Е.Б., Успенский В.А. Математические беседы. Задачи о многоцветной раскраске. Задачи из теории чисел. Случайные блуждания. — М.-Л.: ГТТИ, 1952. — 288 с.
 7. Яглом И.М. Геометрические преобразования. Движения и преобразования подобия. — 1955.
 8. Яглом И.М. Геометрические преобразования. Линейные и круговые преобразования. — 1956.
 9. Балк М.Б. Геометрические приложения понятия о центре тяжести. — М.: Физматгиз, 1959. — 230 с.
 10. Радемахер Г., Тёплиц О. — Числа и фигуры. Опыты математического мышления, 1962.
 11. Яглом И. М. — Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия, 1969.
 12. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. — Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум, 1970.
 13. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. — Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии, 1974.
 14. Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. — М.: Наука, 1978. — 224 с. Превод с английского *Geometry Revisited*. — Mathematical Association of America, 1967.
 15. Сергеев И. Н. (ред) — Зарубежные математические олимпиады, 1987
 16. Васильев Н. Б., Егоров А. А. — Задачи всесоюзных математических олимпиад, 1988.
- Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989. — 288 с.



Яглом И.М., Болтянский В.Г. Выпуклые фигуры. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. 344 с. (Библиотека математического кружка. Выпуск 4).

Эта книга посвящена некоторым задачам из общей теории выпуклых тел (определение выпуклого тела см. в тексте, стр. 13 и 29). Созданная в конце прошлого века теория выпуклых тел в настоящее время является наукой, богатой общими методами и отдельными замечательными результатами. Она интенсивно разрабатывается и по настоящее время. Такая популярность теории выпуклых тел связана в первую очередь с важностью этой теории для геометрии, а также со значительными ее приложениями как к другим разделам математики (алгебра, теория чисел и др.) так и к естествознанию (математическая кристаллография).

Книга состоит из двух частей. В первой части приведено 116 задач на выпуклые фигуры и некоторые необходимые для их понимания теоретические сведения; вторая часть содержит решения всех этих задач.

Все содержание книги разбито на восемь параграфов, довольно независимых между собой; кроме того, книга содержит еще два дополнения, имеющих специальный характер. В каждом параграфе более легкие задачи предшествуют более трудным. В некоторых местах книги встречаются так называемые «вспомогательные» задачи, цель которых — облегчить читателю решение непосредственно следующих за ними трудных задач.

СОДЕРЖАНИЕ		
Предисловие	5	
Указания к пользованию книгой	10	
	Задачи	Решения
§ 1. Общие свойства выпуклых фигур	13	139
§ 2. Теорема Хелли и ее приложения	30	149
§ 3. Одно свойство непрерывных функций	39	171
§ 4. Сложение выпуклых фигур и кривых	51	198
§ 5. Изопериметрическая задача	66	220
§ 6. Разные задачи на максимум и минимум	75	246
§ 7. Кривые постоянной ширины	90	278
§ 8. Кривые, вращающиеся в равностороннем треугольнике (Δ -кривые), и родственные им кривые	106	305
Дополнение I. Принцип предельной кривой	126	
Дополнение II. О понятиях выпуклой и невыпуклой фигур	136	

Ниже приведены несколько интересных задач:

78:

ЗАДАЧИ

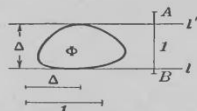
[70

70*. Докажите, что из всех выпуклых кривых ширины 1 наименьшую площадь ограничивает равносторонний треугольник с высотой 1.

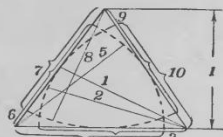
Используя задачу 70, мы можем теперь решить следующую задачу:

Какую наименьшую площадь может иметь выпуклая фигура Φ , если известно, что внутри Φ можно так двигать отрезок длины 1, чтобы он повернулся на угол 360° ?

Действительно, прежде всего легко видеть, что ширина Δ подобной фигуры Φ не может быть меньше 1: если бы расстояние между какой-либо парой параллельных опорных прямых l и l' фигуры Φ было меньше 1, то отрезок длины 1,



Черт. 70.



Черт. 71.

имеющий направление, перпендикулярное к l и l' , не мог бы быть расположен внутри Φ (черт. 70), и следовательно, такой отрезок нельзя повернуть на 360° так, чтобы он все время оставался внутри Φ .

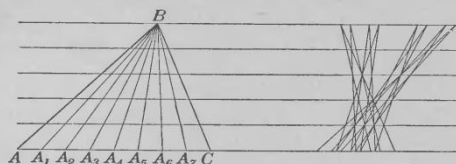
В силу задачи 70 отсюда вытекает, что площадь выпуклой фигуры Φ , внутри которой можно повернуть на 360° отрезок длины 1, не может быть меньше площади равностороннего треугольника высоты 1 (т. е. $\frac{\sqrt{3}}{4} = 0,433...$). С другой стороны, совершенно очевидно, что внутри правильного треугольника высоты 1 можно повернуть на 360° отрезок длины 1 (черт. 71).

После того как мы убедились, что площадь выпуклой фигуры, внутри которой можно повернуть на 360° отрезок

71—72] § 6. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ 79

длины 1 (для наглядности можно говорить про помещение, внутри которого можно вращать жест длины 1), не может быть меньше $\frac{\sqrt{3}}{4}$, естественно возникает вопрос о том, насколько малой может быть площадь фигуры, не обязательно выпуклой, внутри которой можно повернуть на 360° отрезок длины 1. Ответ на этот вопрос представляется совершенно неожиданным (см. ниже задачу 72).

71.** (Вспомогательная задача.) Докажите, что каково бы ни было положительное число σ (как угодно малое!), всегда возможно разрезать данный треугольник ABC



Черт. 72.

прямыми, соединяющими вершину B с точками основания AC , на некоторое (достаточно большое) число равновеликих треугольников $ABA_1, A_1BA_2, A_2BA_3, \dots, A_{n-1}BC$ и затем сдвинуть эти треугольники вдоль прямой AC так, чтобы общая площадь, занимаемая всеми треугольниками $ABA_1, A_1BA_2, \dots, A_{n-1}BC$, в новом положении была меньше σ (после сдвига треугольники $ABA_1, A_1BA_2, \dots, A_{n-1}BC$ будут занимать меньшую площадь, чем раньше, так как они могут перекрывать друг друга; черт. 72).

72*. Докажите, что существуют (невыпуклые) плоские фигуры сколь угодно малой площади, внутри которых можно повернуть на 360° отрезок длины 1.

Таким образом, существует фигура, площадь которой, например, меньше $0,001 \text{ м}^2$, внутри которой можно повернуть на 360° отрезок длиной в 1 км.