

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СООБРАЖЕНИЙ ЗЕРКАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ ПРИ  
РЕШЕНИИ ШКОЛЬНЫХ ЗАДАЧ**

## Содержание

<u>Введение.</u>	3
<u>1. Теоретическая часть.</u>	4
<u>1.1 Обзор литературы</u> .....	4
<u>1.2 Математические основы теории групп</u> .....	6
2. Практическая часть	10
<u>2.1 Применения симметричных соображений при решении школьных задач оптики и электростатики</u> .....	10
<u>2.2 Применения симметричных соображений при решении школьных задач механики</u> .....	11
<u>Выводы</u>	15
<u>Список использованной литературы.</u>	16

## **Введение.**

Наш мир блистает красотой форм и разнообразных явлений. Но очень часто нас в нем поражает строгий порядок, наблюдаемый в его видимом разнообразии. Атомы и молекулы в кристаллах расположены в строгом порядке (симметрия параллельного переноса, или трансляционная), левая часть человека подобна зеркальному отражению правой (симметрия отражения), пятиконечная морская звезда при повороте вокруг своего центра на  $72^\circ$  будет неотличима от себя в предыдущем состоянии (радиальная симметрия), более тонкие ветви дерева повторяют архитектуру более широких ветвей. Исследования свойств такой упорядоченности или *симметрии* очень сложная и интересная задача, которая начала развиваться в полной красоте своих применений в физике только с прошлого века, и это поле еще далеко не исследовано. Сложность некоторых математических приемов не позволяет рассмотреть красоту методов использования в школьном курсе физики. Однако, можно применить интуитивно понятную школьнику графическую интерпретацию.

**Целью** данной работы является использование одних и тех же симметричных свойств систем для решения школьных задач разных разделов физики и продемонстрировать универсальность данных методов.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**: проведено тщательное исследование существующих методов качественного исследования применения симметричных соображений; рассмотрен широкий спектр задач, для которых могут быть применены методы, рассмотренные в работе; проведено сравнительное решение одних и тех же задач с помощью классических методов и методов теории симметрии, чтобы показать эффективность предлагаемого нами в этой работе решения.

Для решения поставленных задач применялись следующие **методы**:

- элементы теории групп;
- элементы теории симметрии;
- геометрические методы;
- формальная логика.

Следует помнить, что большинство фундаментальных законов физики являются следствиями тех или иных симметрий нашего мира (либо нарушений этих симметрий). Ярким примером применения теории симметрии в физике являются всем известные законы сохранения энергии, импульса и момента импульса, которые есть не что иное, как следствие симметрий относительно зеркального отражения времени, параллельного переноса в пространстве и поворотов относительно некоторой выбранной оси. Из этого можно сделать простой вывод о том, что, если самые фундаментальные законы физики могут быть получены из соображений симметрии, то более простые, локальные задачи, привязанные к конкретным системам с конкретными симметриями, могут быть решены предлагаемым автором способами.

## **1. Теоретическая часть.**

### **1.1 Обзор литературы**

Для того чтобы говорить о симметричных свойствах системы, нужно в начале разобраться с тем, что такое симметрия. В физике под симметрией системы понимается сохранение некоторых параметров при совершении каких-либо преобразований над системой. В современном научном мире все стремится к построению единой науки, которая будет описывать все процессы, которые происходят или могут происходить во Вселенной. И смело можно полагать, что построение и обоснование данной теории не обойдется без теории симметрии. Дело в том, что мир окружающий нас удивительно красив и симметричен даже

там, где он кажется совершенно хаотичным и неоднородным.

Давайте рассмотрим несколько простых примеров, которые смогут привести нас к понятию симметрии.

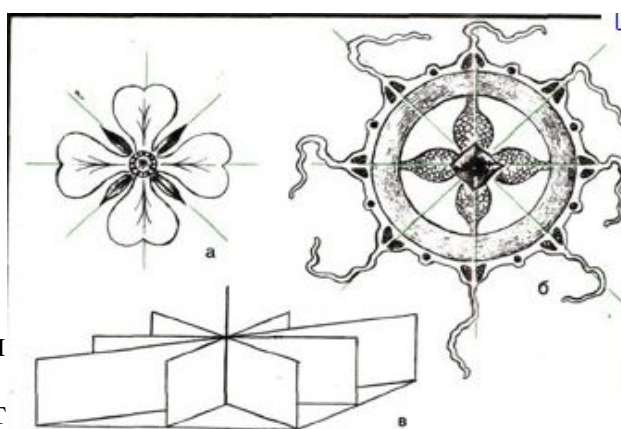


Рис. 1. Пример симметрий в природе

Встаньте напротив зеркала, и увидите, что в зеркале будет

ваша копия, или посмотрите на медузу. Если нарисовать линию вдоль ее тела, окажется, что обе половины будут одинаковыми. Можно поступить и по-другому - нарисуем несколько таких линий, и окажется, что каждый отдельный участок будет похож на все остальные. Можно взять равносторонний треугольник, и повернуть его вокруг центра на  $60^{\circ}$  - и он перейдет сам в себя, а если еще на  $60^{\circ}$  - вы увидите ту же картину. То же вы увидите, если рассмотрите квадрат (только поворот должен быть на  $90$  градусов). Рассмотрим дерево - у него есть ствол - он делится на несколько веток, а каждая ветка делится на еще несколько веток, и так далее... то же самое можно пронаблюдать и при рассмотрении прожилок в листиках, и даже при рассмотрении цепной реакции. Ну, и заключительный мысленный эксперимент: посмотрите на какой-нибудь объект перед Вами ( стол, книга, что угодно, главное - не часы), запомните, закройте глаза и досчитайте до 10 - затем снова

посмотрите на объект - не произошло ли с ним каких-нибудь изменений - если нет, то замечательно - теперь попробуйте вспомнить объект час назад - он ведь совсем не изменился! Кроме того можно заметить, что если переложить этот объект с места на место — он никак при этом не изменится. Эти, вроде бы заурядные утверждения, на самом деле нам о многом говорят.

Попробуем сделать выводы - мы рассматривали объекты самой разной природы - одушевленные, неодушевленные, отражали их в зеркалах, смотрели на то, как на них действует время, поворачивали, уменьшали - но, не смотря на это, у всех у них есть нечто общее - все они либо сохраняли форму, либо были идентичны, либо совсем не изменялись. Это и приводит нас к понятию симметрии. Симμέτρία (др.-греч. *συμμετρία* «соразмерность», от *μετρέω* — «меряю»), в широком смысле — соответствие, неизменность (инвариантность), проявляемые при каких-либо изменениях, преобразованиях (например: положения, энергии, информации, другого). Так, например, сферическая симметрия тела означает, что вид тела не изменится, если его вращать в пространстве на произвольные углы (сохраняя одну точку на месте).[4]

## **1.2 Математические основы теории групп.**

Не смотря на то, что симметрии в той или иной степени, окружают нас везде, - впервые с ними мы сталкиваемся именно в математике, правда сами того не подозревая. Рассмотрим две пересекающиеся прямые — а конкретно вертикальные углы, которые пересечение образует. Очевидно, что вне зависимости от того, как мы будем изменять взаимное расположение прямых — не меняя того, что они пересекаются — вертикальные углы будут равны друг другу.

Рис. 2. Вертикальные углы

Теперь рассмотрим прямую, которая пересекает две параллельные прямые. Известно, что при этом формируются углы: внутренние односторонние и внутренние накрест лежащие, которые соответственно равны друг другу. Этому есть подтверждение — строгое математическое доказательство теоремы:

Если при пересечении двух прямых, лежащих в одной плоскости, третьей прямой углы одной из пар соответственных или накрест лежащих углов равны, то равными будут и углы в каждой из остальных пар соответственных и накрест лежащих углов. Пусть при пересечении прямых  $a$  и  $b$  третьей прямой  $c$  (смотри рисунок) равны, например, соответственно угол 1 и угол 5. Тогда так как угол 1 и угол 3, угол 5 и угол 7 являются вертикальными углами, а значит они равны между собой, то равными будут соответственные угол 3 и угол 7, накрест лежащие угол 3 и угол 5.

Равные внутренние накрест лежащие угол 3 и угол 5 являются соответственно смежными внутренними накрест лежащим угол 4 и угол 6, откуда следует, что угол 4 и угол 6 будут равными. Но тогда будут равными и угол 2 и угол 6, угол 4 и угол 8.

Рис.3. Углы, образованные параллельными прямыми и секущей.

С другой стороны, угол 1 = угол 7, а угол 2 = угол 8. Аналогичные

рассуждения проводятся и в случае, когда при пересечении двух прямых третьей прямой равными оказываются какие-нибудь другие накрест лежащие углы. Свойство углов доказано.

Давайте подойдем к этой задаче несколько по-другому. Снова время для мысленных экспериментов. На рисунке вы можете видеть две оси —  $a$  и  $b$ . Попробуйте сделать зеркальное отражение левой части относительно оси  $a$  (можно действительно взять зеркало и приложить его к картинке, тогда можно будет увидеть то, что нужно), а затем относительно оси  $b$  — и вы увидите, что картинка слилась воедино, и углы, равенство которых утверждалось математически — теперь видно еще и наглядно.

Теперь можно рассмотреть другой привычный нам объект — равнобедренный треугольник. У равнобедренного треугольника боковые стороны равны. Теорема гласит, что у равнобедренного треугольника углы при основании равны. Это доказывается с помощью признака равенства треугольников. Однако попробуем применить чисто феноменологический подход — начертим равнобедренный треугольник и проведем высоту к основанию. Снова поднесем зеркало. Очевидно, что если мы также отобразим левую половину на правую, соблюдая пропорции, углы просто совпадут, что и требовалось доказать.

Все вышеперечисленные доказательства были основаны только на одном типе симметрии — симметрии отражения. Но уже одного частного случая становится понятно, что использование общих симметричных свойств приводит к некому (возможно неполному, а возможно и более полному) предсказанию свойств системы.

Воспользуемся симметрией относительно поворотов вокруг некоторой оси. Возьмем правильный шестиугольник. Если провести линии, соединяющие лежащие друг напротив друга вершины, то получим 6 равнобедренных треугольников. Если вам известны только расстояние от центра фигуры до его



вершины и одна боковая сторона, вы можете определить площадь треугольника и просто умножить его на 6, поскольку можно показать, что при повороте одного треугольника вокруг оси проходящей через центр на  $60^\circ$ , он перейдет в другой треугольник, идентичный предыдущему.

В физике симметрии встречаются фактически везде: даже основные законы — законы сохранения, можно получить из соображений симметрии (правда, несколько иной — симметрии уравнений относительно преобразований). Так, закон сохранения импульса следует из неизменности свойств относительно трансляций (помните предмет, который мы перемещали с места на место и он при этом не менялся). Закон сохранения энергии появляется из-за того, что объекты не теряют своих свойств.

Не смотря на относительно давнее открытие роли симметрии в физике, этот подход все еще тщательно изучается и анализируется и сейчас. Наука, которая изучает симметрии в чистом виде, называется теорией групп [1]. Это абстрактная математическая наука, которая основывается на чрезвычайно простых принципах и позволившая вычислять крайне сложные задачи. История этой теории началась с рассмотрения решений уравнений, а затем были обнаружены интересные аналогии с геометрией и теорией чисел. У истоков данной науки стояли такие выдающиеся математики как Леонард Эйлер, Эварист Галуа (считается первым основателем теории групп как таковой), Карл Гаусс, Жозеф Лагранж и многие другие[2]. Затем началось активное развитие разнообразных приложений этой вполне абстрактной науки к вполне конкретным задачам экономики, физики, теории игр, социологии, биологии и с развитием теории фракталов она начала блистать яркими гранями в теории графов, диаграмм и эволюции систем[3]. Не смотря на всю кажущуюся сложность этой теории, она может быть введена в учебный процесс даже на школьном уровне, ввиду понятности и интуитивности принципов на которых

стоит эта наука.

## 2. Практическая часть

### 2.1 Применения симметричных соображений при решении школьных задач оптики и электростатики.

Теперь, после введения основной терминологии, перейдем к рассмотрению конкретных примеров и задач. Одним из самых замечательных примеров является аналогия при решении задач электростатики и оптики.

Начнем с оптики. Постройте изображение светящейся точки  $S$  на плоском зеркале  $MN$ .



Рис. 4. Точка над плоским зеркалом

Используя знания полученные на собственном жизненном опыте, любой человек может сказать, что изображение точки  $S'$  будет находится на прямой, перпендикулярной плоскости  $MN$  пересекающей точку  $S$ , и при этом находящейся на расстоянии, равном расстоянию от точки  $S$  до пересечения с

зеркалом (см. рис ниже).

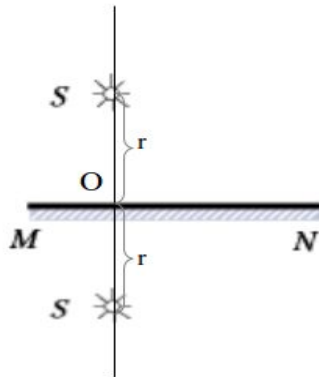


Рис.5. Реальный и виртуальный источник света.

Теперь приведем решение следующей классической задачи о взаимодействии заряда  $q$  и проводящей плоскости  $a$  расположенной от него на расстоянии  $r$ . Для решения этой задачи вводится несуществующий заряд-изображение  $q'$ , равный и противоположный по знаку заряду  $q$ , и расположенный на том же расстоянии  $r$  от плоскости только с другой стороны.

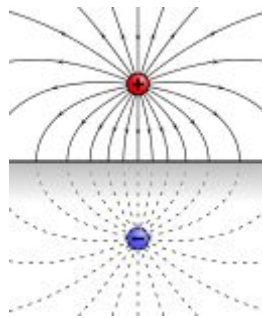


Рис.6. Реальный и виртуальный заряд-изображение.

Сила притяжения между зарядом и его изображением определится по закону Кулона.

$$F = k \times \frac{q^2}{4 \times a^2}$$

Данный способ решения является результатом многочисленных экспериментальных подтверждений, которые можно применять не только на

плоской геометрии, но и на объектах разной формы (цилиндрической, сферической, кубической и прочих). И, как видите, очевидна аналогия с предыдущей задачей из оптики.

## 2.2 Применения симметричных соображений при решении школьных задач механики.

Дальше можно рассмотреть задачу из механики, которая будет использовать тот же принцип. Тело массой  $m$  горизонтально летит на упругую резиновую мембрану и отражается в обратном направлении. Определите расстояние, на которое вернется тело после соударения с мембраной, если тело летело со скоростью  $6 \text{ м/с}$  на расстоянии  $10 \text{ м}$ , скорость изгиба мембраны  $1,2 \text{ м/с}$ , а возврат считать мгновенным. Мембрану считать невесомой и силой гравитации пренебрегаем.

Эту задачу можно решить несколькими способами, но нас интересует симметрия системы и то, как ее можно применить. Представим, что мембраны нет.



Рис.7. Тело, летящее навстречу мембране, а затем отражающееся от нее после взаимодействия.



Рис.8. Реальное и виртуальное тело, которые встречаются в точке, ранее соответствовавшей

мембране.

А вместо нее создадим виртуальный шарик, который движется с некоторой скоростью  $v_2$  навстречу первому шару. На месте мембраны расположена точка встречи этих виртуальных шаров. Удар будем считать упругим. При таком ударе тела будто бы обмениваются скоростями. Настоящий шарик будет двигаться со скоростью  $v_2$ , а виртуальный отлетит со скоростью реального  $v_1$ . Какой же должна быть скорость второго шарика, если он призван нести в себе поправку скорости мембраны? Давайте подумаем, наш шарик и мембрана движутся в одну сторону до момента возврата (в терминах виртуального шара — соударения), и являются положительными. Тогда скорость второго (виртуального) шара олицетворяющего мембрану будет состоять из двух компонент: 1-я компонента соответствующая движущейся мембране  $+v_m$ , и вторая равная скорости движения настоящего шара с обратным знаком  $-v_1$ .

$$v_1 = +v_1, \quad v_2 = v_m - v_1$$

после соударения шаров, они обмениваются скоростями, следовательно.

$$v_2 = +v_1, \quad v_1 = v_1 - v_m$$

поскольку виртуального шара на самом деле нет, про него можно забыть после столкновения, а вот скорость реального шара совпадет с экспериментом. Как видите, нам снова удалось решить задачу с помощью симметричных соображений (зеркальная симметрия и отражение времени).

Рассмотрим последний пример. Из элеватора подается некоторая масса  $m_0$  зерна в начальный момент времени. Затем грузчик решил, что насыпал слишком много и скорректировал поток таким образом, что каждая новая порция зерна была в половину меньше, чем предыдущая. Рассчитайте, какая масса окажется погруженной, когда поток совсем угаснет?

Тут, конечно, есть несколько способов решения. Первый просто

воспользоваться формулой прогрессии, но кто же ее помнит? И тут на помощь приходит так называемый метод графов, который демонстрирует замечательные результаты и является тесно сопряженным с теорией групп. Давайте поставим в соответствие  $m_0$  квадрат некоторой фиксированной площади. Поскольку следующая порция в половину меньше, то и квадрат отвечающий этой порции тоже должен быть равен половине предыдущего.

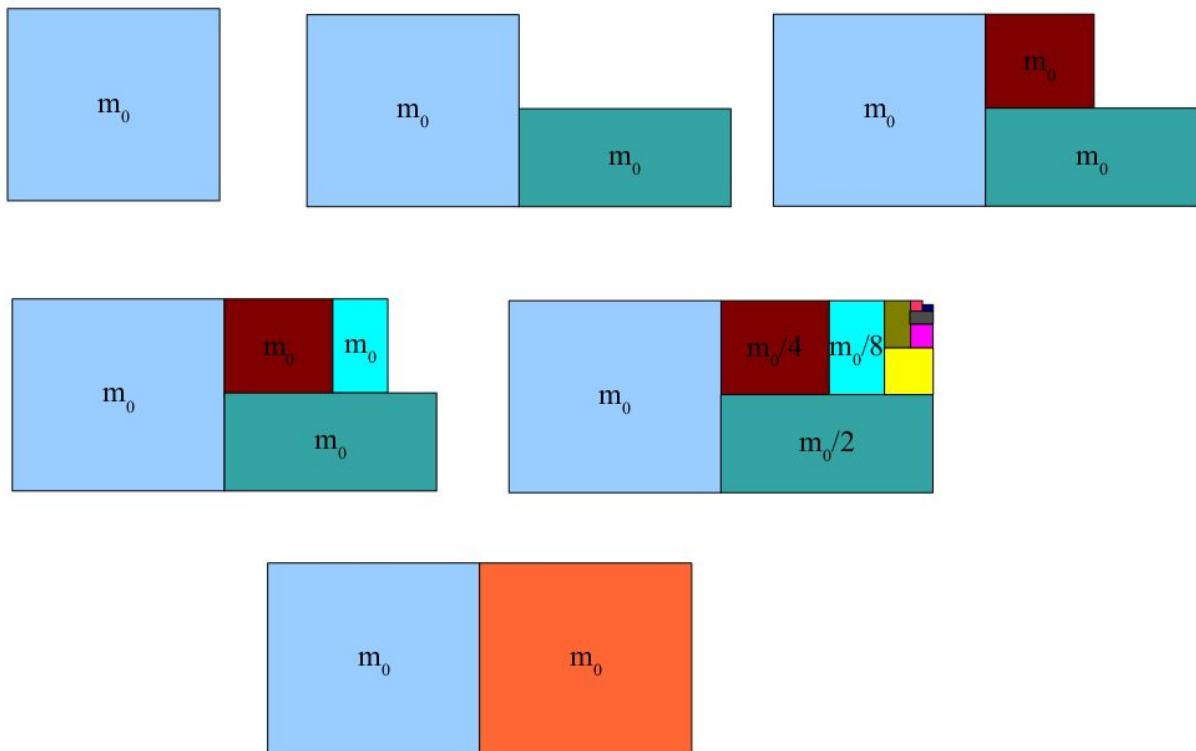


Рис.9. Площадь второго квадрата стремится к площади первого

Из графов легко видно, что добавляемые массы складываются в квадрат по площади равный площади первого, чтобы это доказать достаточно отобразить зеркально второй квадрат на первый, и только после этого по построению можно доказать что графы равны, и как следствие, - массы тоже равны. Кстати, в виду дискретности массы зерен, эта задача действительно точно решается графически.

Как видите, применение конкретного метода, рассматриваемого в работе, может быть применено только при наличии соответствующей архитектуры

системы. Только в случае, если имеет место некоторая плоскость, прямая и либо может точка, относительно которой можно провести виртуальное отражение. Ввиду того, что в мире огромное количество систем обладает зеркальной симметрией, соответственно значительный класс задач может быть решен.

## **Выводы**

В данной работе были рассмотрены методы решения школьных задач, опирающихся на симметричных свойствах системы. Под симметричными свойствами системы понималось сохранение некоторых параметров системы при определенных преобразованиях над ней. Такие методы позволяют быстро и эффективно решать задачи по физике, используя только интуитивно-понятийный математический аппарат и образное мышление, и зачастую не требует строгих знаний физических законов и позволяет получить их просто из рисунка или воображаемой модели системы. В работе был представлен анализ проведенной работы в данной области исследований, были рассмотрены решения типовых задач с применением современных математических методов, и была доказана эффективность применяемой автором методики. На основании проведенной работы можно привести следующие выводы:

- способы решения задач, содержащие в своей основе симметричные соображения, позволяют получить большее количество информации о системе;
- симметричные способы решения не требуют заучивания формальных утверждений, а позволяют получать решения просто из соображений формальной логики и абстрактных моделей;
- привязка к симметрии системы позволяет использовать один и тот же метод для описания качественно различных свойств системы;
- соответствие данного метода самым современным научным представлениям мира.
- Зеркальная симметрия позволяет решать только ограниченный класс задач, которые привязаны к соответствующей геометрии системы.

Данная техника решения задач может применяться для решения многих задач в физике и повседневной жизни.





## **Список использованной литературы.**

1. П.С. Александров. Введение в теорию групп. «Библиотечка квант» М.: Наука, 1980. — 144с.
2. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии М.–Л., ГОНТИ, 1937 — 432 с.
3. Теория игр: введение. [электронный ресурс]. Режим доступа url: <http://habrahabr.ru/post/163681>
4. Погорелов А.В. Геометрия. Учебник для 7-9 классов. М. Просвещение. 2001 — 224с.