

Издательство «Легион»



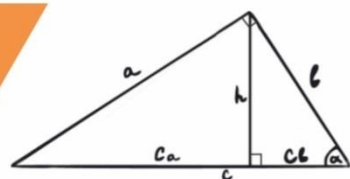
Подготовка учащихся
к выполнению
геометрических задач
различного уровня
сложности на ОГЭ-2017

докладчик: Ханин Дмитрий Игоревич

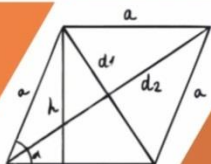
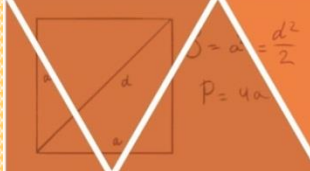
Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

ОГЭ

ГЕОМЕТРИЯ



$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= c^2 & h^2 &= ca \cdot cb \\a^2 &= ca \cdot c & b^2 &= cb \cdot c \\ \sin \alpha &= \frac{a}{c} & \cos \alpha &= \frac{b}{c} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}S &= a \cdot h = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \\d_1^2 + d_2^2 &= 4a^2\end{aligned}$$



**Задачи
с развёрнутым ответом
9 класс**

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.О. Иванова

ОГЭ

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ОГЭ-2017



40 тренировочных
вариантов

2017 ПО НОВОЙ
ДЕМОВЕРСИИ

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

ОГЭ

МАТЕМАТИКА

ОГЭ-2017



Тематический тренинг
9 класс

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

ОГЭ

МАТЕМАТИКА

ТРЕНАЖЁР ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ ОГЭ-2017



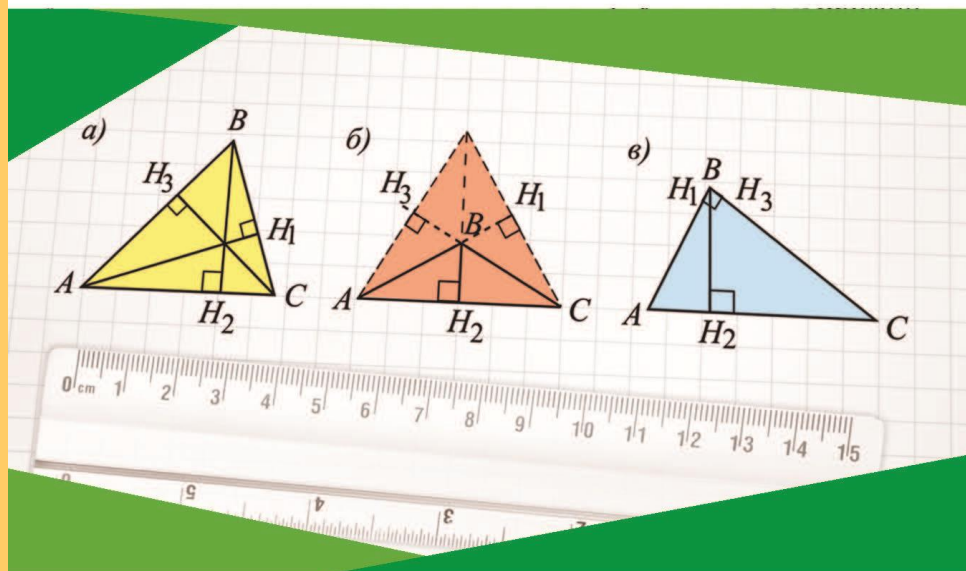
Алгебра. Геометрия
Реальная математика
9 класс

Под редакцией
Ф. Ф. Лысенко,
С. Ю. Кулабухова

7
КЛАСС

ГЕОМЕТРИЯ

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ



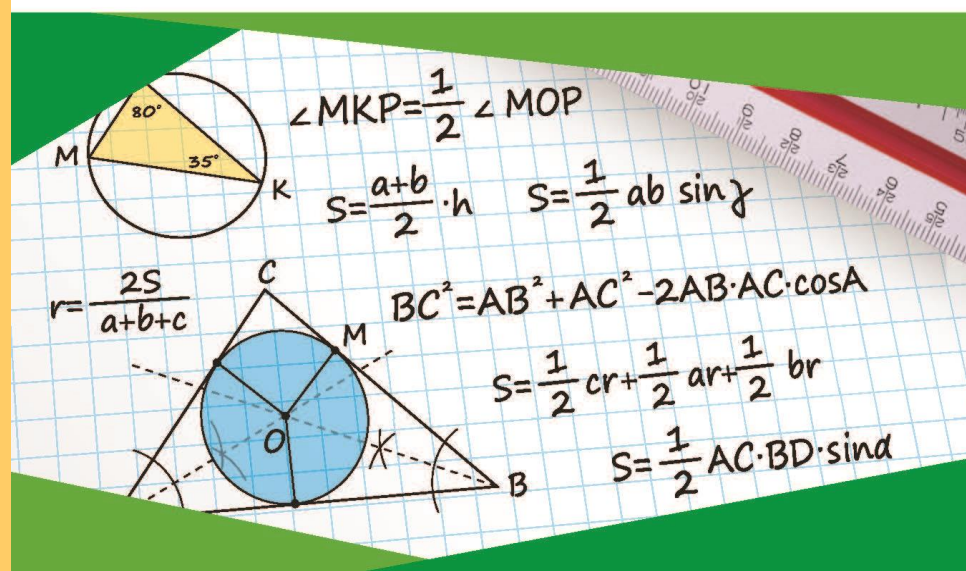
**Тетрадь для тренировки
и мониторинга**

Под редакцией
Ф. Ф. Лысенко,
С. Ю. Кулабухова

8
КЛАСС

ГЕОМЕТРИЯ

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ



**Тетрадь для тренировки
и мониторинга**

Трудности решения геометрических задач обусловлены как объективными, так и субъективными факторами, среди которых

- ✓ Неалгоритмичность задач**
- ✓ Необходимость выбора метода решения задачи и теоремы для решения конкретной задачи (нескольких теорем) из большого набора известных фактов**
- ✓ Нужно решить довольно много задач, чтобы научиться их решать**

Необходимые условия успеха при решении задач по геометрии

- ✓ Уверенное владение основными понятиями и их свойствами (аксиомы, определения, теоремы, базовые задачи);
- ✓ Знание основных методов и приемов решения задач;
- ✓ Умение комбинировать методы и приемы решения задач;
- ✓ Наличие опыта решения задач.



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН
www.legionr.ru

Причины ошибок в решении геометрических задач

- ✓ Незнание и/или непонимание аксиом, определений, теорем;
- ✓ **неумение их применять**
- ✓ невнимательное чтение условия и вопроса задания;
- ✓ **вычислительные ошибки;**
- ✓ нарушения логики в рассуждениях;
- ✓ **принятие ошибочных гипотез;**
- ✓ недостатки в работе с рисунком.

Некоторые методы решения геометрических задач

- ✓ **Метод дополнительных построений**
- ✓ **Метод вспомогательной окружности**
- ✓ **Метод подобия**
- ✓ **Метод площадей**



13. Какие из следующих утверждений верны?

- ☐ 1) В остроугольном треугольнике все углы острые.
- ☐ 2) Если в треугольнике есть один острый угол, то этот треугольник остроугольный.
- ☐ 3) Сумма углов любого треугольника равна 360° .

Ответ: _____

13. Какие из следующих утверждений верны?

- ☐ 1) Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
- ☐ 2) Любые два равносторонних треугольника подобны.
- ☐ 3) Все равнобедренные треугольники подобны.

Ответ: _____

*Синим кружком выделены утверждения, на которые следует особенно обратить внимание

13. Какие из следующих утверждений верны?

- 1) В любом тупоугольном треугольнике есть острый угол.
- 2) Один из углов треугольника всегда не превышает 60° .
- 3) Внешний угол треугольника равен сумме его внутренних углов.

Ответ: _____

13. Какие из следующих утверждений верны?

- 1) Биссектриса треугольника делит пополам сторону, к которой проведена.
- 2) Треугольник со сторонами 11, 12, 40 существует.
- 3) В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

Ответ: _____

13. Какие из следующих утверждений верны?

1) Если три угла одного треугольника равны соответственно трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

☒ 2) Если две стороны и угол одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

3) Биссектрисы треугольника пересекаются в центре его вписанной окружности.

Ответ: _____

13. Какие из следующих утверждений верны?

1) Любая биссектриса равнобедренного треугольника является его медианой.

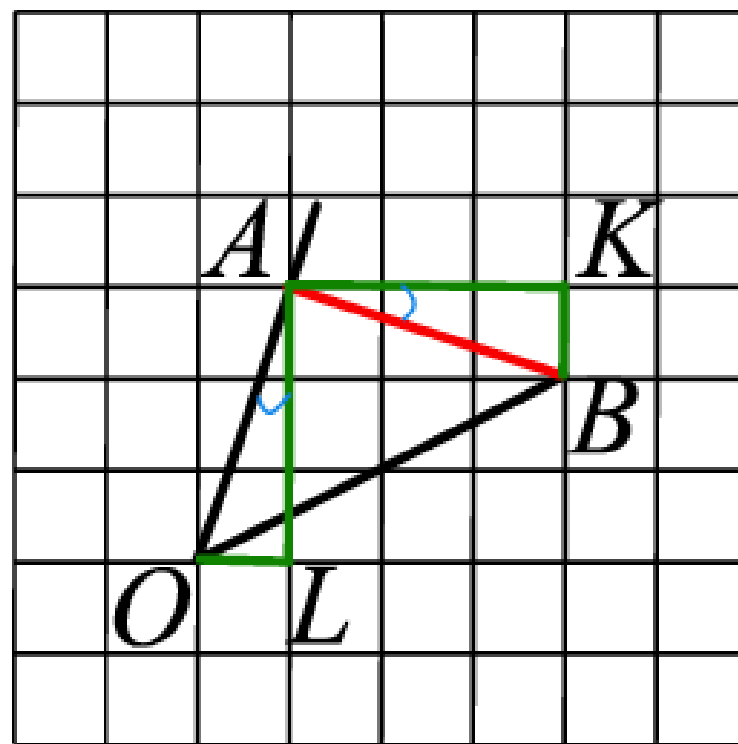
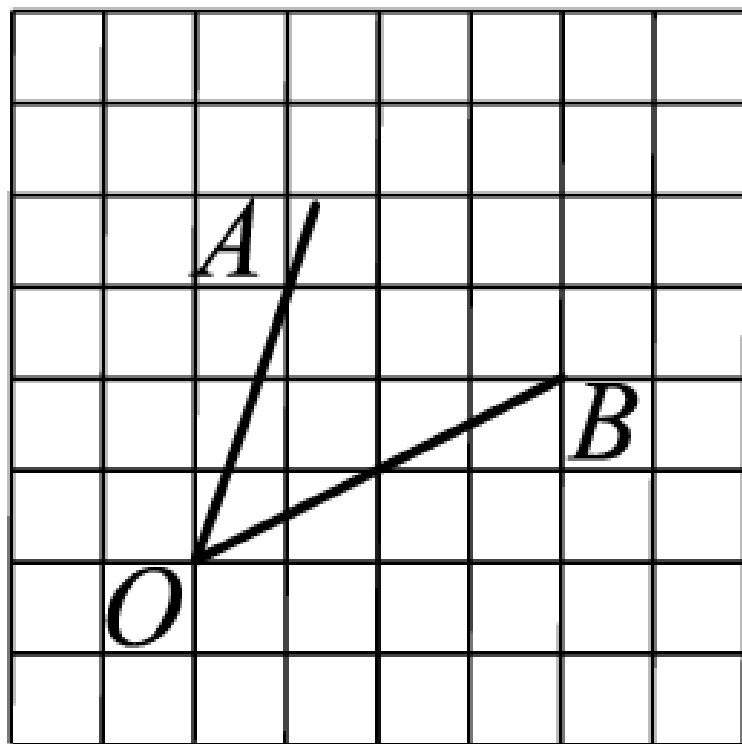
☒ 2) Каждая из биссектрис равнобедренного треугольника является его высотой.

☒ 3) Сумма углов равнобедренного треугольника равна 180° .

Ответ: _____

Задача

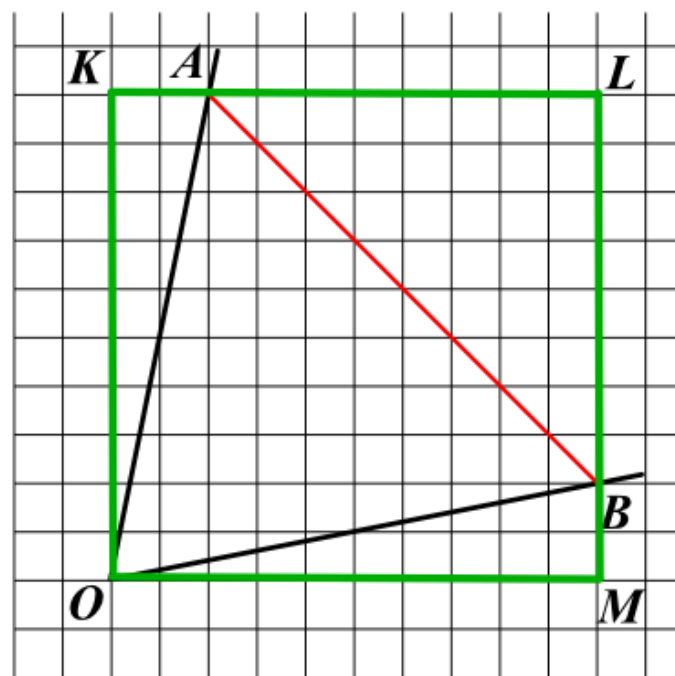
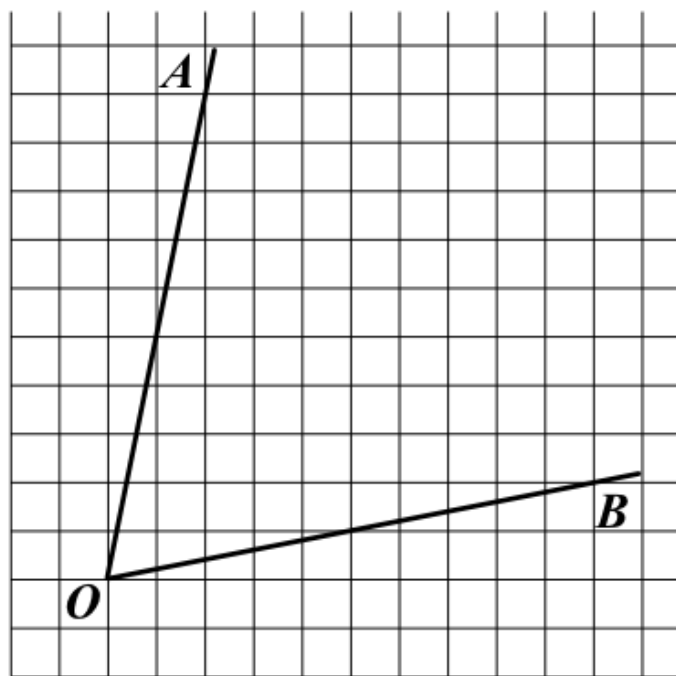
На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



Ответ: 1.

Задача

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



I способ

$$1) OA^2 = 10^2 + 2^2 = 104; OA = 2\sqrt{26}.$$

$$2) OB^2 = 10^2 + 2^2 = 104; OB = 2\sqrt{26}.$$

$$3) AB^2 = 8^2 + 8^2 = 128; AB = 8\sqrt{2}.$$

$$4) AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \angle AOB.$$

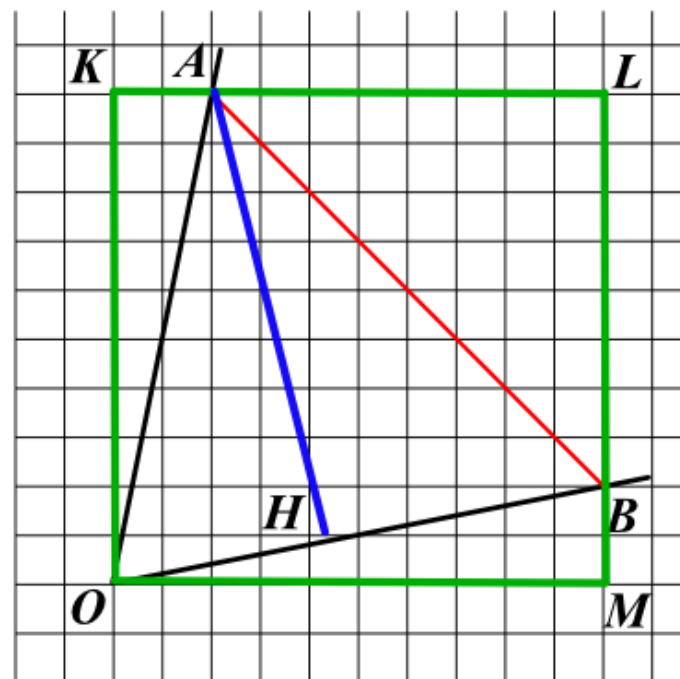
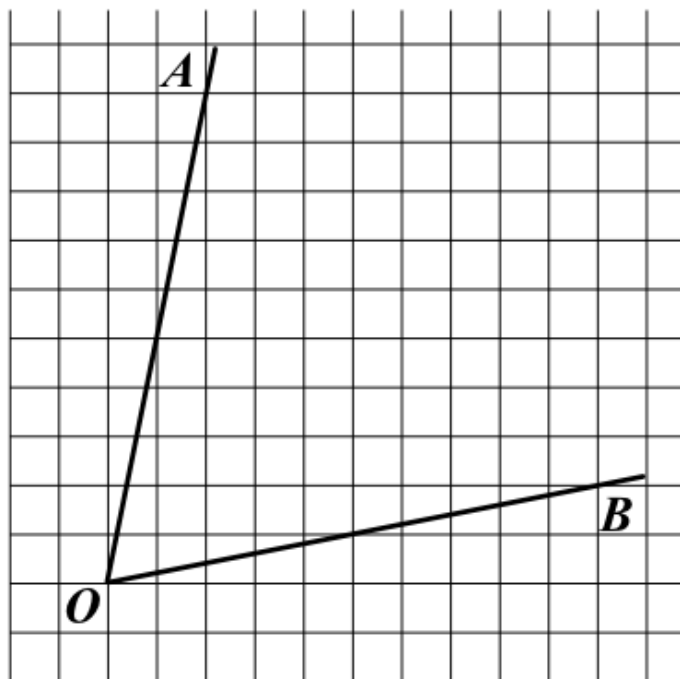
$$128 = 208 - 208 \cos \angle AOB;$$

$$\cos AOB = \frac{5}{13}.$$

$$5) \sin^2 \angle AOB + \cos^2 \angle AOB = 1;$$

$$\sin \angle AOB = \frac{12}{13}.$$

$$6) \operatorname{tg} AOB = \frac{\sin \angle AOB}{\cos \angle AOB} = \frac{12}{5} = 2,4.$$



II способ

$$1) OA^2 = 10^2 + 2^2 = 104; OA = 2\sqrt{26}.$$

$$2) OB^2 = 10^2 + 2^2 = 104; OB = 2\sqrt{26}.$$

$$3) S_{AOB} = S_{OKLM} - S_{AOK} - S_{ALB} - S_{OBM} = \\ = 100 - 10 - 10 - 32 = 48.$$

$$4) \frac{1}{2} AH \cdot OB = S_{AOB}; AH = \frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{13}}.$$

$$5) OH^2 = AO^2 - AH^2 = \frac{200}{13}; \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{13}}.$$

$$6) \operatorname{tg} \angle AOH = \frac{AH}{OH} = 2,4.$$



- **Задания, оцениваемые в 2 балла, считаются выполненными верно**, если обучающийся выбрал правильный путь решения, из письменной записи решения понятен ход его рассуждений, получен верный ответ. В этом случае ему выставляется полный балл.
- **Нужно нацеливать учащихся на лаконичность** и не требовать подробных комментариев и формулировок теорем, при этом в решении должны быть ссылки на теоремы, чтобы показать, что ученик владеет теоретическим материалом.
- **Если в решении допущена ошибка непринципиального характера** (вычислительная, погрешность в терминологии или символике и др.), не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на ее наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащемуся **засчитывается 1 балл**.

(из рекомендаций ФИПИ)

«Требования к выполнению заданий с развернутым ответом заключаются в следующем: решение должно быть математически грамотным и полным, из него должен быть понятен ход рассуждений учащегося. Оформление решения должно обеспечивать выполнение указанных выше требований, а в остальном может быть произвольным. Не следует требовать от учащихся слишком подробных комментариев (например, описания алгоритмов). Лаконичное решение, не содержащее неверных утверждений, все выкладки которого правильны, следует рассматривать как решение без недочетов.

Если решение заданий 21–26 удовлетворяет этим требованиям, то выставляется полный балл – 2 балла за каждое задание. Если в решении допущена ошибка непринципиального характера (вычислительная, погрешность в терминологии или символике и др.), не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на ее наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащемуся засчитывается балл, на 1 меньший указанного, что и отражено в критериях оценивания заданий с развернутым ответом.»

(ФИПИ «Методические материалы для председателей и членов региональных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ОГЭ 2016 года»)

Задача повышенного уровня сложности (24).

2-3 ходовая задача на вычисление

Ненамного превышает обязательный уровень

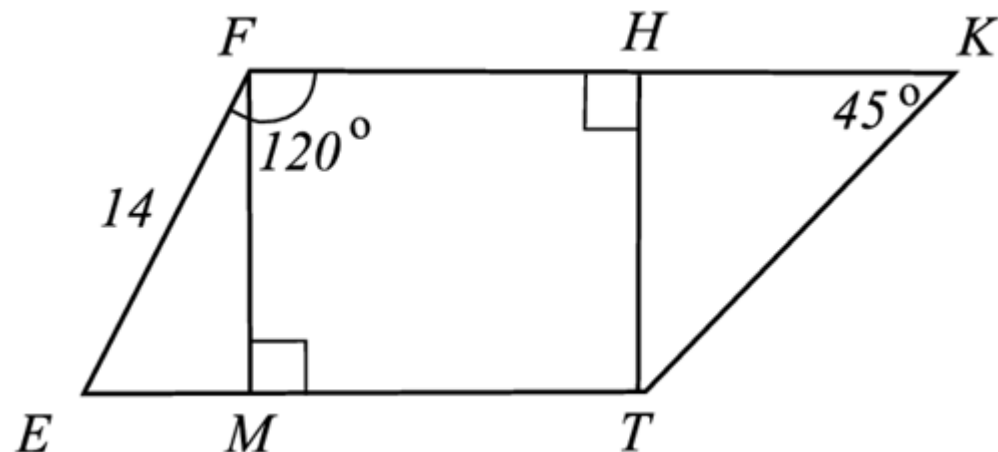
Проверяет знание основных терминов и теорем, умение их применять

Проверяет умение записать решение и аргументировать свое мнение

Баллы	Критерии оценивания выполнения заданий
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но не даны объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям
2	Максимальный балл

Задание 24

Задача



Найдите боковую сторону TK трапеции $EFKT$, если $FE = 14$, а углы FKT и EFK равны соответственно 45° и 120° .

Решение.

Проведём высоты трапеции TH и FM из вершин T и F соответственно.

Основания трапеции параллельны, расстояние между параллельными прямыми одинаково, значит, $HT = FM$.

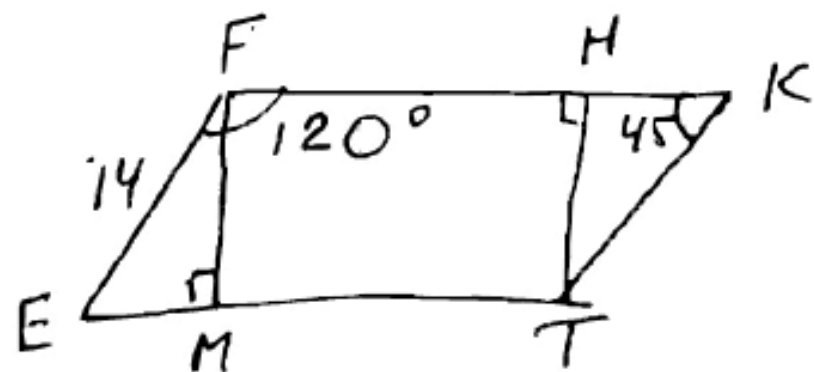
Треугольник EFM прямоугольный, $\angle EFM = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$. В прямоугольном треугольнике против угла 30° лежит катет, равный половине гипотенузы. $EM = EF : 2 = 14 : 2 = 7$. По теореме Пифагора $EF^2 = FM^2 + EM^2$, $FM^2 = 14^2 - 7^2 = 147$, $FM = \sqrt{147} = 7\sqrt{3}$.

$HT = FM = 7\sqrt{3}$. Треугольник THK прямоугольный, $\angle HKT = 45^\circ$.

$$\sin \angle HKT = HT : TK, TK = HT : \sin 45^\circ = 7\sqrt{3} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{6}.$$

Пример 1.

24



$\angle FEM = 180^\circ - \angle EFK = 60^\circ$
 т.к. $ET \parallel FK$, свойства
 односторонних углов.

$$FM = EF \cdot \sin FEM = \frac{14\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$$

$HT = FM$, т.к. $MFHT$ — прямоугольник

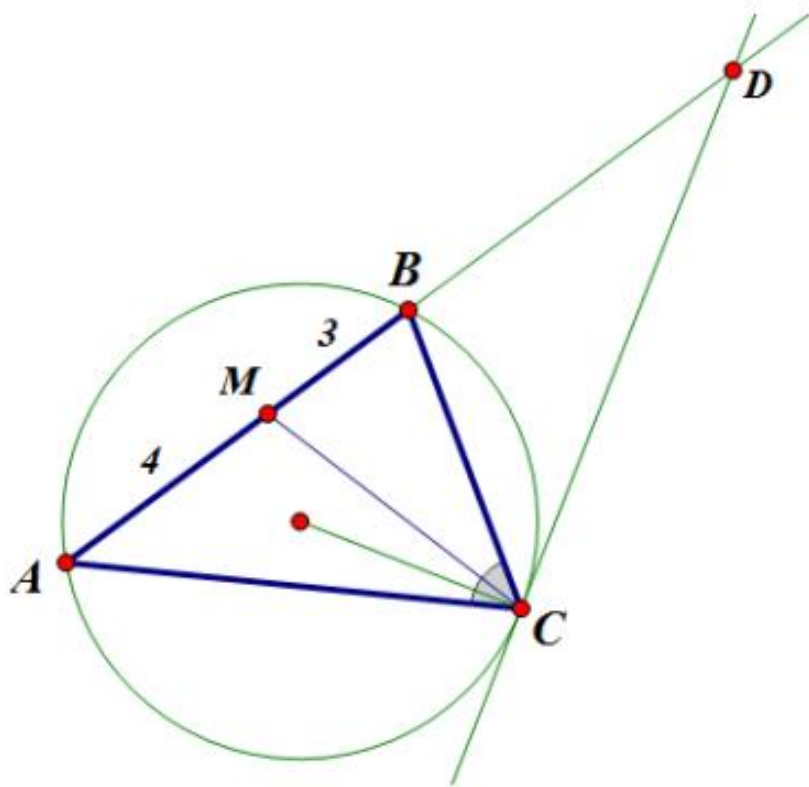
$$KT = \frac{HT}{\sin 45^\circ} = \frac{7\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{6}$$

Ответ: $7\sqrt{6}$.

Комментарий. Ученик не написал явно, что TH и FM — высоты, но прямые углы отмечены на рисунке. Решение верное, выставляется 2 балла.

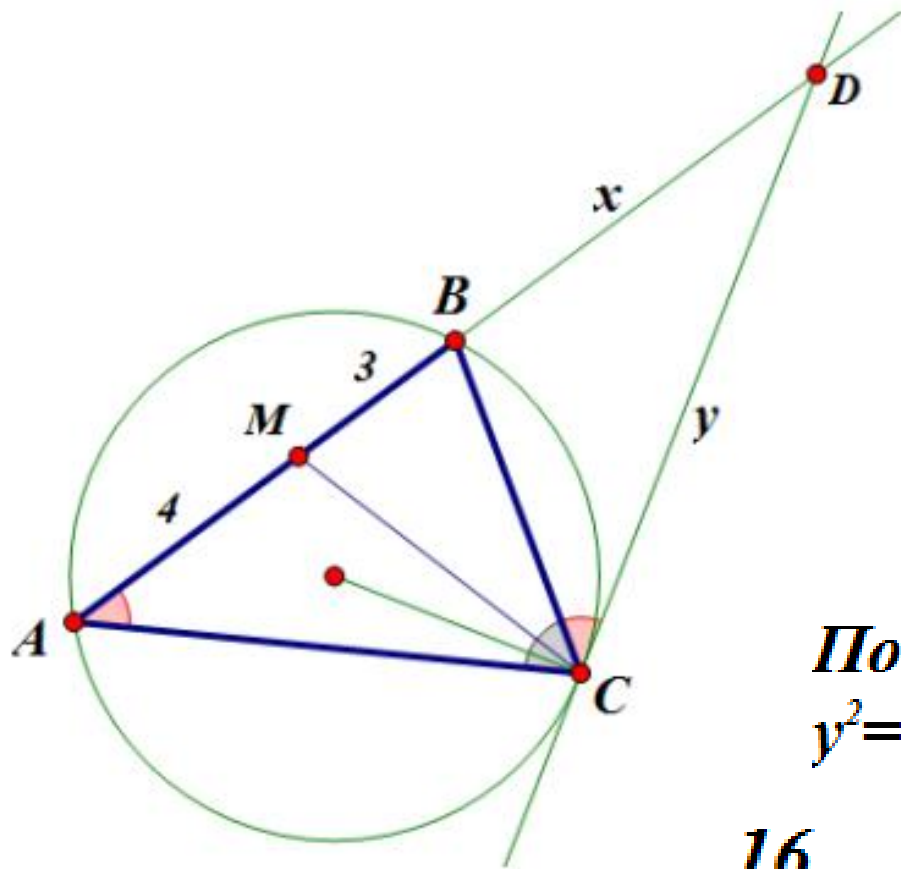
Метод подобия

Задача.



Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM=4$ и $MB=3$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC , проходящая через точку C , пересекает прямую AB в точке D . Найдите CD .

Решение.



$$\triangle ACD \sim \triangle BCD: \frac{BC}{AC} = \frac{x}{y}$$

***По свойству биссектрисы
треугольника***

$$\frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{4x}{3}$$

По свойству касательной
 $y^2 = (x+7)x$

$$\frac{16}{9}x^2 = x^2 + 7x$$

$x=9, y=12$

Ответ. 12

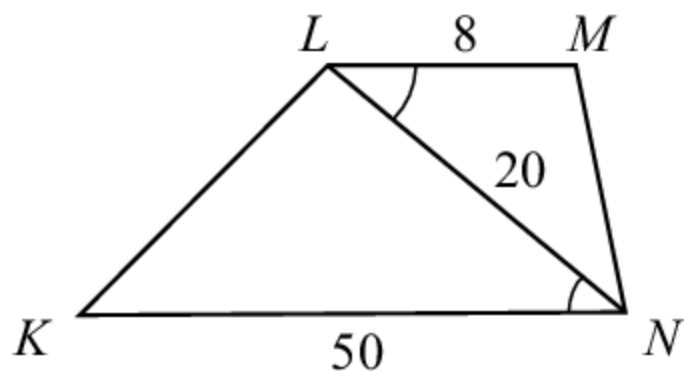
Задание 25

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	<i>Максимальный балл</i>

Задача

Основания LM и KN трапеции $KLMN$ равны соответственно 8 и 50, $LN = 20$. Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.

Решение.



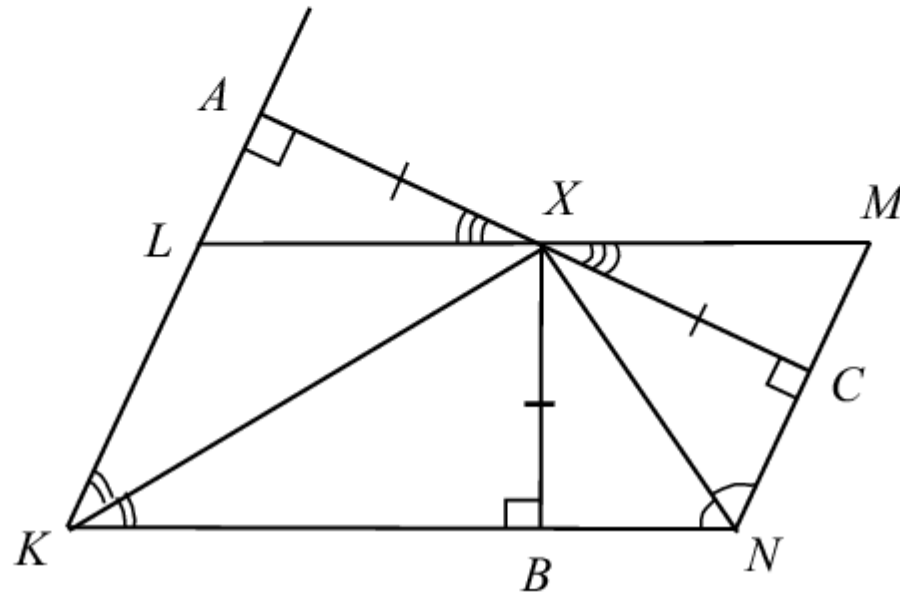
Воспользуемся вторым признаком подобия треугольников: $\angle KNL = \angle LNM$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых LM и KN и секущей NL , а $NL : NK = LM : NL$, так как $NL : NK = 20 : 50 = 0,4$, $LM : NL = 8 : 20 = 0,4$.

Значит, треугольники NKL и LMN подобны.

Задача Биссектрисы углов K и N параллелограмма $KLMN$ пересекаются в точке X стороны LM . Докажите, что X — середина LM .

Решение.

Опустим из точки X высоты XA , XB , XC на прямые KL , KN и NM соответственно.



Так как точки, лежащие на биссектрисе угла, равноудалены от сторон угла и точка X лежит на биссектрисах углов LKN и KNM , то $XA = XB$ и $XB = XC$, откуда $XA = XC$. $KL \parallel MN$, поэтому углы XLA и XMC равны как накрест лежащие. Прямоугольные треугольники XLA и XMC равны по катету $XA = XC$ и острому углу, поэтому равны их гипотенузы LX и XM .

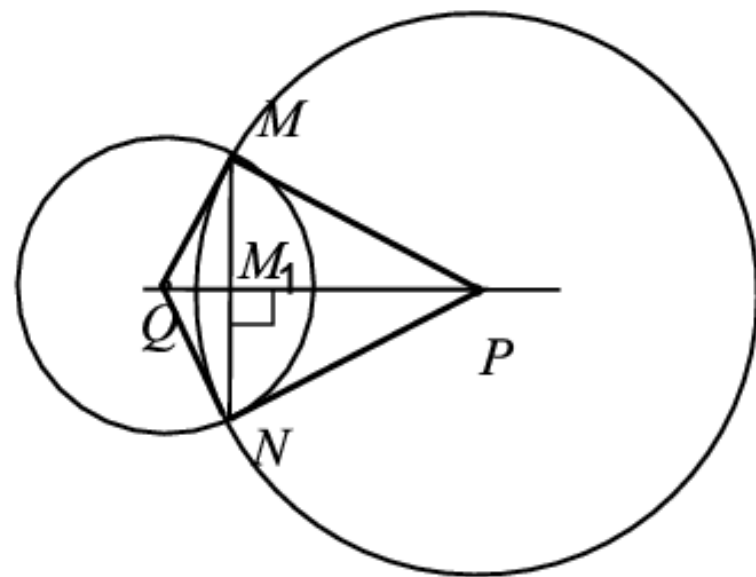
Задача

Окружности с центрами в точках P и Q пересекаются в точках M и N , причём точки P и Q лежат по разные стороны от прямой MN . Докажите, что $MN \perp PQ$.

Решение.

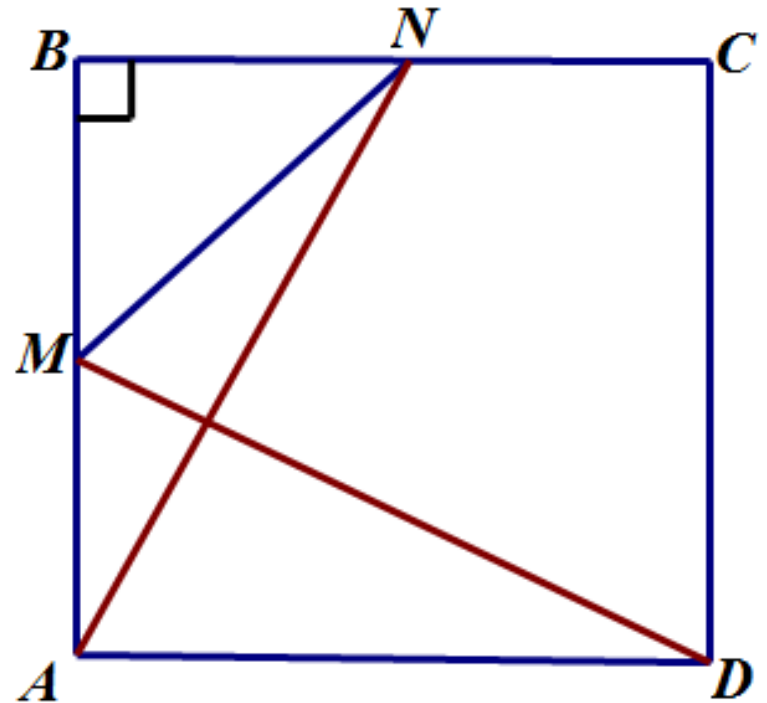
Треугольники PQM и PQN равны по трём сторонам, поэтому равны высоты MM_1 и NN_1 , проведённые из вершин M и N к стороне PQ . Значит, прямоугольные треугольники PM_1M и PN_1N равны по гипотенузе и катету. Поэтому равны их вторые катеты $PM_1 = PN_1$ и точки M_1 и N_1 совпадают.

Следовательно, точки M , $M_1 = N_1$ и N лежат на одной прямой, и $MN \perp PQ$.

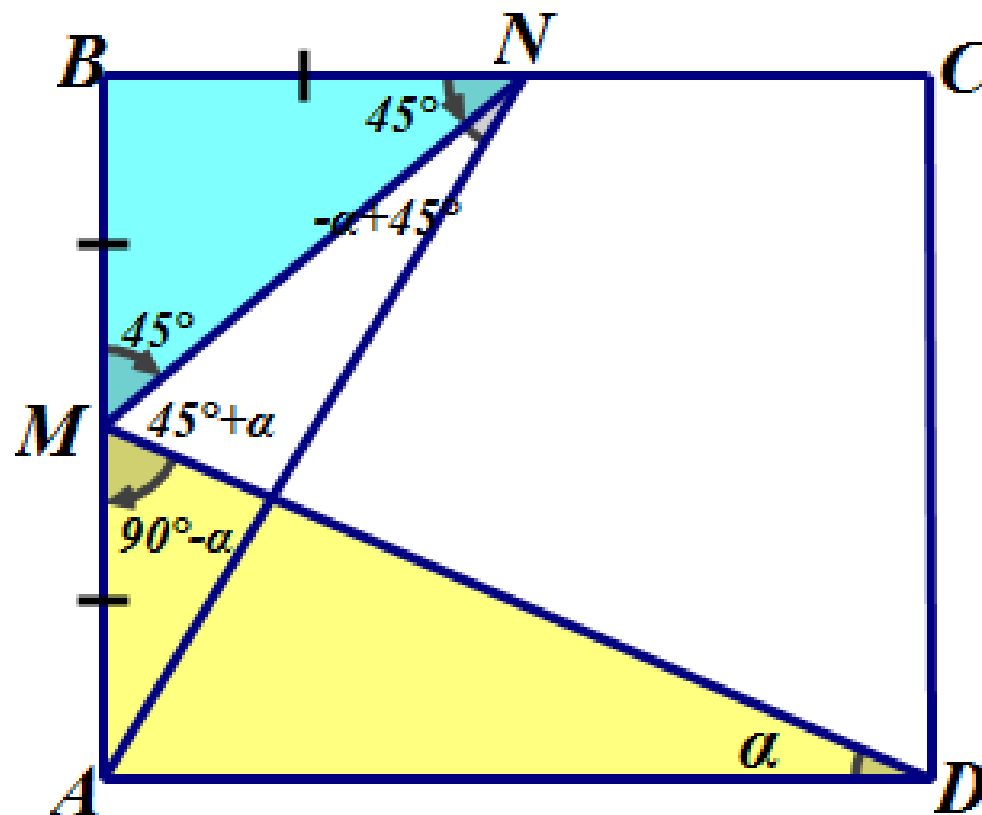


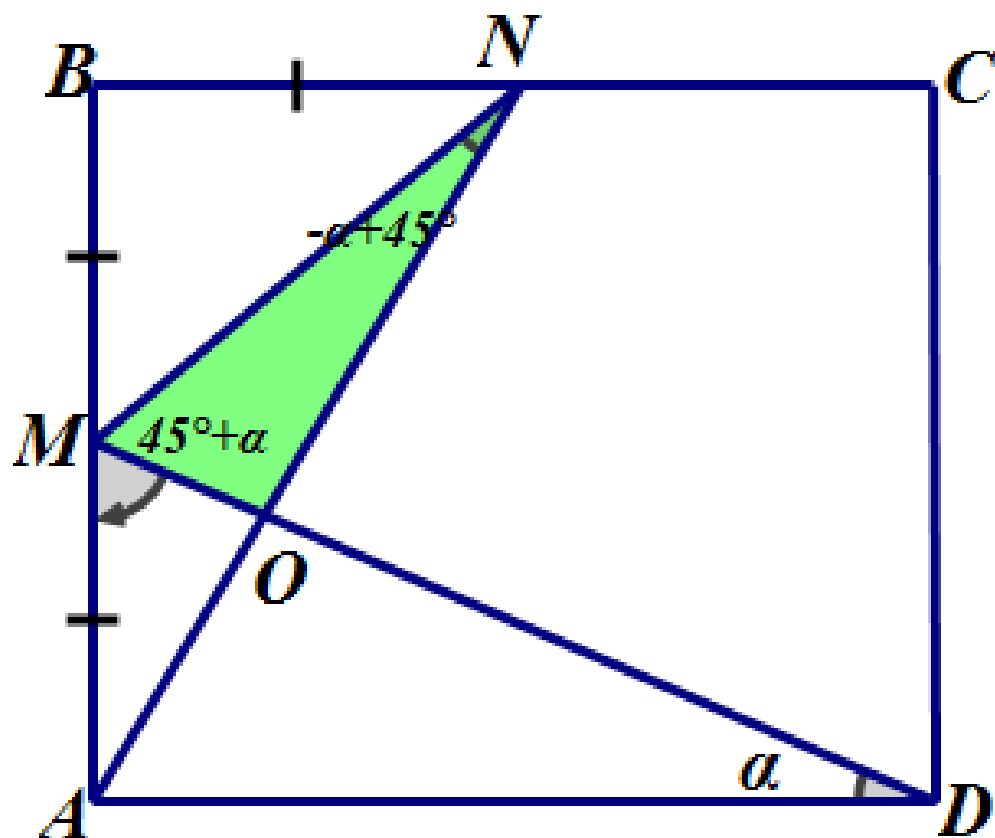
Задача

$ABCD$ – квадрат. Точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Докажите, что AN перпендикулярна MD .



Решение





$$\angle MON = 90^\circ$$

Задание 26

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, чертёж соответствует условию задачи, но пропущены существенные объяснения или допущена вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	<i>Максимальный балл</i>

1. В выпуклом четырёхугольнике $NPLM$ диагональ NL является биссектрисой угла PNM и пересекается с диагональю PM в точке T . Найдите NT , если известно, что около четырёхугольника $NPLM$ можно описать окружность, $PL = 18, TL = 10$.

Решение.

Так как четырёхугольник $NPLM$ можно вписать в окружность (см. рис. 1), то $\angle LPM = \angle LNM$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу.

По условию $\angle PNL = \angle LNM$.

Отсюда $\angle LPM = \angle LNP$.

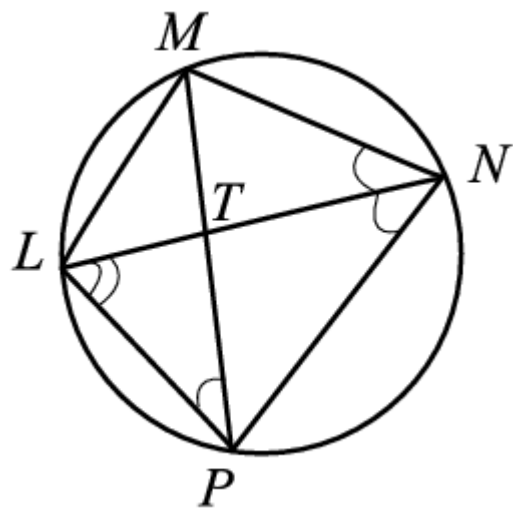
$\triangle LPT \sim \triangle LNP$ по двум углам ($\angle L$ — общий, $\angle LPT = \angle LNP$),

$$\text{тогда } \frac{LN}{LP} = \frac{LP}{LT}; \frac{10 + TN}{18} = \frac{18}{10};$$

$$10(10 + TN) = 18^2;$$

$$10TN = 224; TN = 22,4.$$

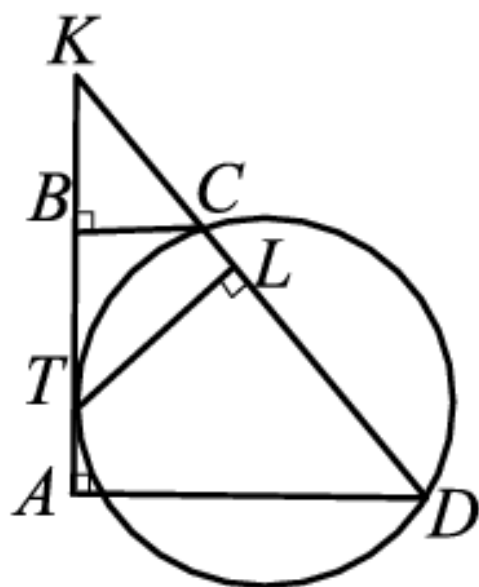
Ответ: 22,4.



5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке T . Найдите расстояние от точки T до прямой CD , если $AD = 60$, $BC = 15$.

Решение.

Заметим, что трапеция $ABCD$ прямоугольна, так как боковая сторона перпендикулярна основанию. Пусть K — точка пересечения прямых AB и CD . Пусть $TL \perp CD$, точка L лежит на прямой CD (см. рис. 5).



Тогда $\triangle KBC$, $\triangle KTL$ и $\triangle KAD$ — прямоугольные с общими углом K .

$BC = KC \sin \angle K$, $AD = KD \sin \angle K$,
 $TL = KT \sin \angle K$.

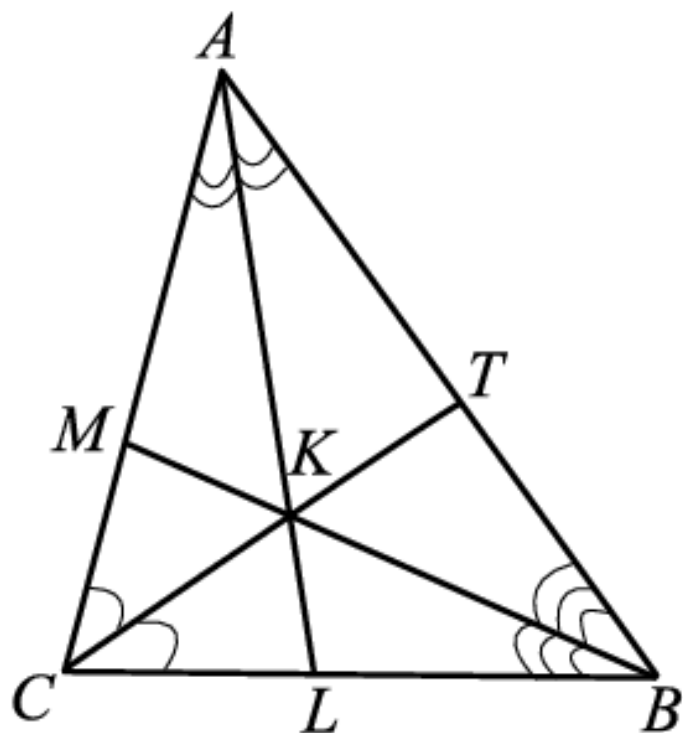
$$KT^2 = KC \cdot KD.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } TL^2 &= KT^2 \sin^2 \angle K = \\ &= KC \cdot KD \cdot \sin^2 \angle K = \\ &= (KC \sin \angle K) \cdot (KD \sin \angle K) = \\ &= BC \cdot AD = 15 \cdot 60 = 900. \quad TL = 30. \end{aligned}$$

Ответ: 30.

9. Одна из биссектрис треугольника делится точкой пересечения биссектрис в отношении $37 : 3$, считая от вершины. Найдите периметр треугольника, если длина стороны треугольника, к которой эта биссектриса проведена, равна 15.

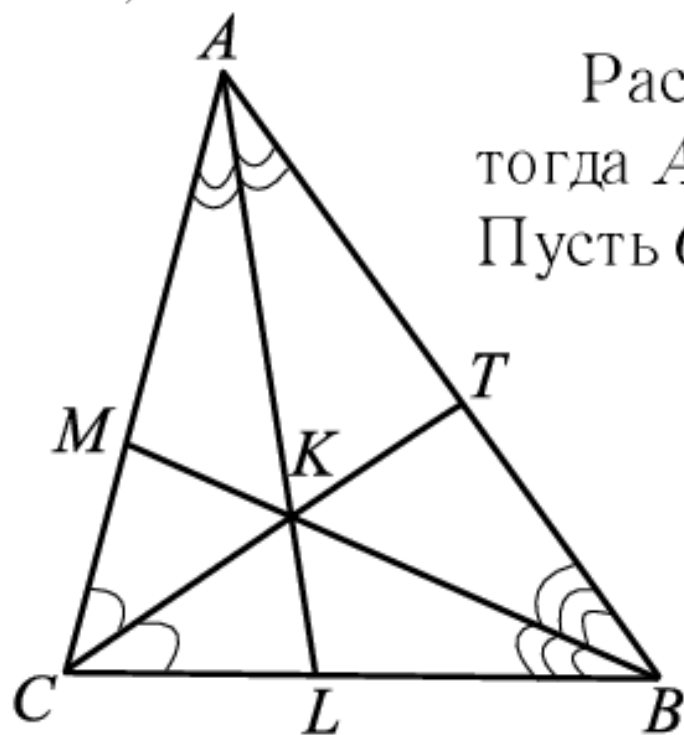
Решение.



Решение.

1-й способ

Пусть AL , BM и CT — биссектрисы треугольника ABC , K — их точка пересечения. Предположим, что $AK : KL = 37 : 3$, $CB = 15$ (см. рис. 9).



Рассмотрим $\triangle ACL$, CK — его биссектриса, тогда $AC : CL = AK : KL = 37 : 3$.

Пусть $CL = 3x$, тогда $AC = 37x$.

Рассмотрим $\triangle ABL$, BK — его биссектриса, тогда $AB : BL = AK : KL = 37 : 3$. Пусть $BL = 3y$, тогда $AB = 37y$.

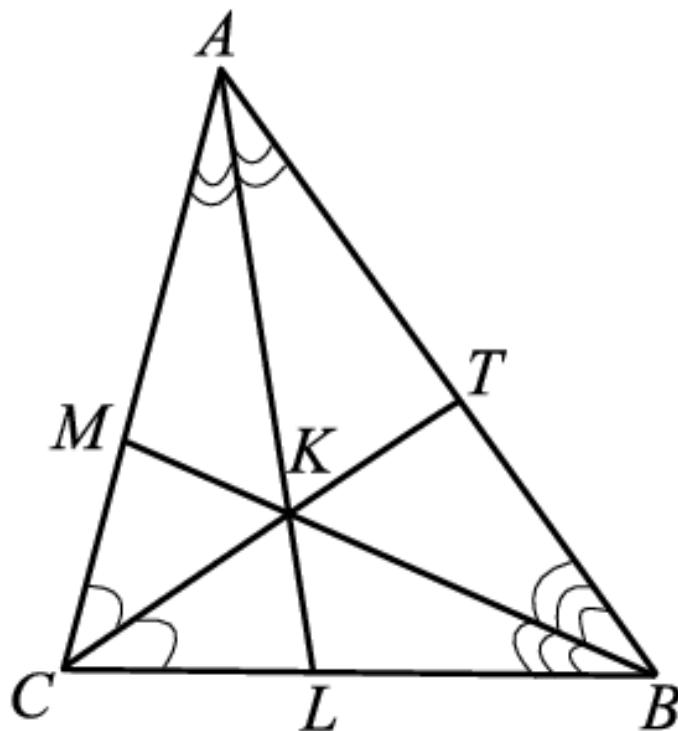
$CB = 15$. С другой стороны $CB = CL + BL = 3x + 3y$. Отсюда $x + y = 5$.

Периметр треугольника ABC равен $37x + (3x + 3y) + 37y = 40(x + y) = 40 \cdot 5 = 200$.

Ответ: 200.



2-й способ



Рассмотрим $\triangle ACL$, CK — его биссектриса, тогда по свойству биссектрисы $\frac{AC}{CL} = \frac{AK}{KL} = \frac{37}{3}$. Тогда $CL = \frac{3}{37}AC$.

Аналогично рассмотрим $\triangle ABL$, BK — его биссектриса, тогда по свойству биссектрисы $\frac{AB}{BL} = \frac{AK}{KL} = \frac{37}{3}$. Тогда $BL = \frac{3}{37}AB$.

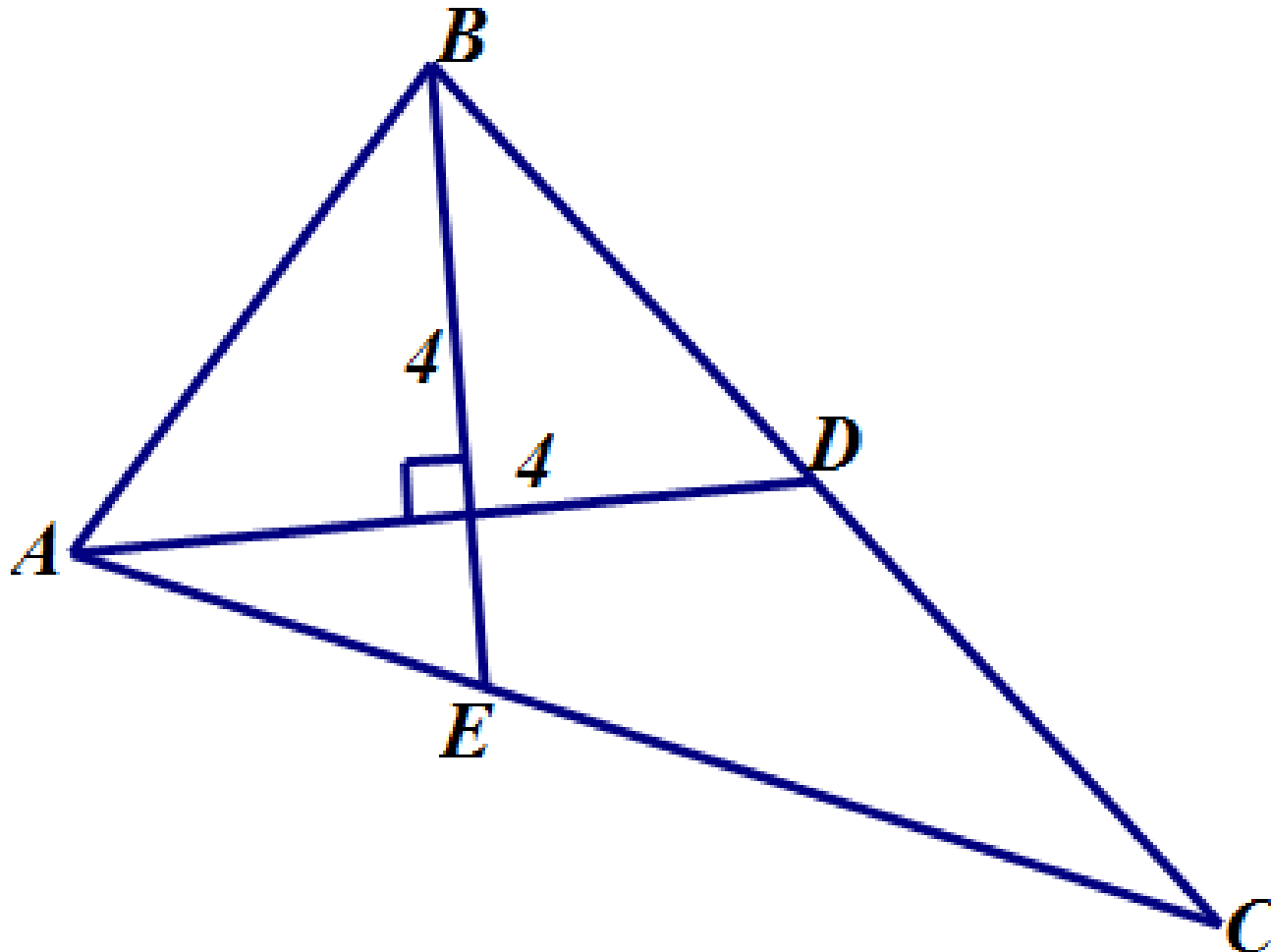
$$BC = CL + BL = \frac{3}{37}(AC + AB) = 15. \quad AC + AB = \frac{15 \cdot 37}{3} = 185.$$

Периметр треугольника ABC равен $185 + 15 = 200$.

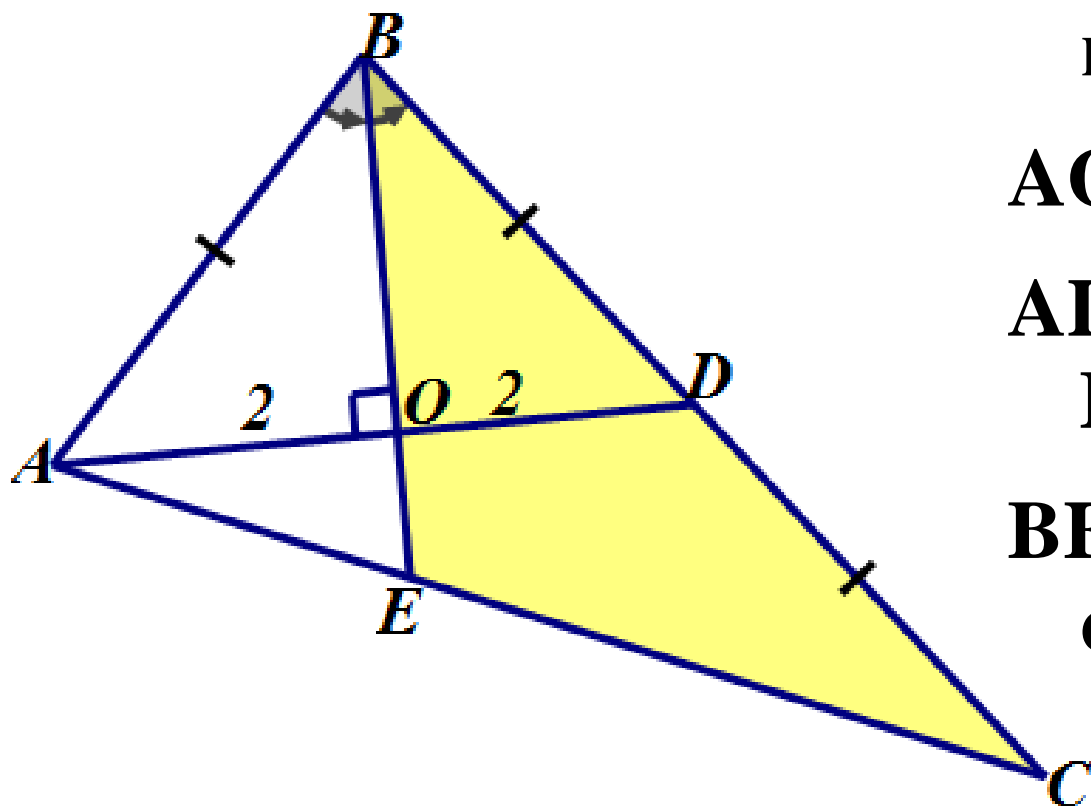
Ответ: 200.

Задача

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC .



Метод дополнительных построений



В равнобедренном $\triangle ABD$

ВО – биссектриса и
высота, значит

$AO=OD=2$,

AD – медиана $\triangle ABC$, тогда
 $BC=2AB$.

BE – биссектриса $\triangle ABC$,
следовательно, $EC=2AE$.

Проведем среднюю линию DF $\triangle BCE$. $DF=2$.
Тогда $OE=1$ как средняя линия $\triangle ADF$. $BO=3$.

$\triangle AOB$ прямоугольный.
По теореме Пифагора

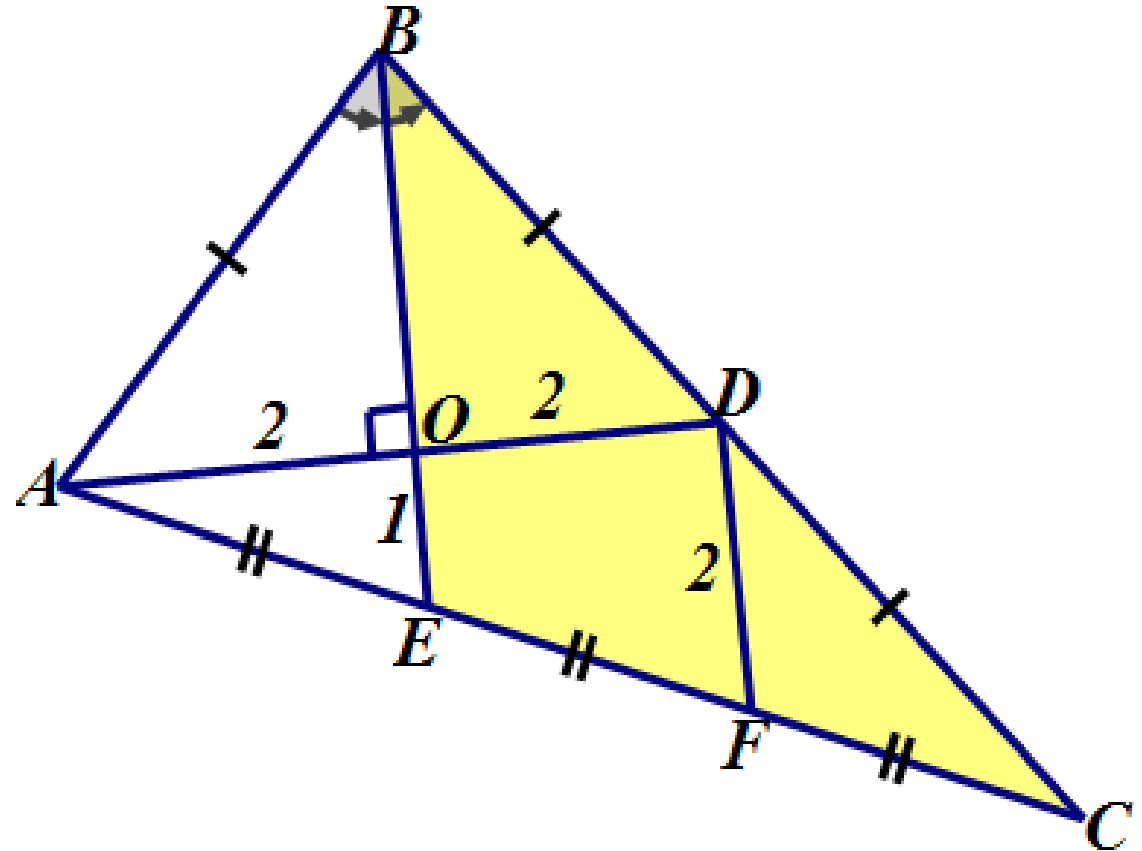
$$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2}$$

$$AB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$BC = 2\sqrt{13}$$

$$AC = 3AE.$$

$$AC = 3\sqrt{AO^2 + OE^2} = 3\sqrt{2^2 + 1^2} = 3\sqrt{5}$$



Метод площадей

$$\frac{1}{2}AO \cdot BE = S_{ABE} = S_{BDE} = 4 = S_{CDE}$$

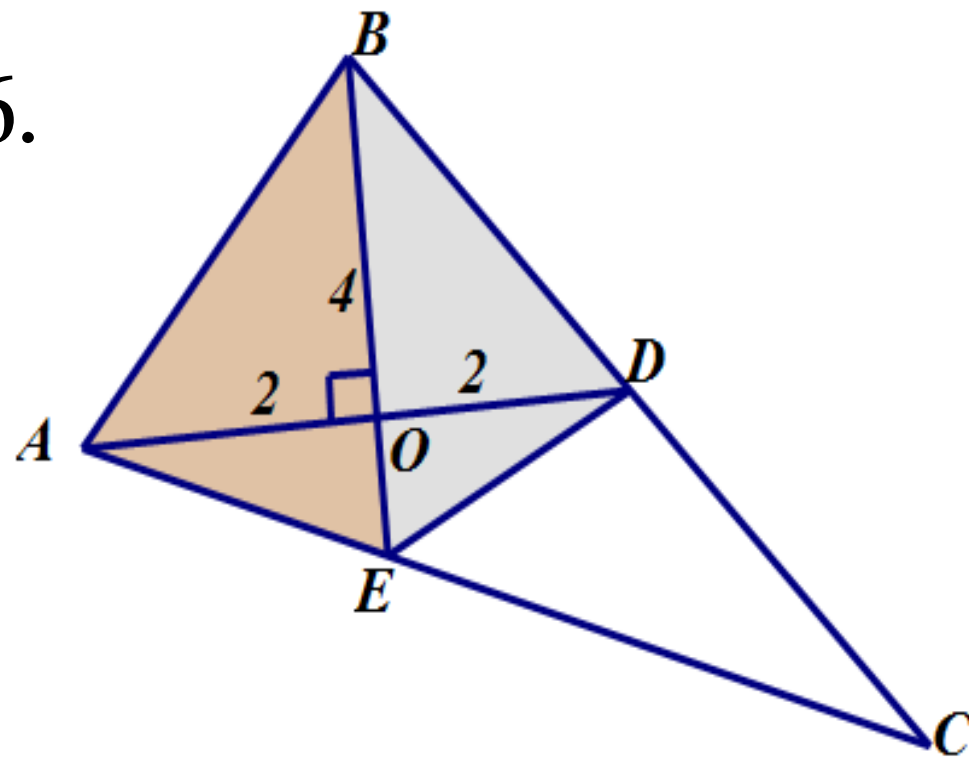
Тогда $S_{ABC} = 12$, а $S_{ABD} = 6$.

$$(S_{ABD} = S_{ADC})$$

$$6 = \frac{1}{2}AD \cdot BO, AD = 4,$$

откуда $BO = 3$.

Далее воспользуемся теоремой Пифагора для отыскания сторон треугольника ABC .



Координатный метод

Уравнение прямой AC:

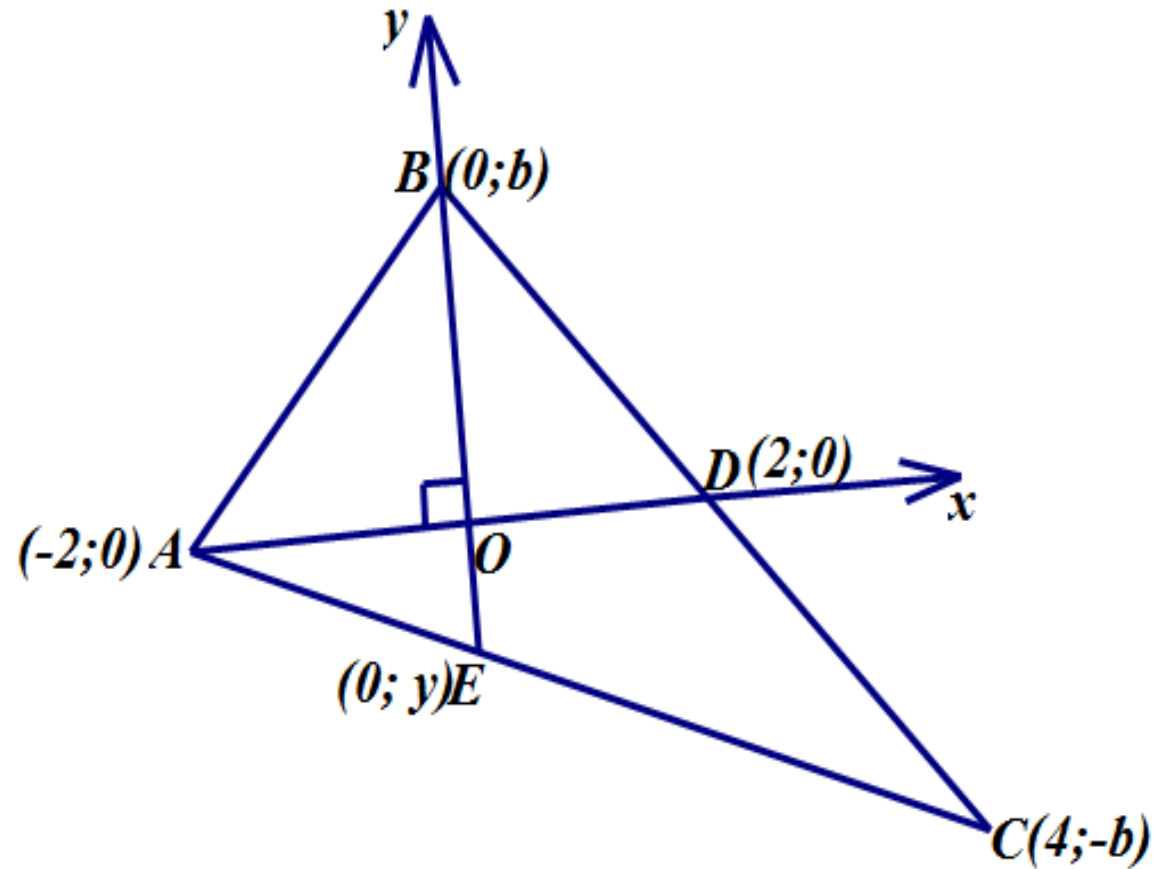
$$\frac{x-4}{-2-4} = \frac{y+b}{0+b}$$
$$y = -\frac{b}{6}x - \frac{b}{3}$$

$E \in AC$, поэтому

$E(0; -\frac{b}{3})$. $BE=4$.

$$4 = \frac{4b}{3}$$

$$b=3.$$



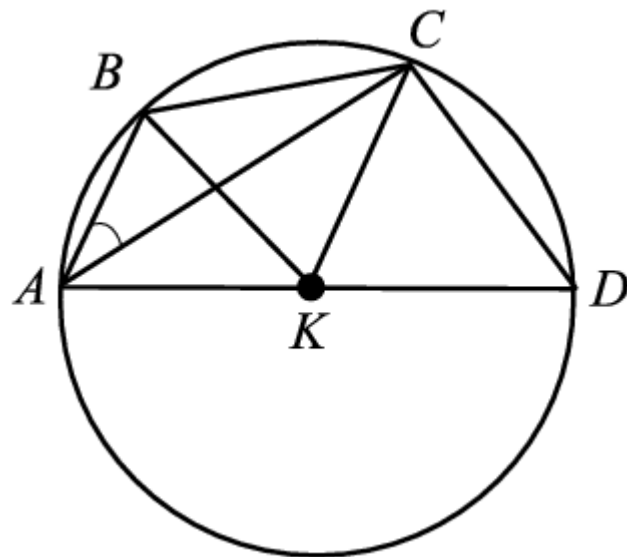
Остается найти стороны по теореме Пифагора.

21. Середина K стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD , если $BC = 14$, а углы B и C четырёхугольника равны соответственно 133° и 107° .

Решение.

Окружность с центром K и радиусом $R = AK$ описана около четырёхугольника $ABCD$, причём AD — диаметр этой окружности, $AD = 2R$. Она описана и около $\triangle BAC$,

по теореме синусов $2R = \frac{BC}{\sin \angle BAC}$.



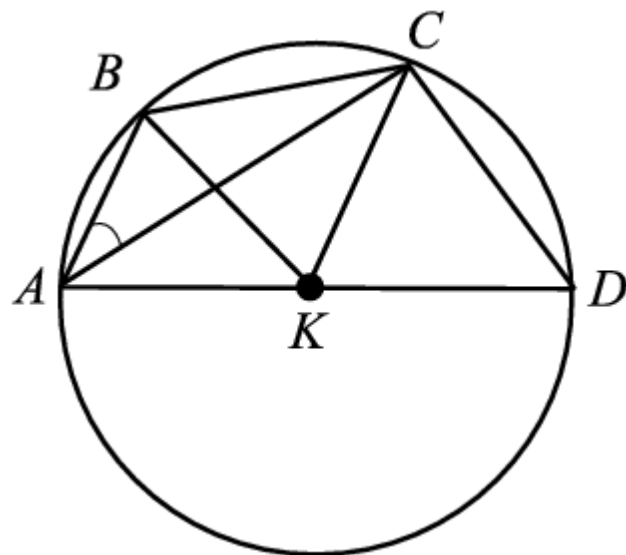
$\angle BAC$ — вписанный, поэтому $\angle BAC = \frac{1}{2} \smile BC$. Найдём $\smile BC$, используя тот факт, что $\smile BC = \smile ABD - \smile AB - \smile CD$.

Заметим, что $\angle ABC$ — вписанный, поэтому $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile ADC$, следовательно, $\smile ADC = 2\angle ABC = 2 \cdot 133^\circ = 266^\circ$. Тогда $\smile CD = \smile ADC - \smile AD = 266^\circ - 180^\circ = 86^\circ$.

Аналогично, $\angle BCD$ — вписанный, поэтому $\angle BCD = \frac{1}{2} \smile BAD$, следовательно, $\smile BAD = 2\angle BCD = 2 \cdot 107^\circ = 214^\circ$. Тогда $\smile AB = \smile BAD - \smile AD = 214^\circ - 180^\circ = 34^\circ$.

Далее, $\smile BC = \smile ABD - \smile AB - \smile CD = 180^\circ - 34^\circ - 86^\circ = 60^\circ$, $\angle BAC = \frac{1}{2} \smile BC = 30^\circ$, $AD = 2R = \frac{14}{\sin 30^\circ} = \frac{14}{\frac{1}{2}} = 28$.

Ответ: 28.



35. В треугольнике ABC на его медиане BN отмечена точка M так, что $BM : MN = 5 : 2$. Прямая AM пересекает сторону BC в точке T . Найдите отношение площади треугольника ABM к площади четырёхугольника $MTCN$.

Решение.

Выразим площадь треугольника ABM и площадь четырёхугольника $MTCN$ (см. рис. 35) через площадь треугольника ABC .

Пусть h — высота треугольника ABC , опущенная из вершины B .

$$\text{Тогда } S_{BAN} = \frac{1}{2}AN \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}AC\right) \cdot h = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}AC \cdot h\right) = \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

$$\begin{aligned} S_{ABM} &= \frac{1}{2}AB \cdot BM \sin \angle ABM = \frac{1}{2}AB \cdot \left(\frac{5}{7}BN\right) \cdot \sin \angle ABM = \\ &= \frac{5}{7}S_{ABN} = \frac{5}{14}S_{ABC}. \end{aligned}$$

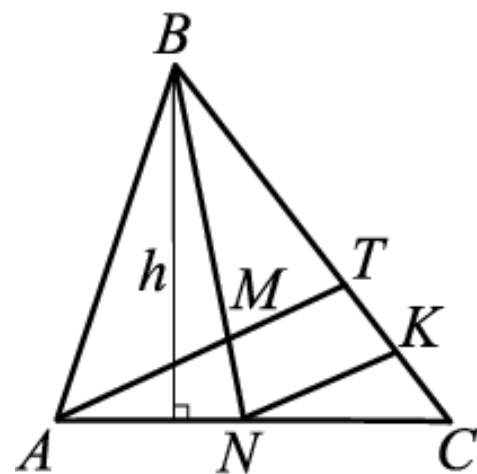


Рис. 35

Найдём площадь $MTCN$.

Проведём NK параллельно MT , точка K лежит на BC .

По теореме Фалеса $CK : KT = CN : NA$, но $CN = NA$ так как BN — медиана $\triangle ABC$. Отсюда $CK = KT$. С другой стороны по теореме Фалеса $BM : MN = BT : TK$, отсюда $BT : TK = 5 : 2$. Пусть $TK = 2x$, тогда $BT = 5x$, $KC = TK = 2x$. Следовательно, $BT = \frac{5}{9}BC$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } S_{BMT} &= \frac{1}{2} BM \cdot BT \sin \angle MBT = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{7} BN \right) \cdot \left(\frac{5}{9} BC \right) \sin \angle MBT = \\ &= \frac{25}{63} \left(\frac{1}{2} BN \cdot BC \sin \angle MBT \right) = \frac{25}{63} S_{NBC}. \end{aligned}$$

$$S_{MTCN} = S_{NBC} - S_{BMT} = \frac{38}{63} S_{NBC} = \frac{19}{63} S_{ABC}$$

$$\text{Отсюда } \frac{S_{ABM}}{S_{MTCN}} = \frac{\frac{5}{14} S_{ABC}}{\frac{19}{63} S_{ABC}} = \frac{45}{38} = 1 \frac{7}{38}.$$

Ответ: $1 \frac{7}{38}$.

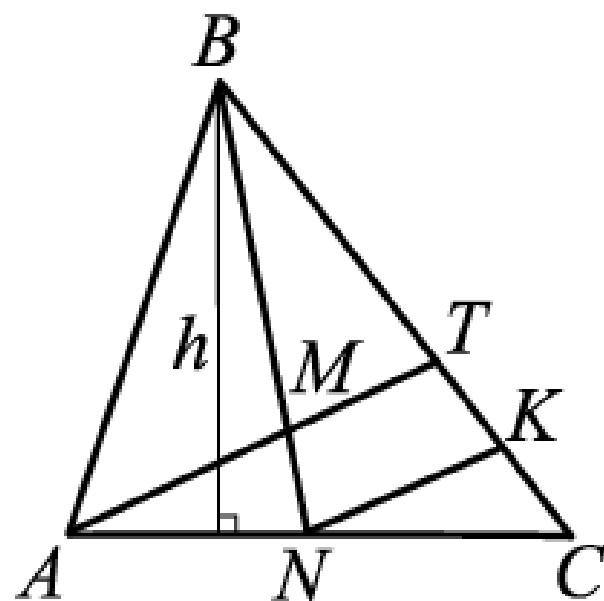


Рис. 35

30. В трапеции $KLMN$ основания KN и LM равны соответственно 80 и 10, а сумма углов при основании KN равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки K и L и касающейся прямой MN , если $KL = 56$.

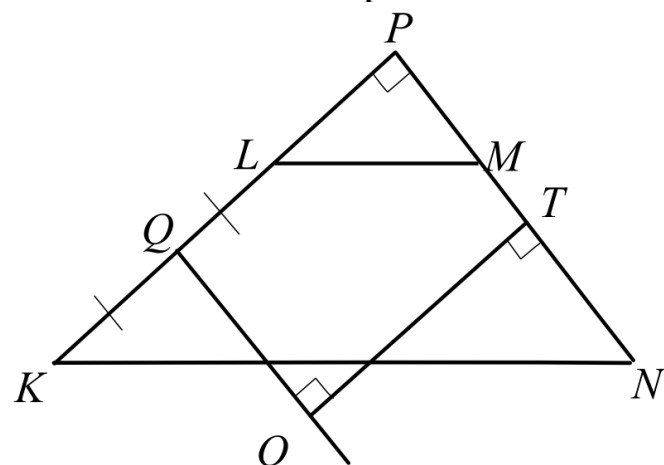
Решение. Пусть P — точка пересечения продолжений боковых сторон:

$$\angle KPN = 180^\circ - (\angle PKN + \angle PNM) = 90^\circ.$$

$\triangle PLM \sim \triangle KPN$ по двум углам.

Отсюда $\frac{KN}{LM} = \frac{PK}{PL}, \frac{80}{10} = \frac{PL + 56}{PL},$

$$\frac{PL + 56}{PL} = 8, PL = 8.$$

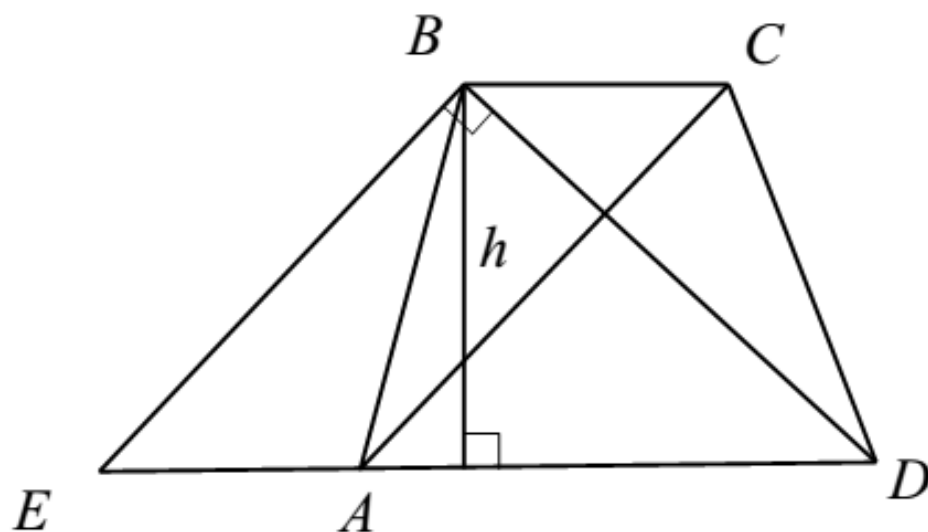


Центр O рассматриваемой окружности равноудалён от точек K и L , следовательно, он лежит на серединном перпендикуляре отрезка KL . Пусть Q — середина KL , $QL = 28$. Так как $QO \perp KP$ и $NP \perp KP$, то $QO \parallel PN$. Но окружность с центром O должна касаться стороны PN , а радиус OT , проведённый в точку касания, должен быть перпендикулярен PN , а значит, перпендикулярен OQ , то есть радиус OT равен расстоянию между параллельными прямыми QO и PN , то есть равен QP . В свою очередь, $QP = PL + QL = 36$.

Ответ: 36.

Задача

Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 30 и 16, а средняя линия равна 17.



Решение.

Обозначим трапецию $ABCD$ и пусть $AC = 16$, $BD = 30$. Тогда по формуле для длины средней линии $BC + AD = 2 \cdot 17 = 34$. Проведём через точку B прямую BE , параллельную диагонали AC и пересекающую прямую AD в точке E . Обозначим h высоту трапеции $ABCD$.

$BCAE$ является параллелограммом, так как $BC \parallel AE$ и $BE \parallel CA$. Поэтому $BE = AC = 16$, $EA = BC$, $ED = EA + AD = 34$. Треугольник BED прямоугольный по теореме, обратной теореме Пифагора, так как для его сторон $16; 30; 34$ выполняется равенство $BE^2 + BD^2 = DE^2$. Его площадь равна

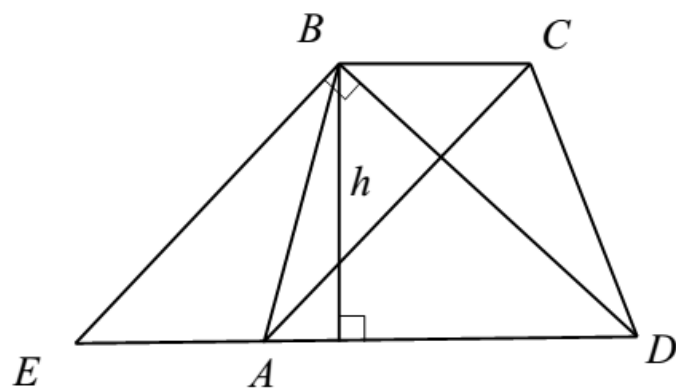
$$S_{BED} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot BD = 240.$$

С другой стороны

$$S_{BED} = \frac{1}{2} h DE = \frac{h(BC + AD)}{2} = S_{ABCD},$$

поэтому искомая площадь трапеции $ABCD$ равна 240.

Ответ: 240.



37. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 8, а площадь равна $8\sqrt{3}$.

Решение.

Обозначим катеты прямоугольного треугольника через a и b , а гипотенузу c (см. рис. 37). Тогда его площадь равна $\frac{1}{2}ab$, откуда $\frac{1}{2}ab = 8\sqrt{3}$,

$$b = \frac{16\sqrt{3}}{a}.$$

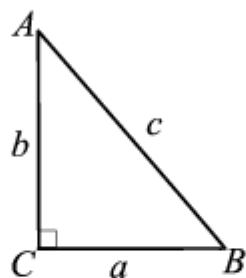


Рис. 37

По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$, следовательно, $64 = b^2 + \frac{768}{b^2}$, $b^4 - 64b^2 + 768 = 0$. Пусть $b^2 = t$, тогда $t^2 - 64t + 768 = 0$, $t_{1,2} = 32 \pm \sqrt{32^2 - 768} = 32 \pm \sqrt{256} = 32 \pm 16$, $t_1 = 48$, $t_2 = 16$. При $t = 48$ получим $b = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ и $a = \frac{16\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 4$. При $t = 16$ получим

$$b = \sqrt{16} = 4 \text{ и } a = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}.$$

Заметим, что в обоих случаях катеты равны 4 и $4\sqrt{3}$. Для определённости будем считать, что $a = 4$, $b = 4\sqrt{3}$. Тогда $\sin \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\angle A = 30^\circ$. $\angle B = 90^\circ - \angle A = 60^\circ$.

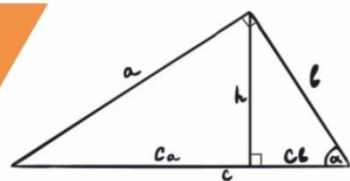
Ответ: $30^\circ, 60^\circ$.



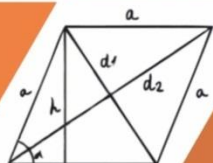
Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

ОГЭ

ГЕОМЕТРИЯ



$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= c^2 & h^2 &= ca \cdot cb \\a^2 &= ca \cdot c & b^2 &= cb \cdot c \\ \sin \alpha &= \frac{a}{c} & \cos \alpha &= \frac{b}{c} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}S &= a^2 = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \\d_1^2 + d_2^2 &= 4a^2\end{aligned}$$



**Задачи
с развёрнутым ответом
9 класс**

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.О. Иванова

ОГЭ

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ОГЭ-2017



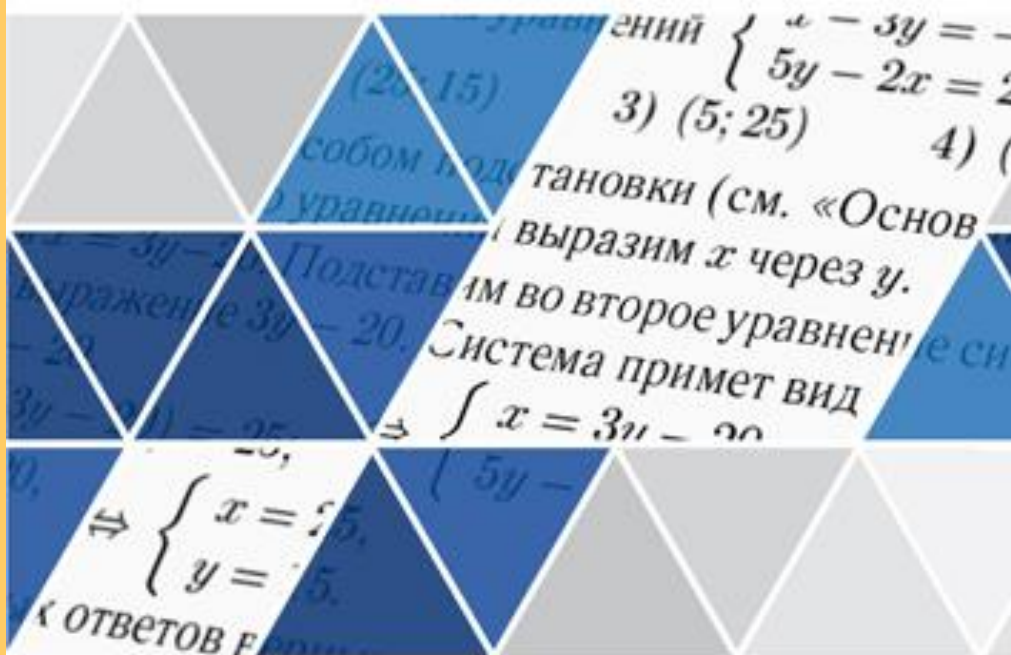
**40 тренировочных
вариантов**

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

ОГЭ

МАТЕМАТИКА

ОГЭ-2017



Тематический тренинг
9 класс

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

ОГЭ

МАТЕМАТИКА

ТРЕНАЖЁР ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ ОГЭ-2017



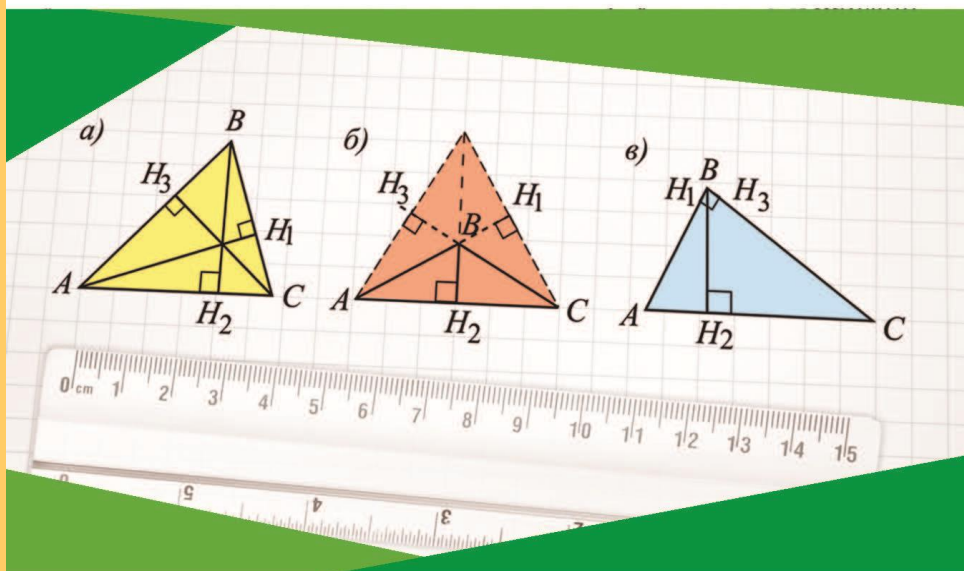
Алгебра. Геометрия
Реальная математика
9 класс

Под редакцией
Ф. Ф. Лысенко,
С. Ю. Кулабухова

7
класс

ГЕОМЕТРИЯ

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ



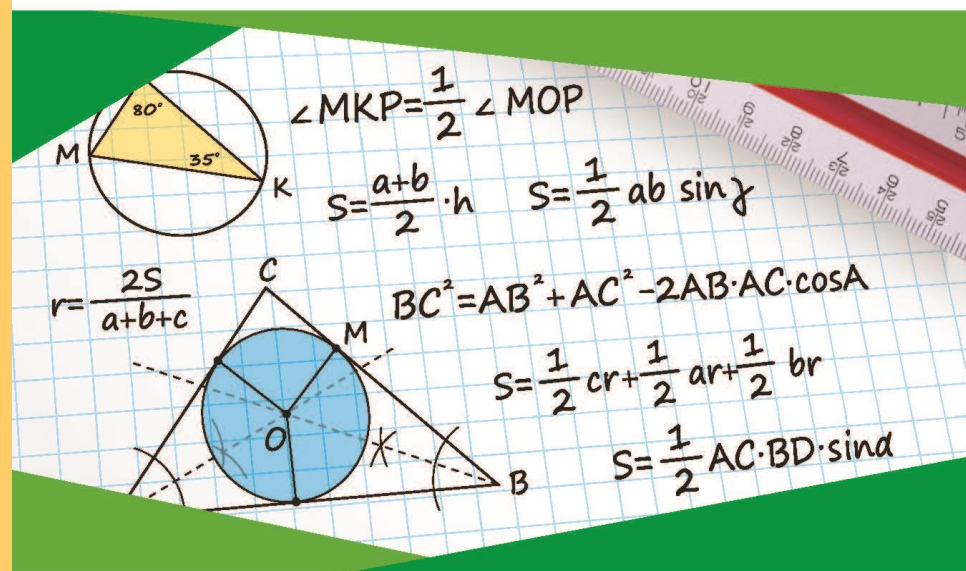
**Тетрадь для тренировки
и мониторинга**

Под редакцией
Ф. Ф. Лысенко,
С. Ю. Кулабухова

8
класс

ГЕОМЕТРИЯ

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ

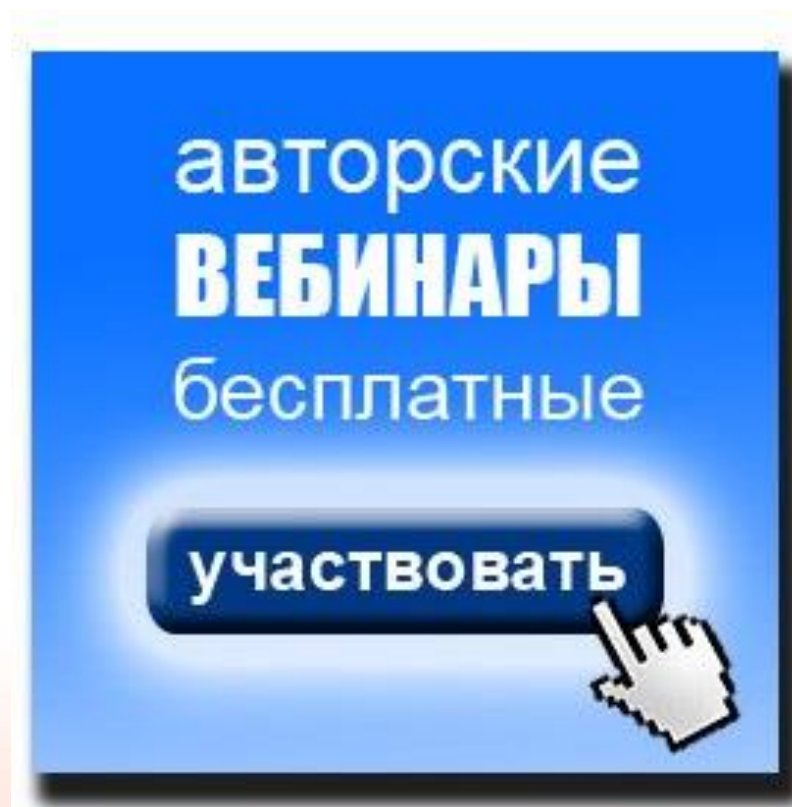


**Тетрадь для тренировки
и мониторинга**

Книги можно заказать в нашем
интернет-магазине на сайте:
www.legionr.ru

Спрашивайте
в книжных магазинах города!

Издательство
регулярно проводит
онлайн-семинары
авторов пособий с
педагогами. По
завершении каждого
вебинара участники
получают электронные
сертификаты. Ссылки
для участия вы
сможете найти на сайте
издательства
www.legionr.ru



*Все вебинары
издательства «Легион»
носят обучающий характер*

legionrus@legionrus.com

Вступайте в группу

«Издательство «Легион»

В контакте, на  одноклассниках
и в сети  facebook.

Видео вебинаров смотрите на



**Адрес для корреспонденции:
344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550**

Спасибо за внимание!