



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН
www.legionr.ru

Приказом Минобрнауки РФ №729 от 14.12.2009
пособия издательства «Легион» допускаются к использованию
в общеобразовательных учреждениях

Ростов-на-Дону
(863) 303-05-50

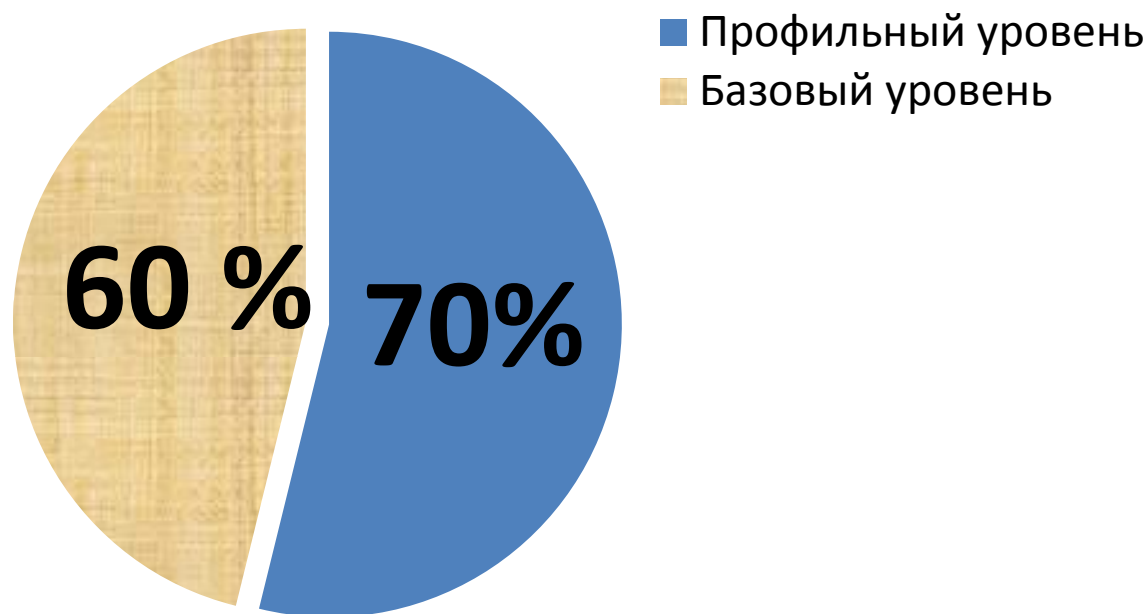
Методы решения геометрических задач повышенного уровня сложности в ЕГЭ и ОГЭ по математике

Фридман Елена Михайловна



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН
www.legionr.ru

Участники ЕГЭ 2015 по математике в процентном отношении



Максимальное количество баллов получили:

- ✓ **профильный уровень (100 баллов) - 66 человек,**
- ✓ **базовый уровень (5 баллов) - 29,5 %**

Задачи повышенного уровня сложности по геометрии в ЕГЭ

№ задания	% получивших максимальный балл
16 (стереометрия)	7
18 (планиметрия)	1

Трудности решения геометрических задач обусловлены как объективными, так и субъективными факторами, среди которых

- ✓ **Неалгоритмичность задач**
- ✓ **Необходимость выбора метода решения задачи и теоремы для решения конкретной задачи (нескольких теорем) из большого набора известных фактов**
- ✓ **Нужно решить довольно много задач (чтобы научиться их решать) за небольшое время**

Необходимые условия успеха при решении задач по геометрии

- ✓ Уверенное владение основными понятиями и их свойствами (аксиомы, определения, теоремы, базовые задачи);
- ✓ Знание основных методов и приемов решения задач;
- ✓ Умение комбинировать методы и приемы решения задач;
- ✓ Наличие опыта решения задач.



Основные методы решения геометрических задач

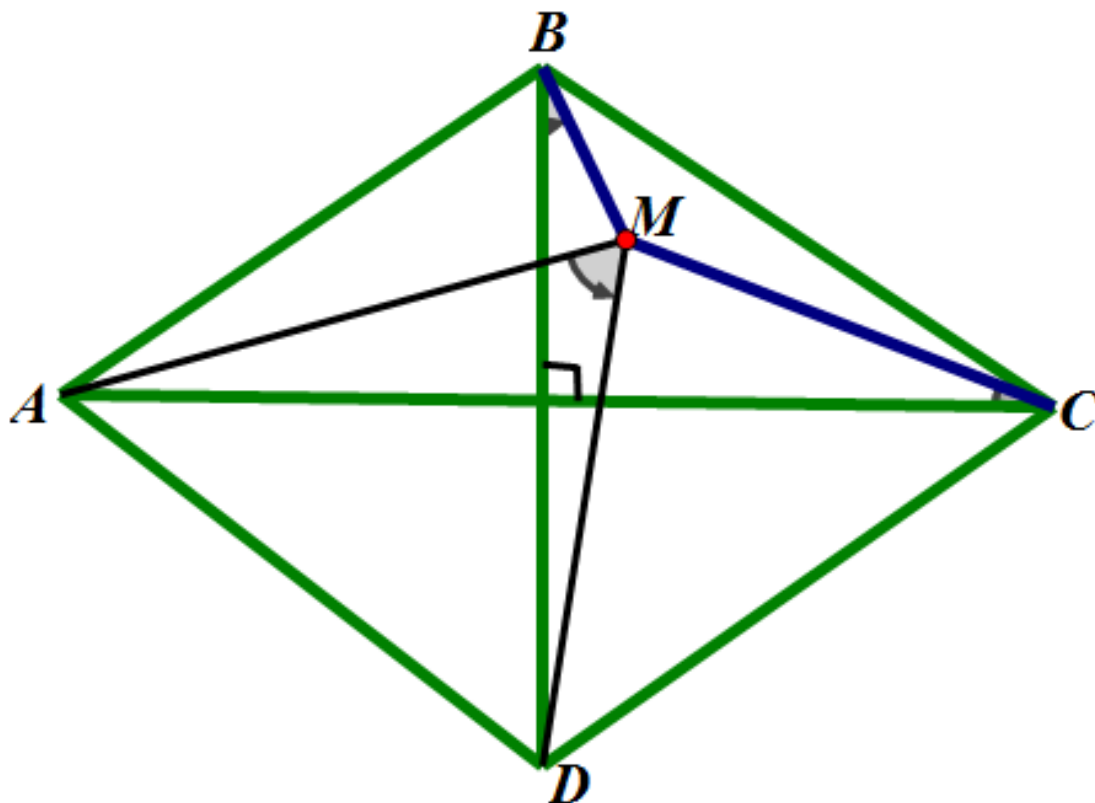
- ✓ Метод дополнительных построений
- ✓ Метод геометрических преобразований
- ✓ Метод подобия
- ✓ Метод площадей
- ✓ Метод вспомогательной окружности
- ✓ Метод геометрического видения
- ✓ Метод координат
- ✓ Векторный метод

Метод дополнительных построений

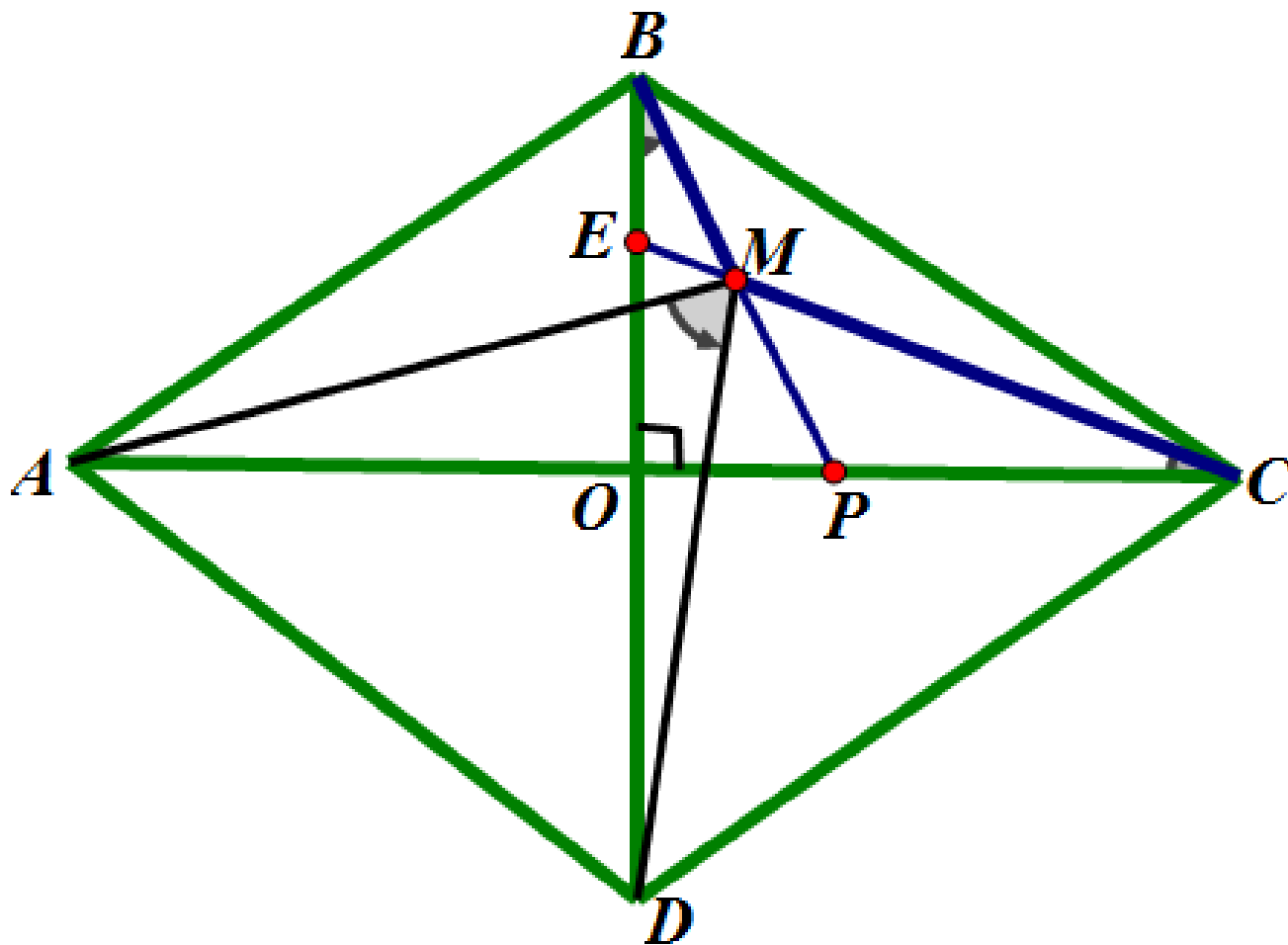
Разновидности:

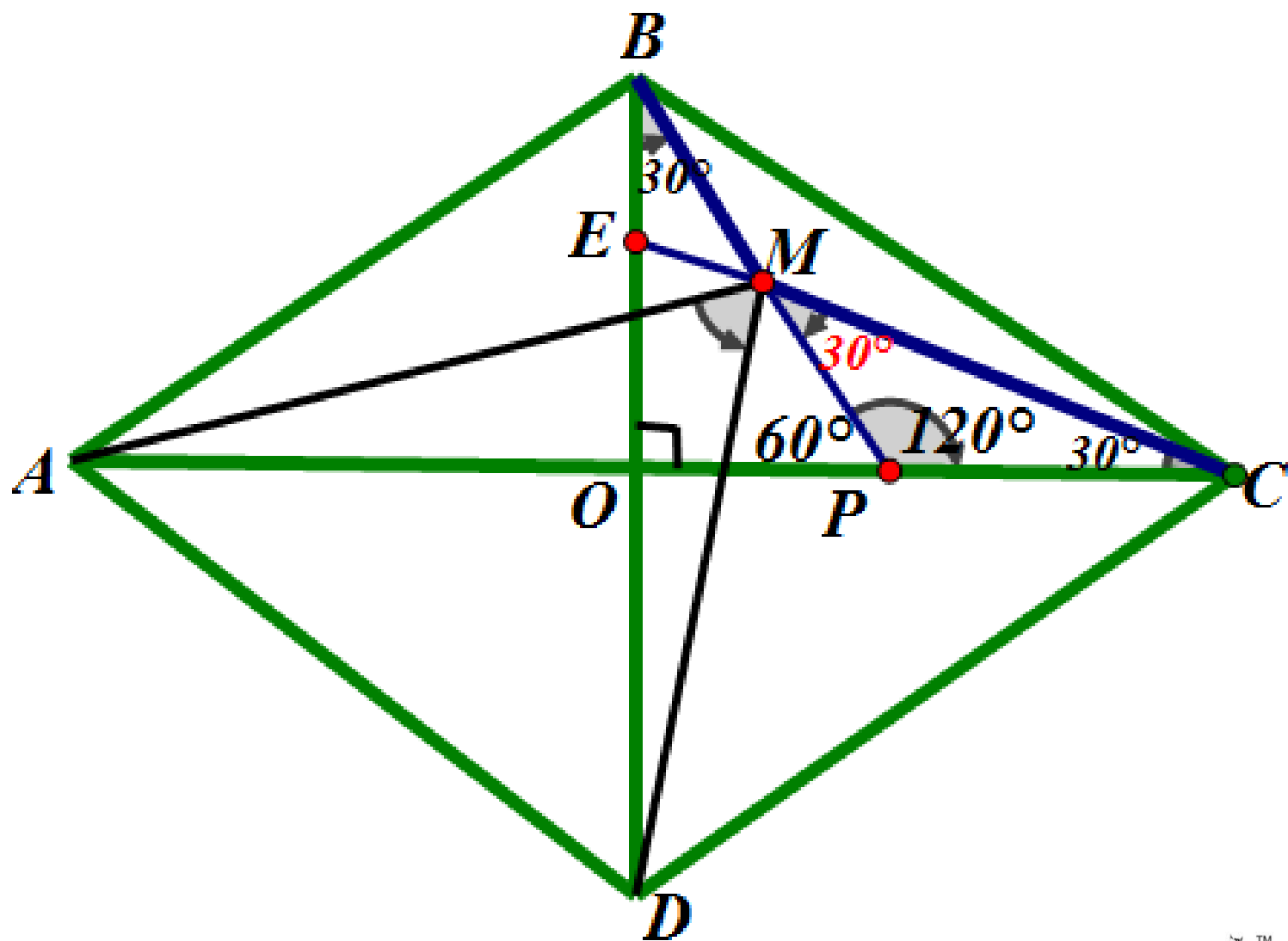
- Продолжение отрезка (отрезков) на определенное расстояние или до пересечения с заданной прямой (прямыми).
- Проведение прямой через две заданные точки.
- Проведение через заданную точку прямой, параллельной данной прямой, или перпендикулярной данной прямой.

Внутри ромба $ABCD$ находится точка M такая, что $\angle MBD = \angle MCA = 30^\circ$ и отрезки MB и MC не пересекают диагонали ромба. Найдите $\angle AMD$.

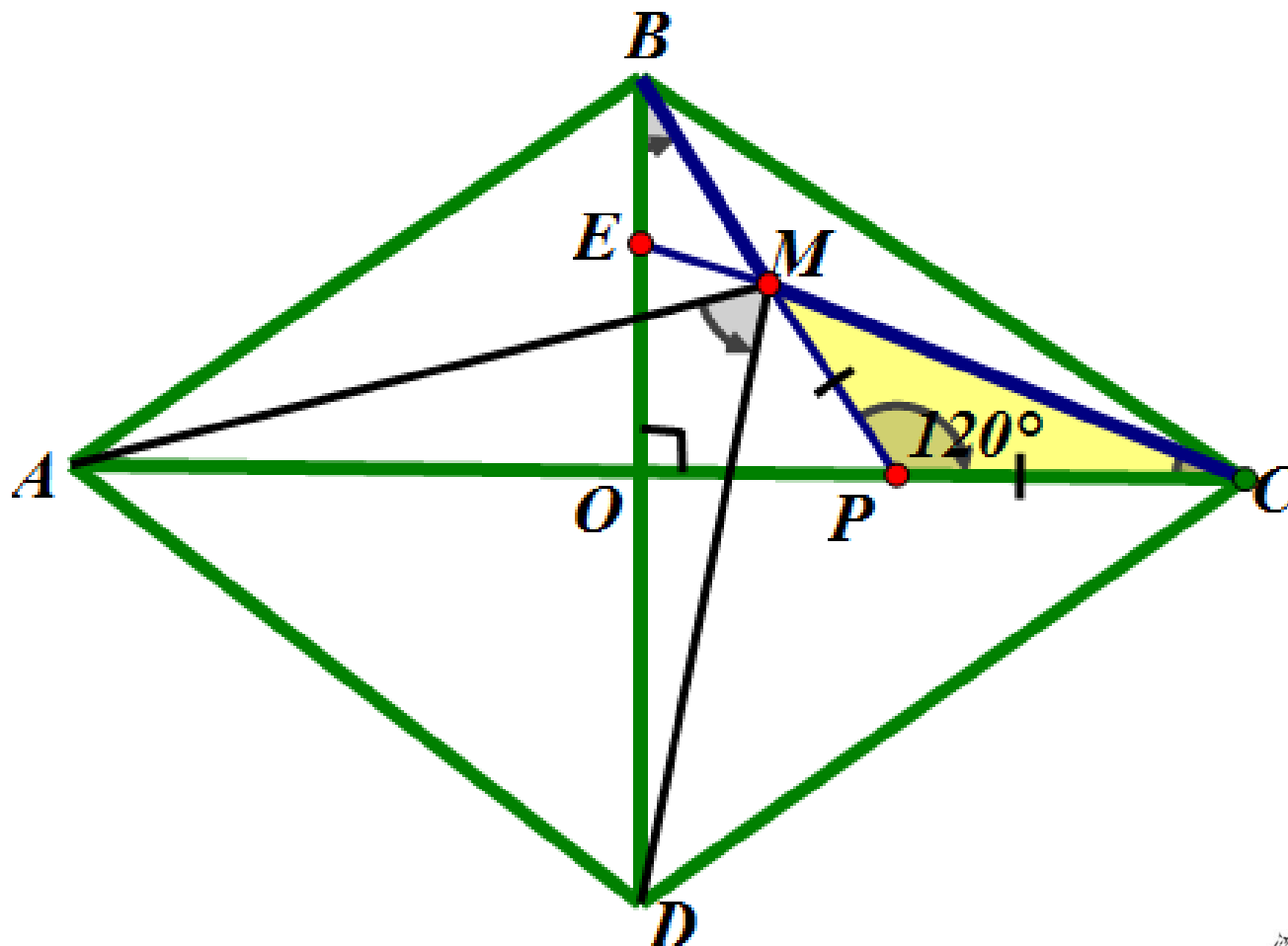


Продолжим MC и MB до пересечения с диагоналями. Получим точки E и P .

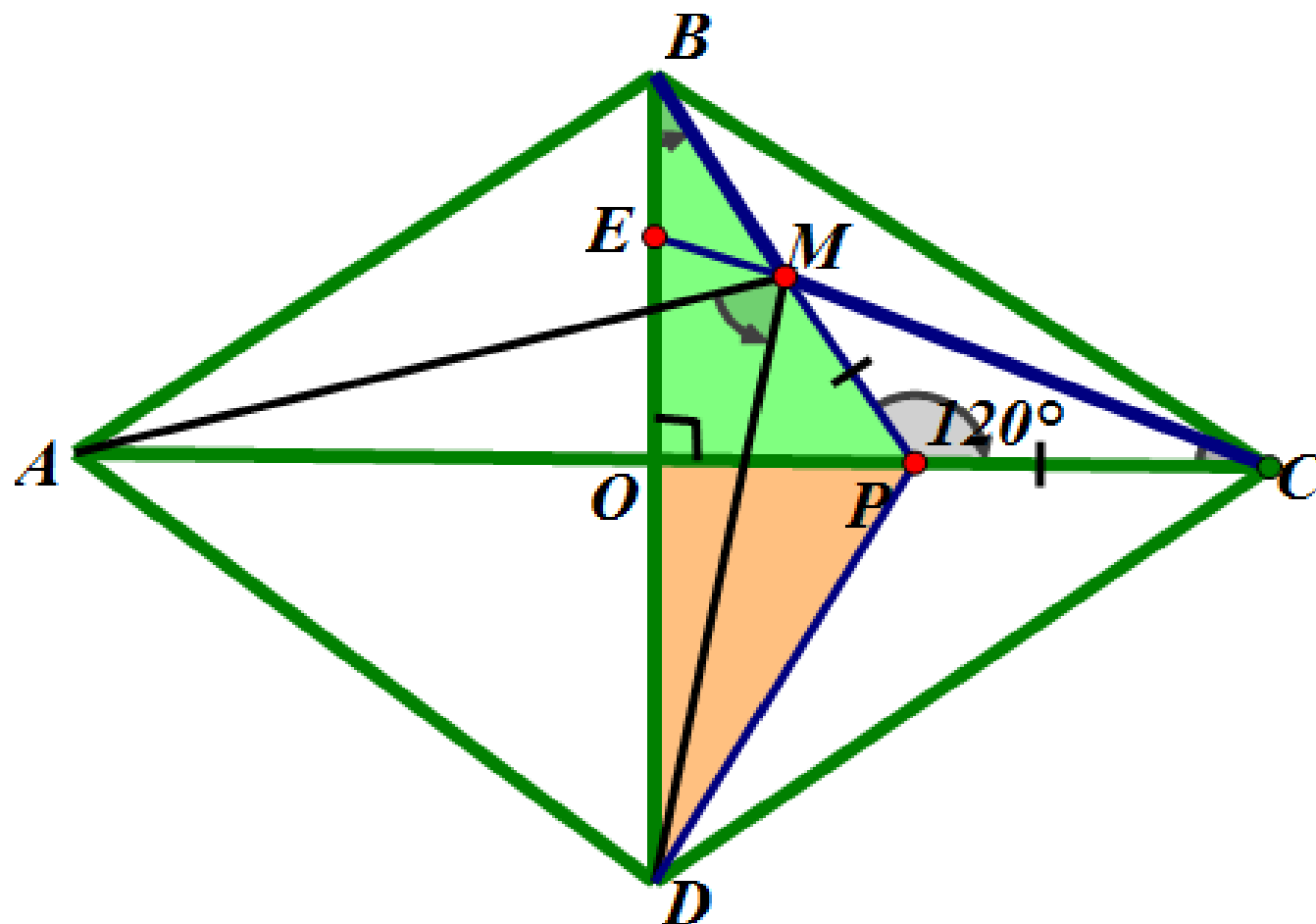


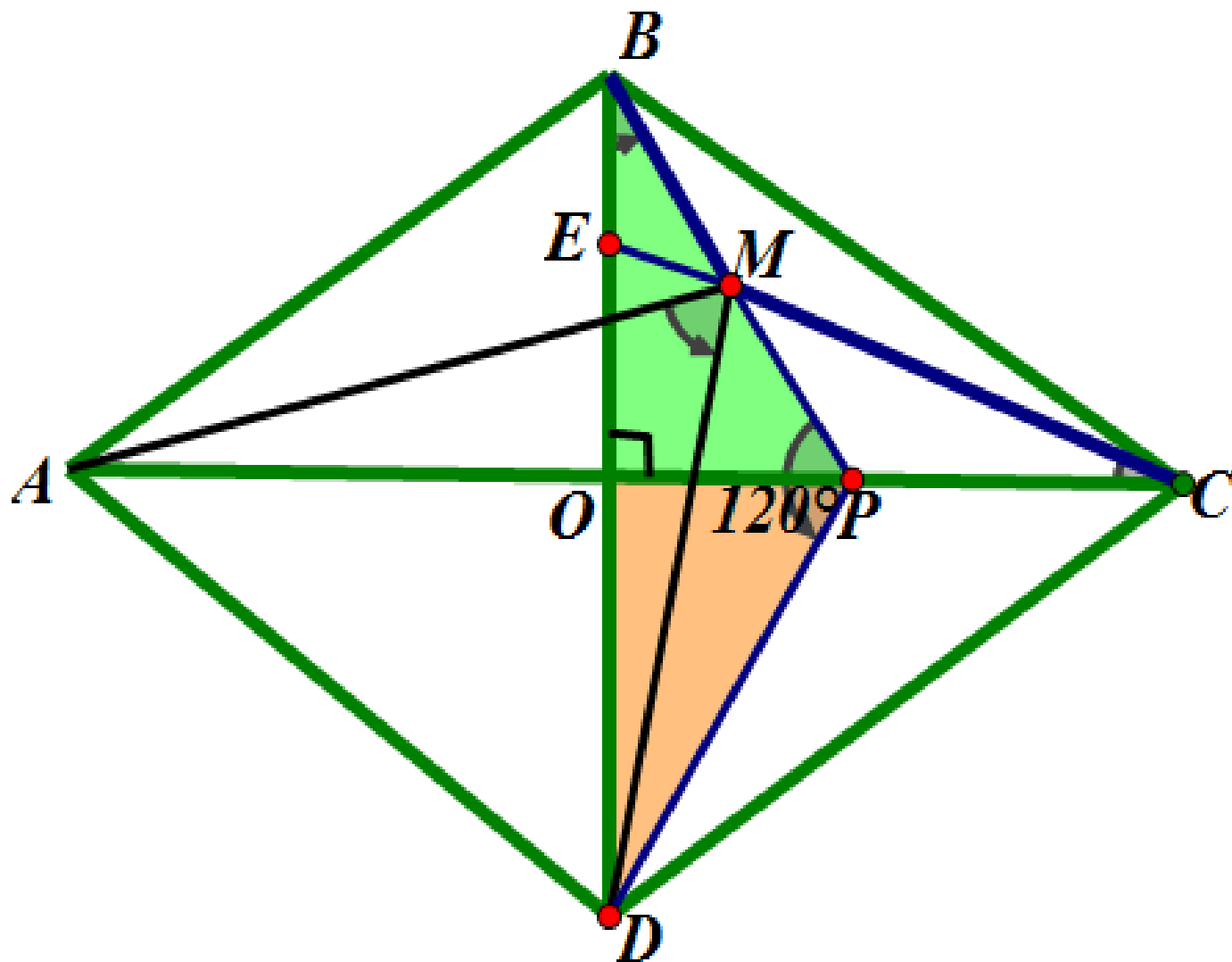


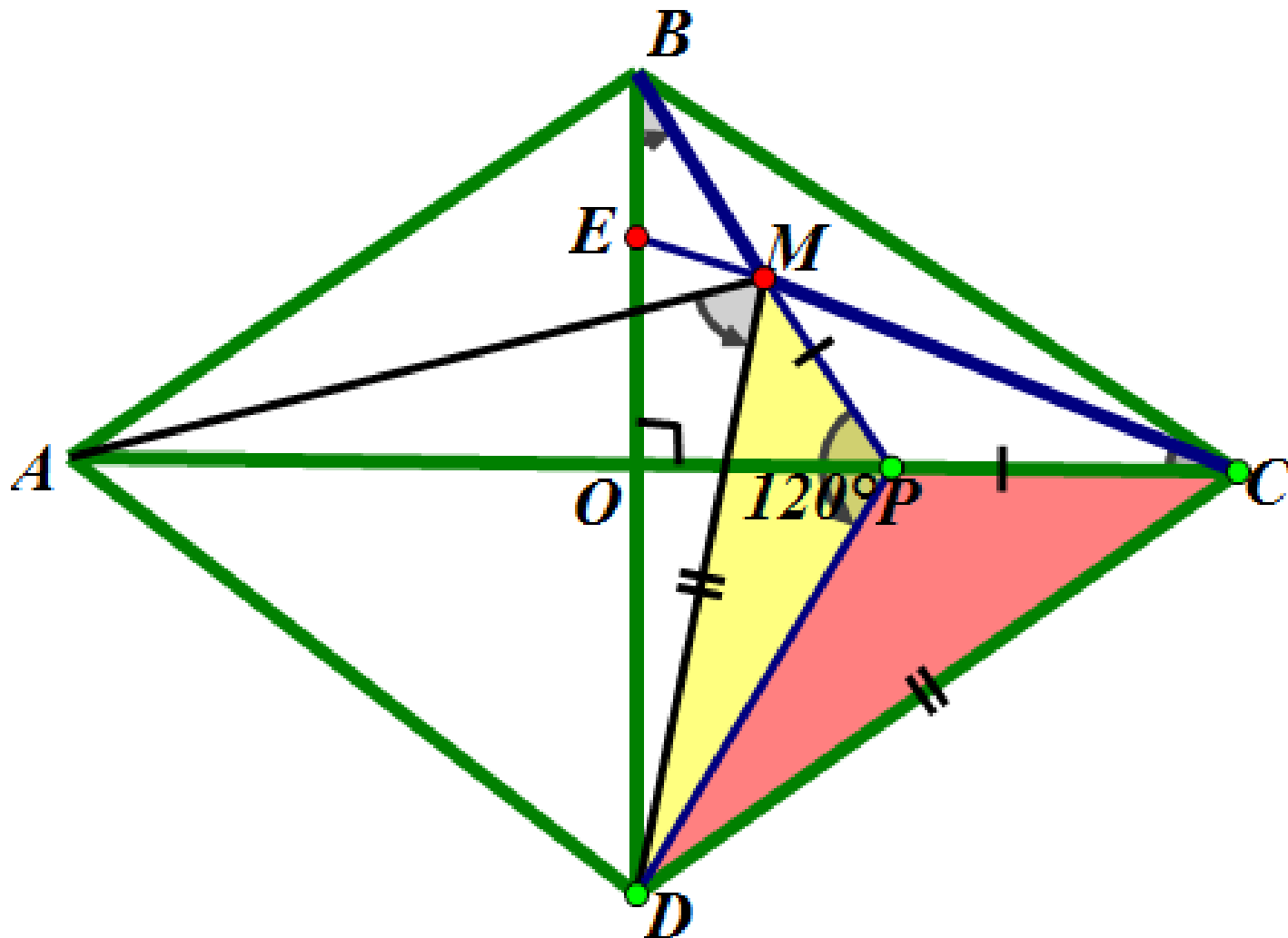
Треугольник $СМР$ равнобедренный,
значит, $МР=РС$



$$\angle BPO = \angle DPO = 60^\circ$$







Аналогично доказываем равенство $AB=AM$.
Итак, $\triangle AMD$ правильный, угол AMD равен 60° .

Задача №24 («Легион» ОГЭ)

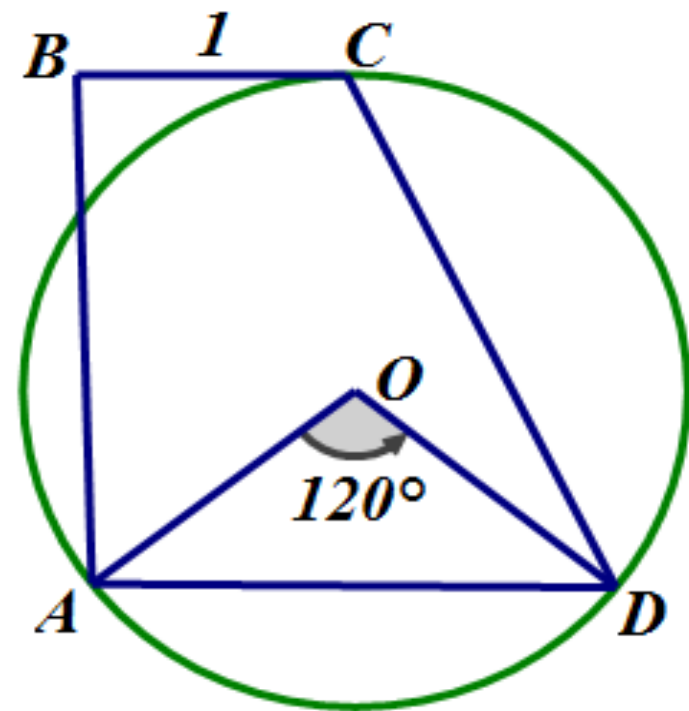
ABCD - прямоугольная трапеция с прямым углом A и меньшим основанием $BC=1$. Окружность с центром в точке O касается прямой BC в точке C и проходит через точки A и D, угол AOD равен 120° . Найдите длину стороны AB, если известно, что она больше радиуса окружности.

Дано: $ABCD$ –
трапеция,
 $\angle A = 90^\circ$, $BC = 1$,
 BC - касательная,
 $\angle AOD = 120^\circ$

O - центр окружности,
 AD - хорда

$AB > AO$.

Найти: AB



Решение.

$CO \perp BC$, $CH \parallel AB$,

$$AH=BC=1,$$

$\triangle AOD$ равнобедренный,

$$(AO=OD), AH=HD=1,$$

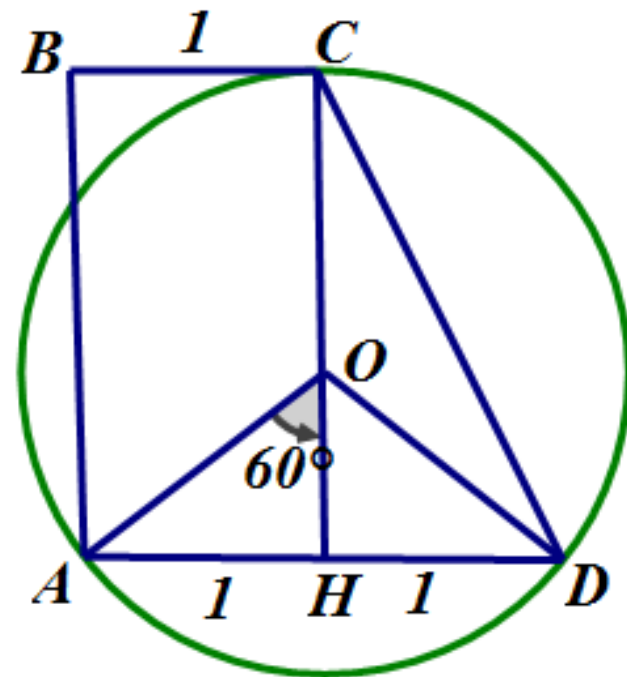
$$\angle AOH=60^\circ$$

В прямоугольном
треугольнике AOH

$$AO = \frac{AH}{\sin 60^\circ} = 1 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$OH = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$AB = CH = CO + OH = AO + CH = \sqrt{3}$$



Ответ: $\sqrt{3}$

Задача 14 ЕГЭ

(вариант 5 «Легион» 2015)

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник со сторонами $AB=12$, $BC=5$, $SA=3\sqrt{3}$, $SB=\sqrt{171}$, $SD=2\sqrt{13}$.

- а) Докажите, что SA – высота пирамиды;**
- б) Найдите угол между SC и BD .**

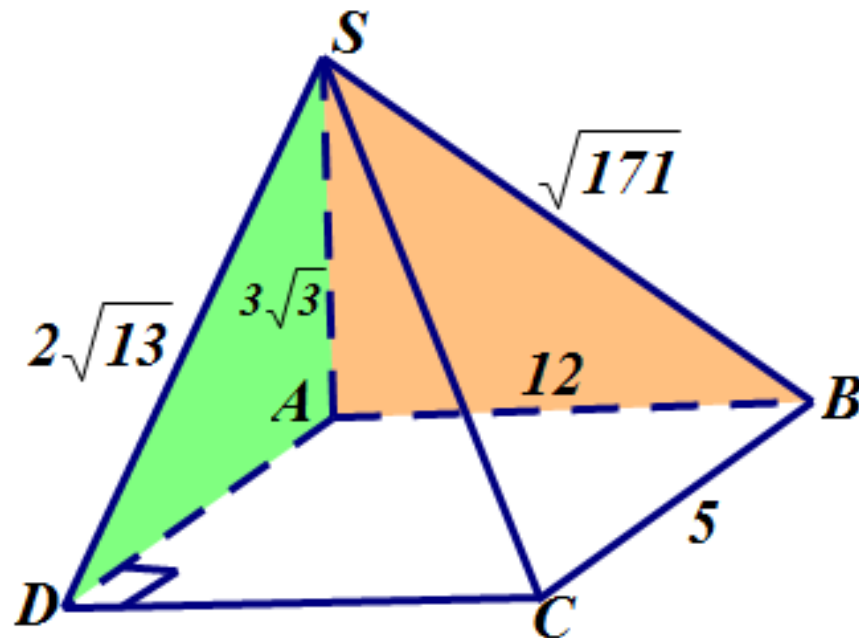
а) $SA \perp ABC$?

Решение.

Т.к. $SA^2 + AD^2 = SD^2$

и $SA^2 + AB^2 = SB^2$, то

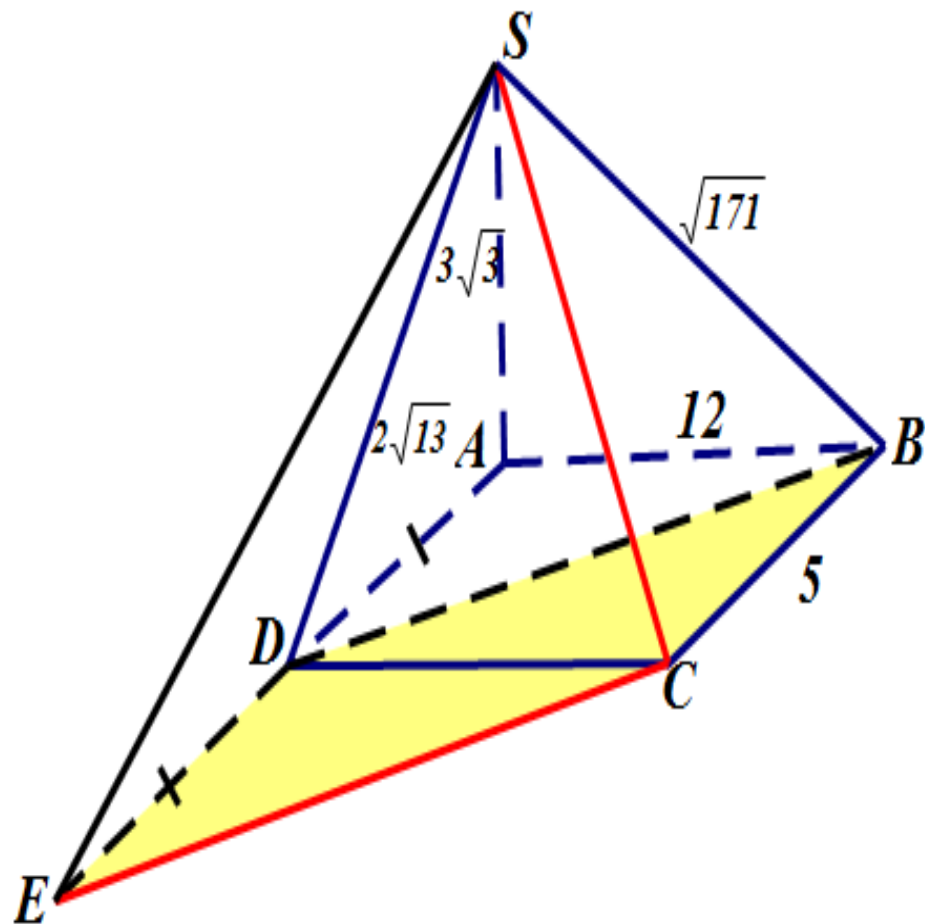
$SA \perp AB, SA \perp AD \Rightarrow SA \perp ABC$



б) Угол между BD и SC ?

На прямой AD отложим отрезок $DE=AD$. Тогда $BCED$ -параллелограмм.

Т.к. $BD \parallel CE$, то угол между BD и SC равен углу между CE и SC .

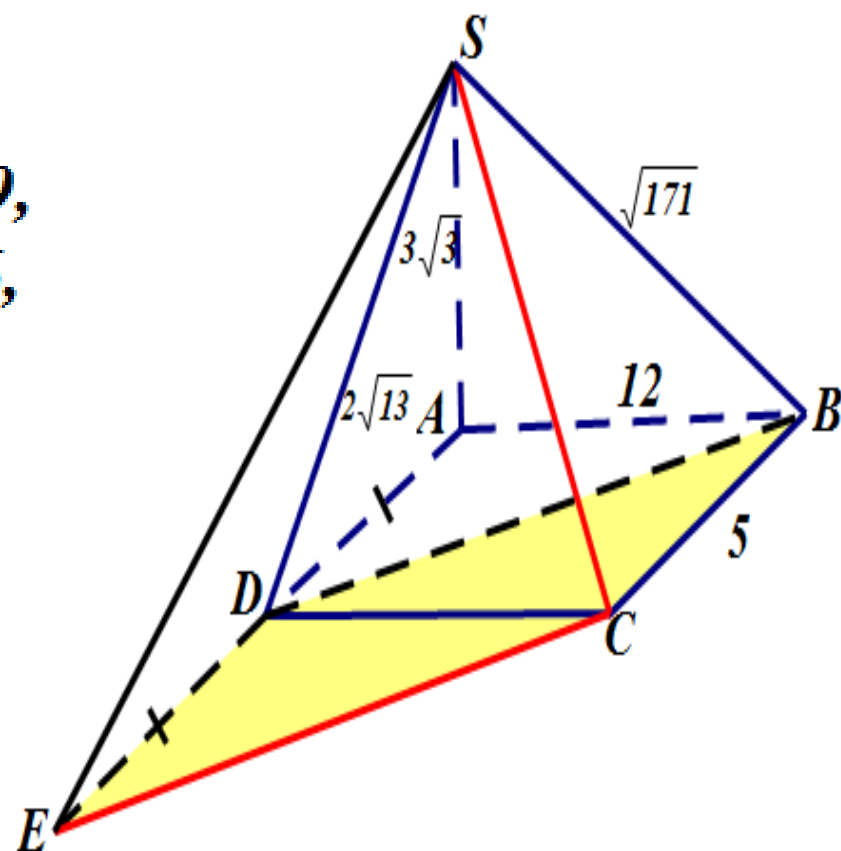


$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 144 + 25 = 169,$$

$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = 27 + 169 = 196,$$

$$SE^2 = SA^2 + AE^2 = 27 + 100 = 127.$$

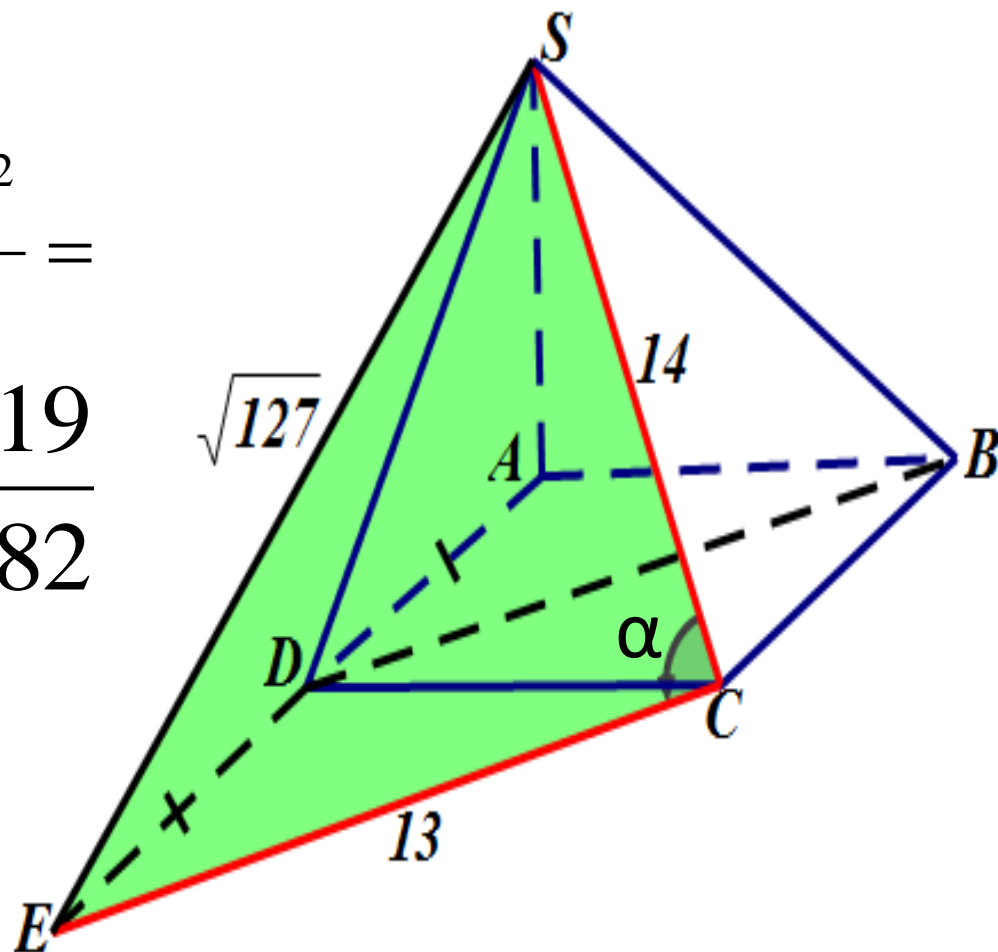
$$BD = CE = 13, SC = 14, SE = \sqrt{127}.$$



$$SE^2 = SC^2 + CE^2 - 2SC \cdot CE \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{SC^2 + CE^2 - SE^2}{2SC \cdot CE} = \\ &= \frac{196 + 169 - 127}{2 \cdot 13 \cdot 14} = \frac{119}{182} \end{aligned}$$

$$\alpha = \arccos \frac{119}{182}$$

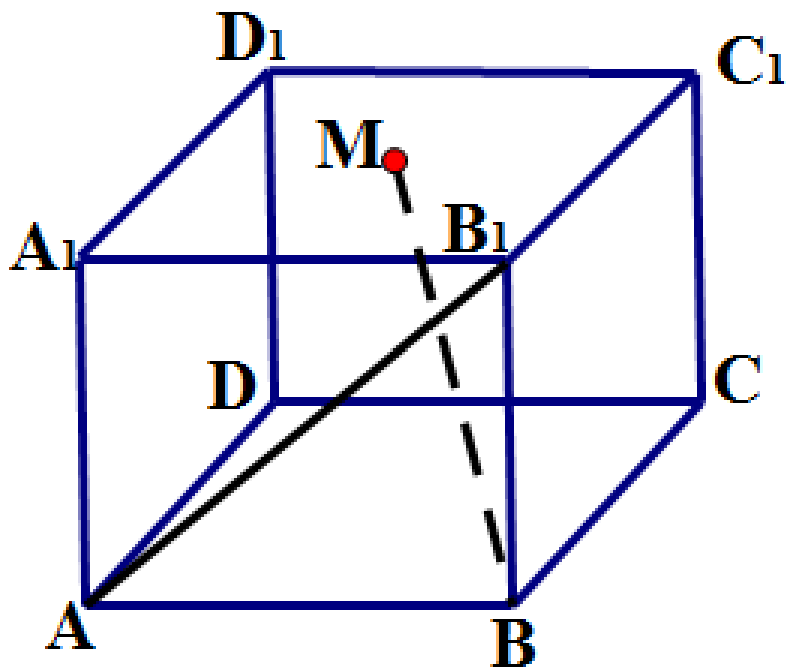


Задание 14 («Легион» ЕГЭ)

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 2 точка M – середина отрезка $A_1 C_1$.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через прямую MB , параллельно прямой AB_1

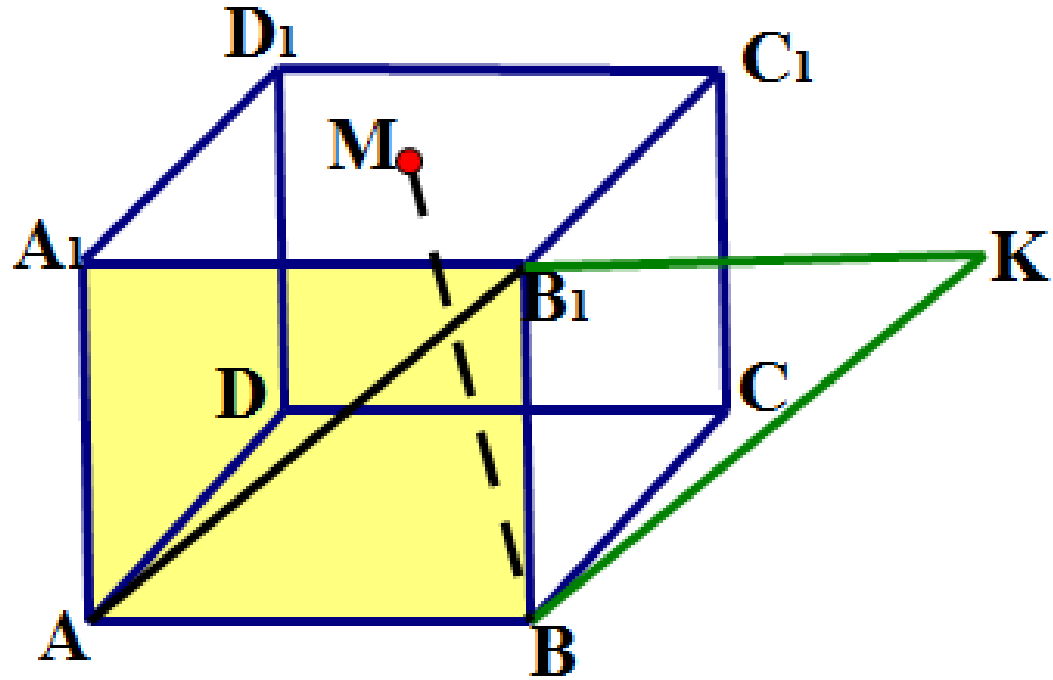
б) Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BM .



Решение.

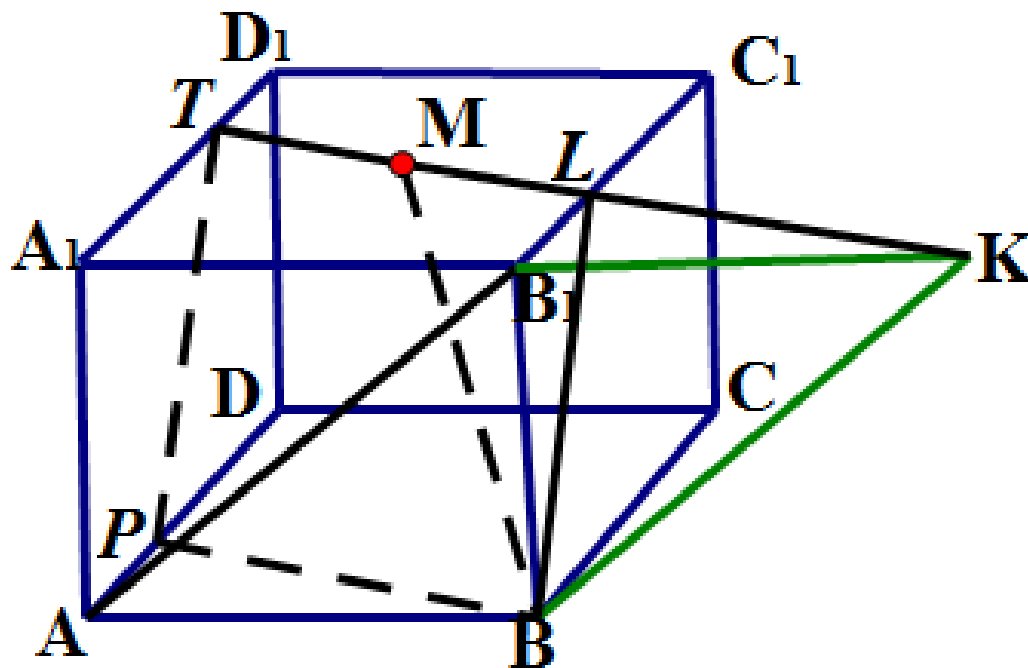
а) В плоскости грани AA_1B_1B
построим отрезок $BK \parallel AB_1$.

$AB_1 \parallel BMK$.

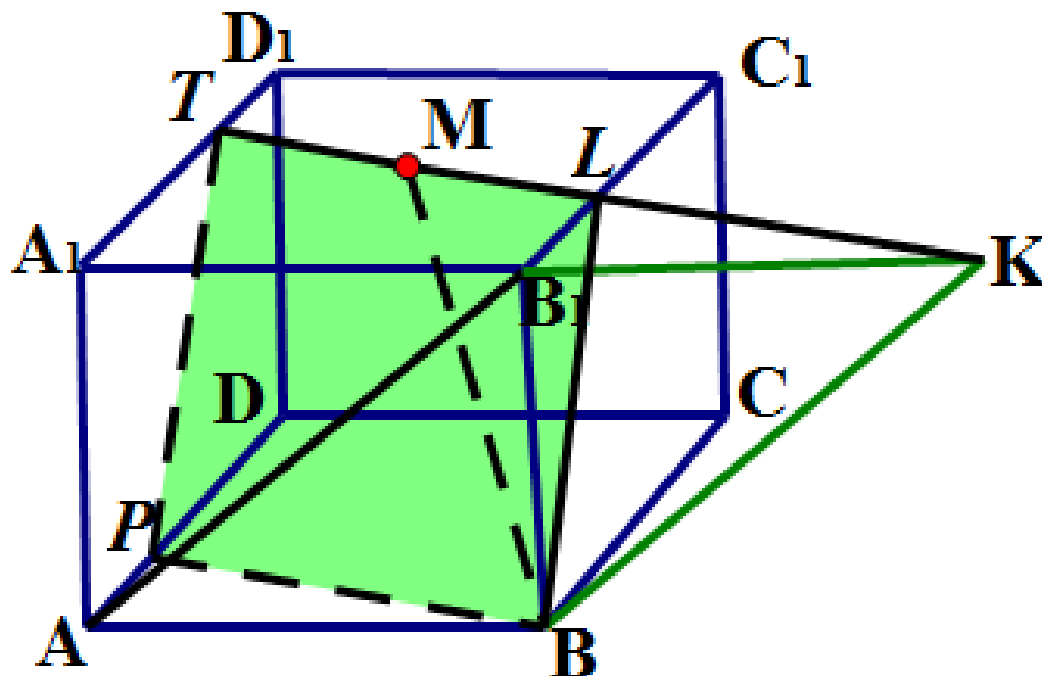


Прямая MK пересекает ребро B_1C_1 в точке L , ребро A_1D_1 в точке T .

BL – линия пересечения плоскости сечения с гранью BB_1C_1C , $PT \parallel BL$.

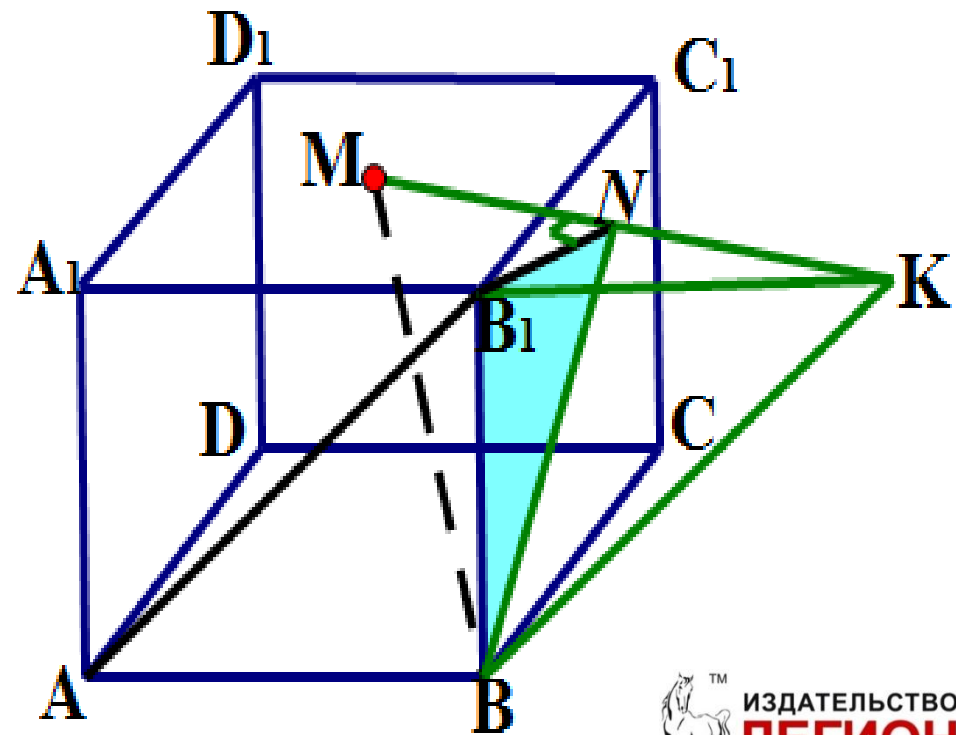


ВЛТР- искомое сечение: $BM \in \text{ВЛТР}$
 $AB_1 \parallel \text{ВЛТР}$



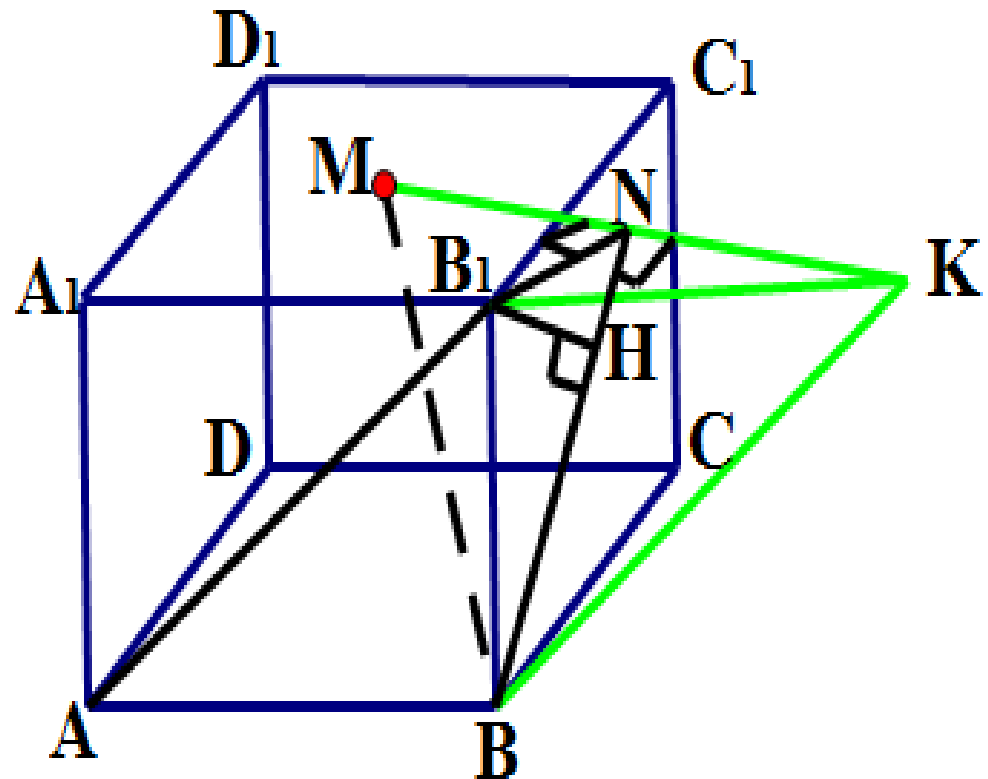
б) 1. В плоскости $A_1B_1C_1$ проведем $B_1N \perp MK$, тогда, $BN \perp MK$ как наклонная к плоскости $A_1B_1C_1$, проекция которой $B_1N \perp MK$ по построению.

2. $BB_1N \perp MK$,
следовательно,
любая прямая
плоскости BB_1N
перпендикулярна
прямой MK .



3. Проведем отрезок $B_1H \perp BN$. Длина этого отрезка – искомое расстояние.

B_1H перпендикулярен
двум
пересекающимся
прямым (BN и MK)
плоскости BMK ,
параллельной AB_1 .



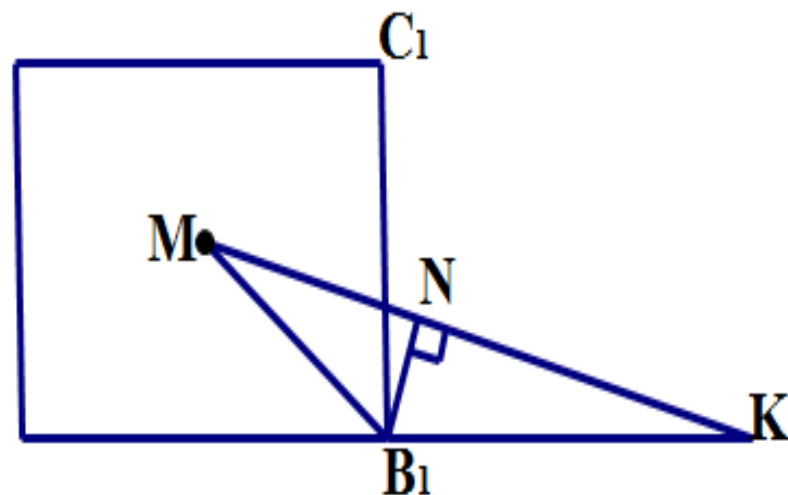
5. Из $\triangle MB_1K$ найдем высоту B_1N

$$MB_1 = \sqrt{2}, B_1K = 2, \angle MB_1K = 135^\circ.$$

По теореме косинусов

$$MK = \sqrt{MB_1^2 + KB_1^2 - 2MB_1 \cdot KB_1 \cdot \cos 135^\circ} =$$

$$= \sqrt{2 + 4 - 2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} =$$
$$= \sqrt{10}.$$



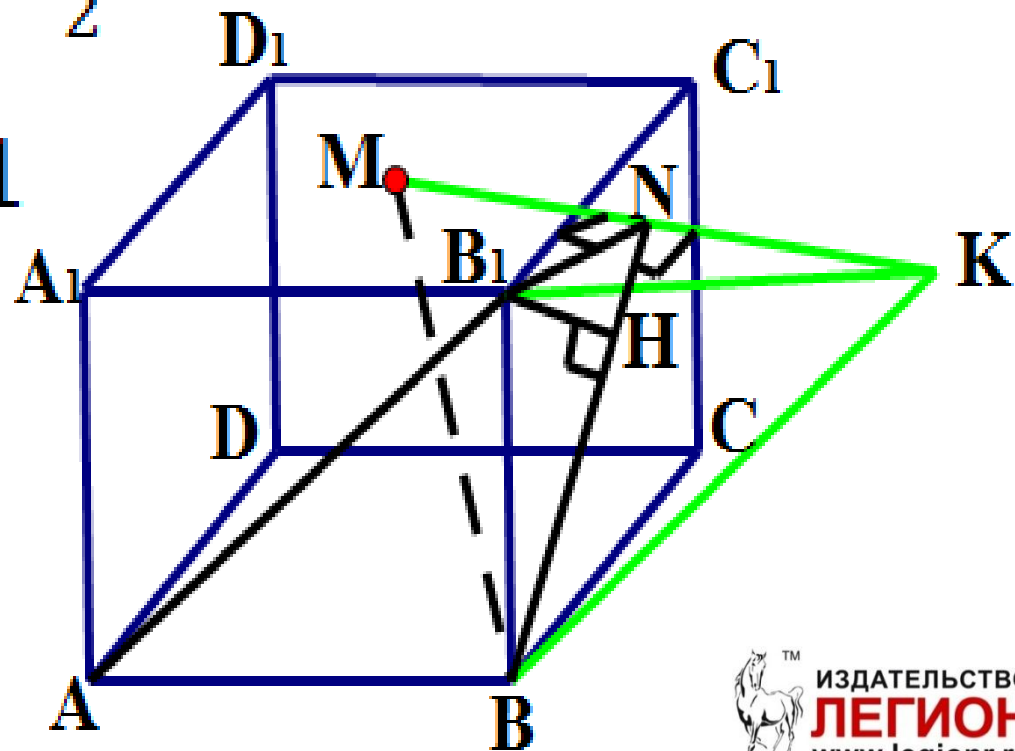
$$S_{MB_1K} = \frac{1}{2} \cdot MB_1 \cdot B_1K \cdot \sin 135^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$S_{MB_1K} = \frac{1}{2} MK \cdot B_1N = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot B_1N$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot B_1N = 1$$

$$B_1N = \frac{\sqrt{10}}{5}$$



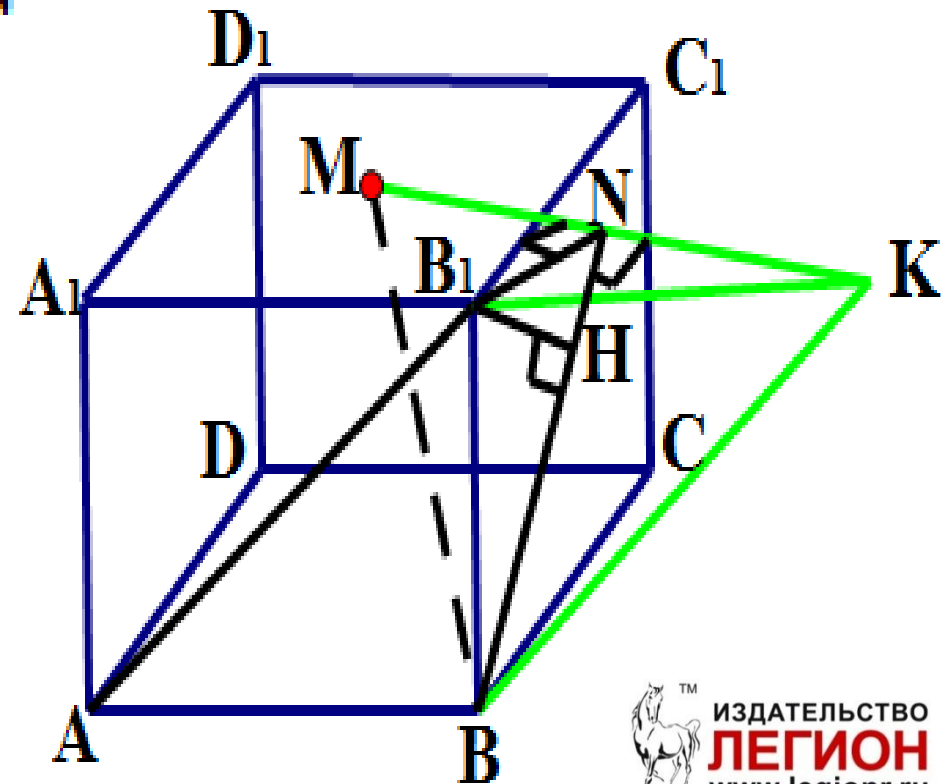
В $\triangle BB_1N$ ($\angle B_1 = 90^\circ$) высоту B_1H найдем из условия
 $BB_1 \cdot B_1N = BN \cdot B_1H$. По теореме Пифагора

$$BN = \sqrt{\frac{22}{5}}, \quad \frac{\sqrt{10}}{5} = \sqrt{\frac{22}{5}}$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{5} = \sqrt{\frac{22}{5}} \cdot B_1H$$

$$B_1H = \frac{2\sqrt{11}}{11}$$

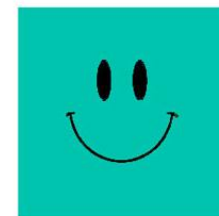
Ответ. $\frac{2\sqrt{11}}{11}$



Метод геометрических преобразований

Разновидности:

- центральная симметрия,
- осевая симметрия,
- параллельный перенос,
- поворот.



Метод подобия

Задание 16 (ЕГЭ вариант 3 «Легион» 2015)

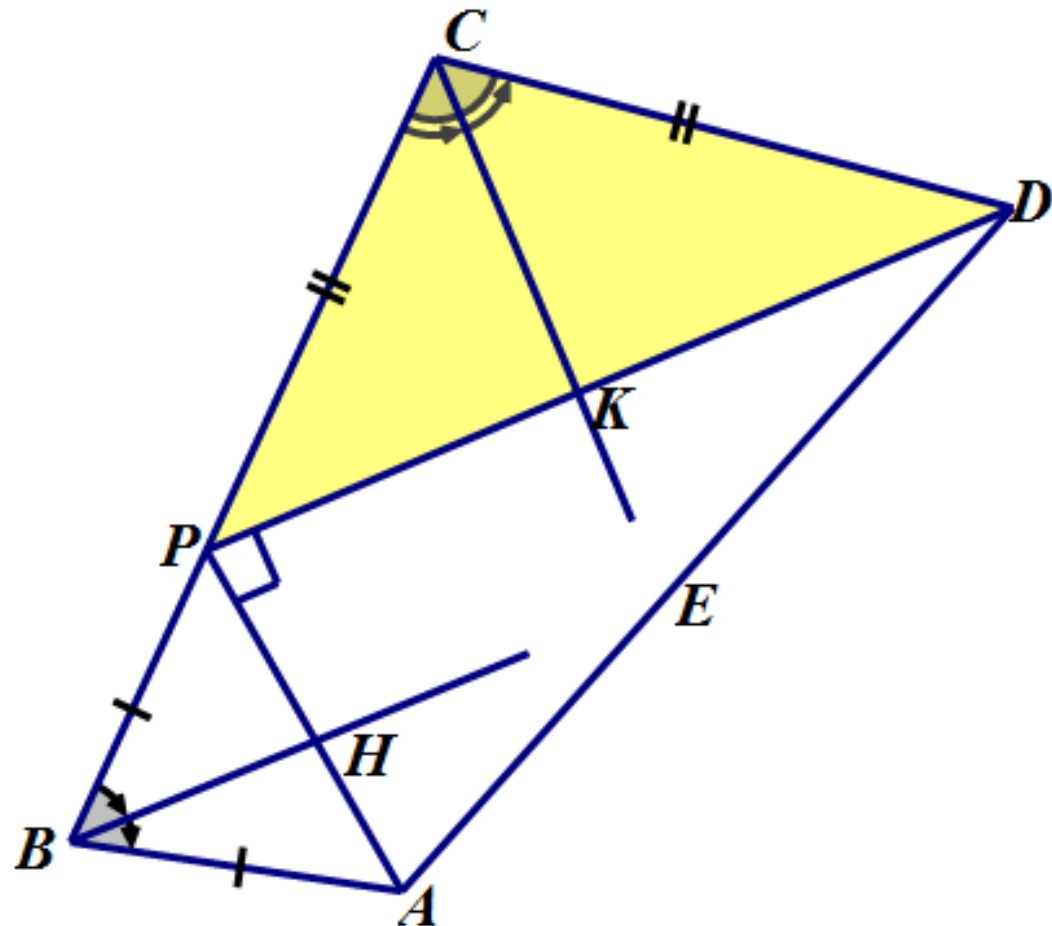
Точка P лежит на стороне BC выпуклого четырехугольника $ABCD$, точки B и C являются вершинами равнобедренных треугольников с основаниями AP и DP соответственно, а угол APD прямой.

- а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C пересекаются на стороне AD .
- б) Пусть эти биссектрисы пересекаются в точке E и $BP:PC=2:5$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если площадь четырехугольника, стороны которого лежат на прямых AP , DP , BE и CE , равна 20.

Дано: $ABCD$ –
 четырехугольник,
 $BP=AB$, $PC=CD$,
 BH и CK –
 биссектрисы углов
 B и C .

$$\angle APD = 90^\circ.$$

Доказать: $BH \cap CK = E$,
 $E \in AD$.

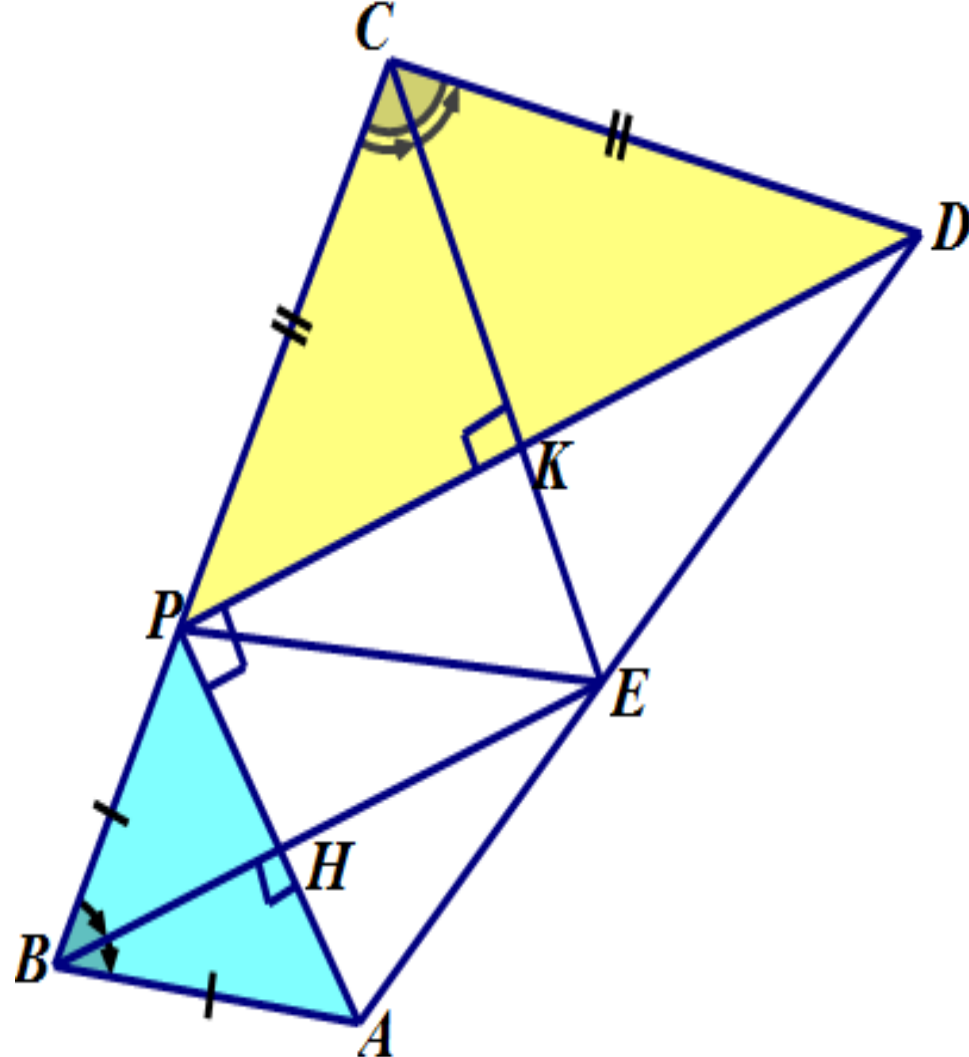


Решение.

Пусть E - точка пересечения $СК$ и $ВН$, (пока не утверждаем, что $E \in AD$).

$СК$, $ВН$ – биссектрисы, следовательно, медианы и высоты.

$РК=KD$, $KE \perp PD$, $\triangle PED$ равнобедренный, аналогично $\triangle AEP$ равнобедренный.



Тогда $AE=PE=ED$.
 E – центр описанной
вокруг $\triangle APD$

6) $BP:PC=2:5$.

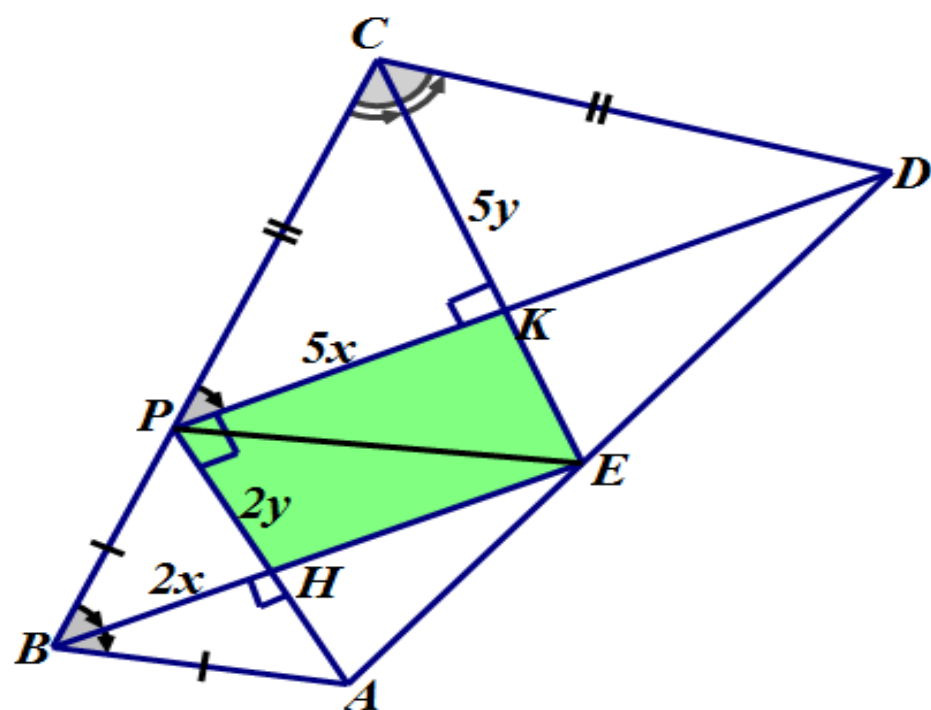
$S_{PKEN}=20$. S_{ABCD} - ?

$PKEN$ – прямоугольник

$S_{PKEN}=PK \cdot KE=20$.

$PD=2PK$, $AP=2PH$.

$S_{PDA}=2 S_{PKEN}=40$.



$\triangle BPH \sim \triangle PCK$ по двум углам, $\angle H = \angle K = 90^\circ$, $\angle 1 = \angle 2$ как соответственные при $PK \parallel BE$ и секущей BC .

$PC : BP = PK : BH = CK : PH = 5 : 2$.

Пусть $PK = 5x$, $CK = 5y$, тогда $BH = 2x$, $PH = 2y$.

$S_{PKEN} = 5x \cdot 2y = 20$, $xy = 2$.

$S_{BHA} = S_{BPH} = \frac{1}{2} 2x \cdot 2y = 2xy = 4$.

$S_{CDK} = S_{CPK} = \frac{1}{2} 5x \cdot 5y = 12,5xy = 25$.

$S_{ABCD} = S_{PDA} + 2S_{BPH} + 2S_{CPK} = 40 + 8 + 50 = 98$.

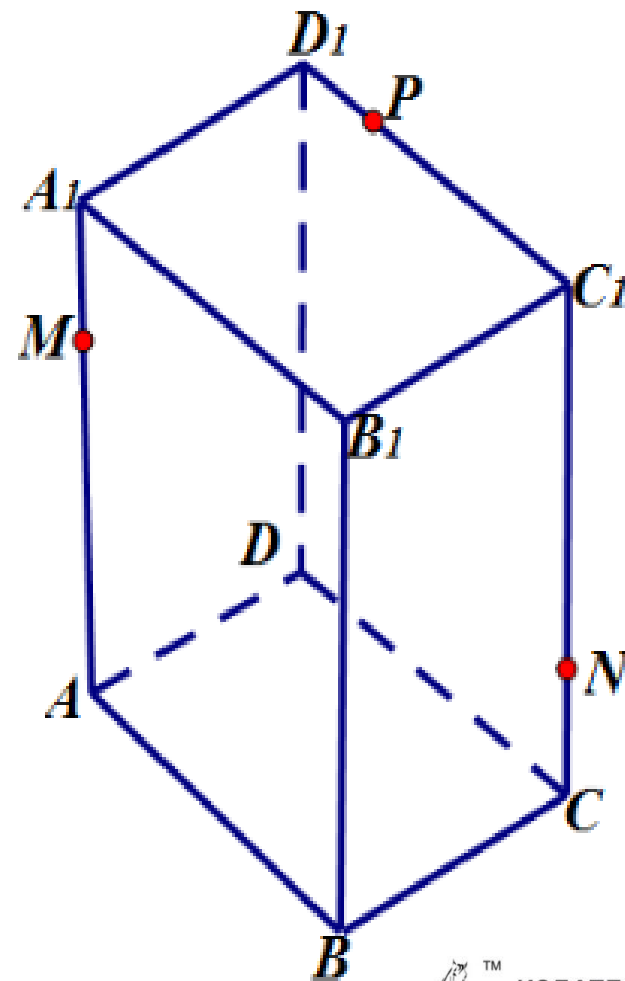
Ответ: 98.

Задание 14

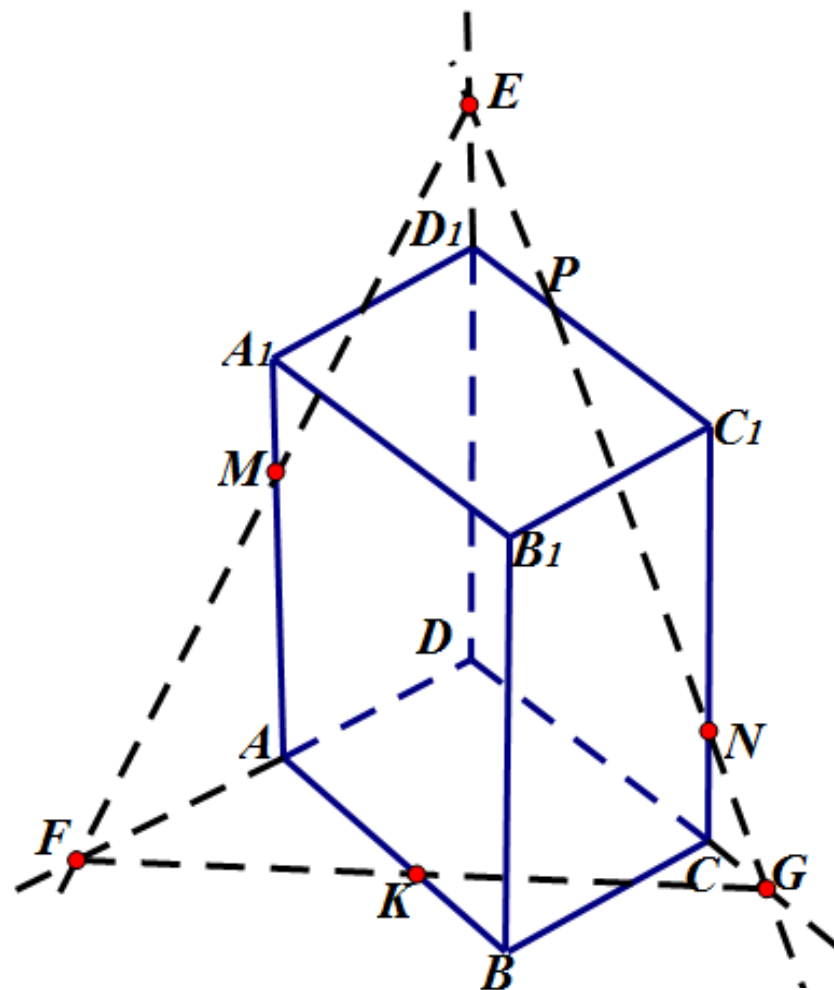
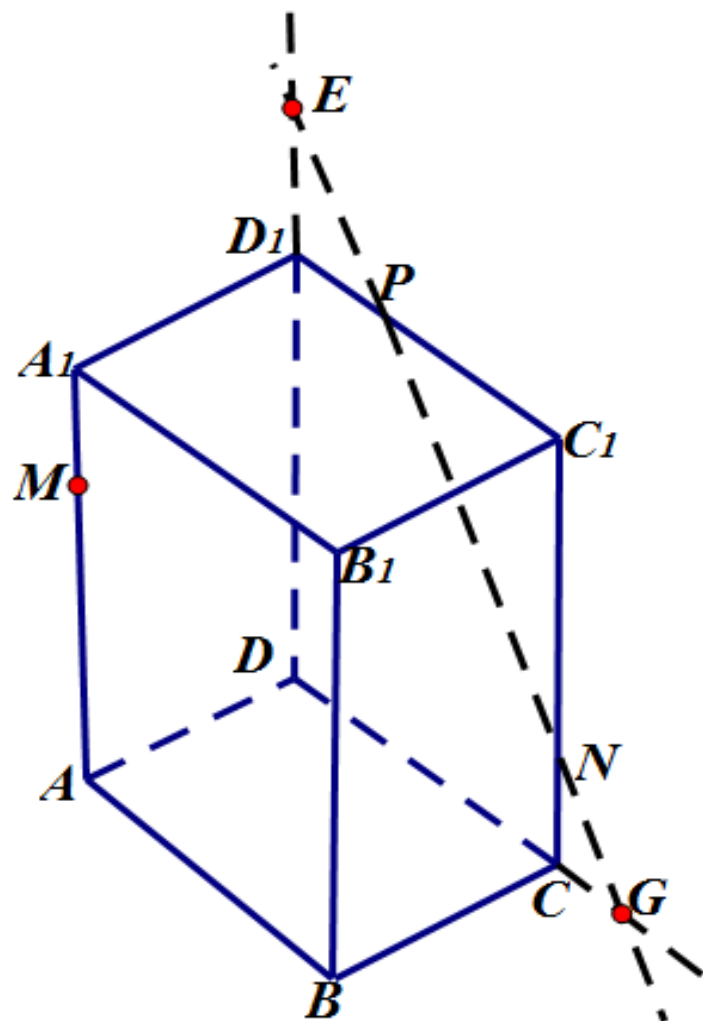
(вариант 28 ЕГЭ «Легион» 2016)

На ребрах AA_1 , CC_1 , C_1D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ расположены соответственно точки M , N и P так, что $A_1 M : MA = D_1 P : PC_1 = CN : NC_1 = 1 : 3$.

- а) Постройте точку K пересечения плоскости MNP с прямой AB .
- б) Найдите отношение $AK : KB$.



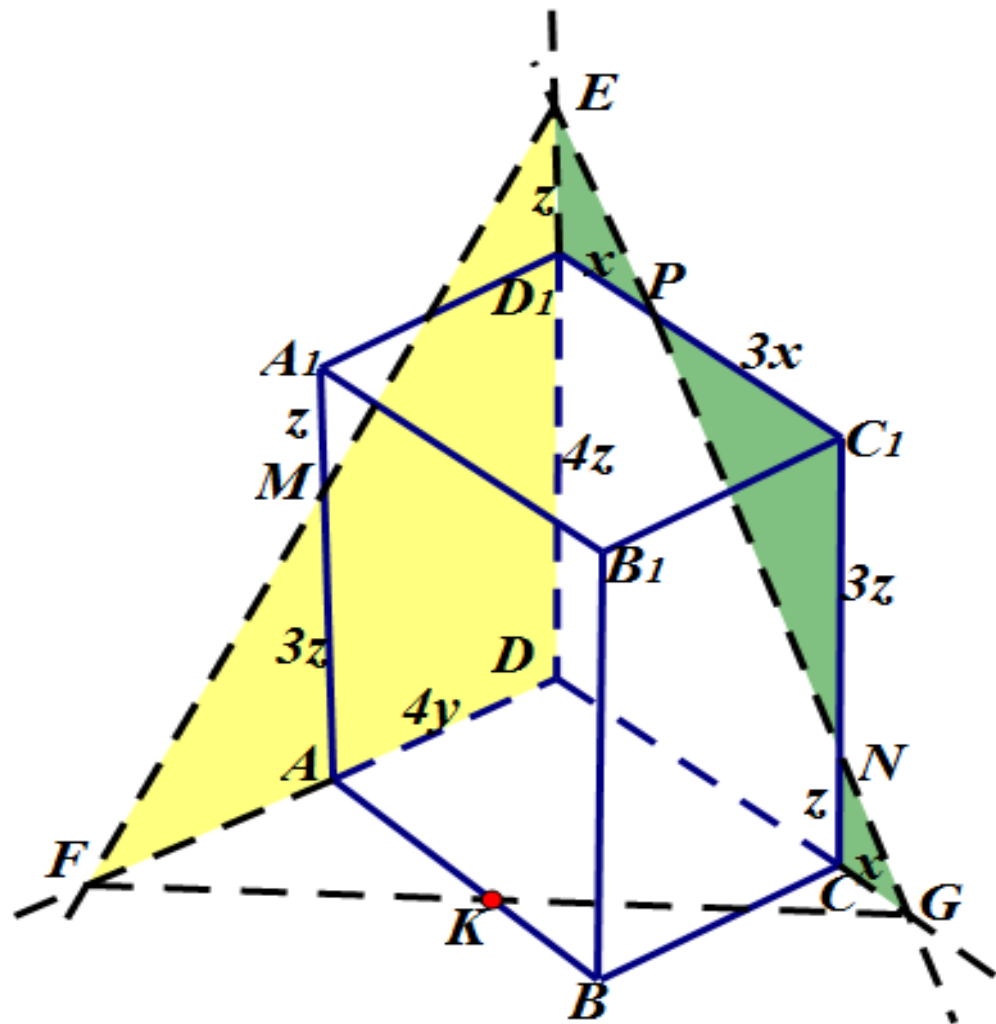
Решение.



Пусть $AB=4x$, $AD=4y$,
 $AA_1=4z$.

$\triangle PC_1N \sim \triangle NCG \sim \triangle ED_1P$,
 откуда $ED_1=z$, $CG=x$.

$\triangle EDF \sim \triangle AFM$, тогда
 $\frac{5z}{3z} = \frac{FD}{AF}$, $FD = \frac{5}{3}AF$
 или $4y + AF = \frac{5}{3}AF$,
 $AF = 6y$.

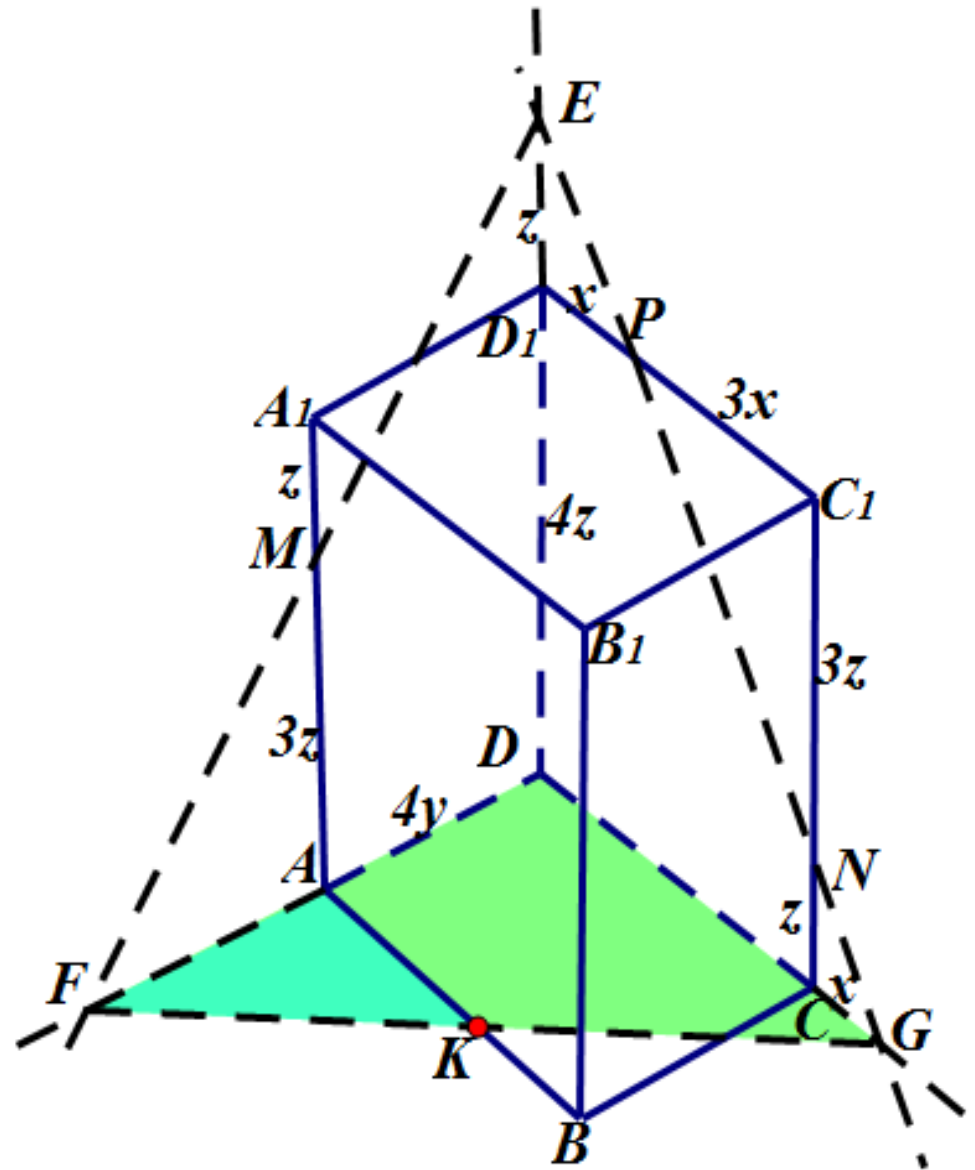


$\triangle FAK \sim \triangle FDG$, поэтому

$$\frac{5x}{AK} = \frac{10y}{6y}, AK = 3x,$$

$$KB = 4x - 3x = x,$$

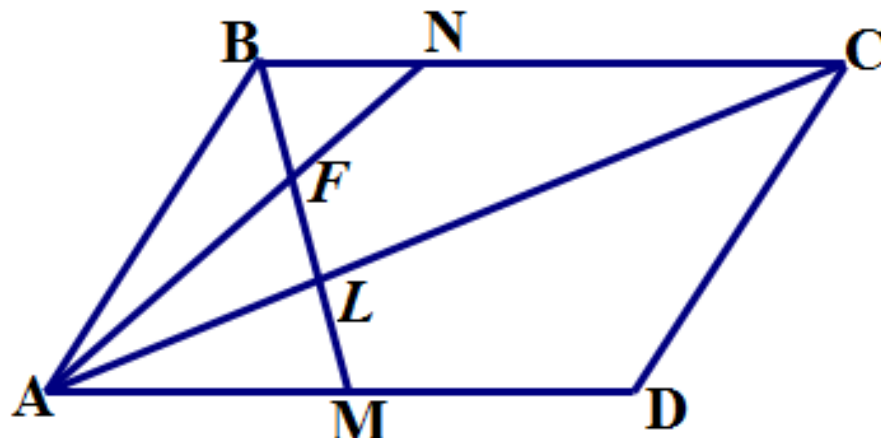
$$\text{следовательно, } \frac{AK}{KB} = 3.$$



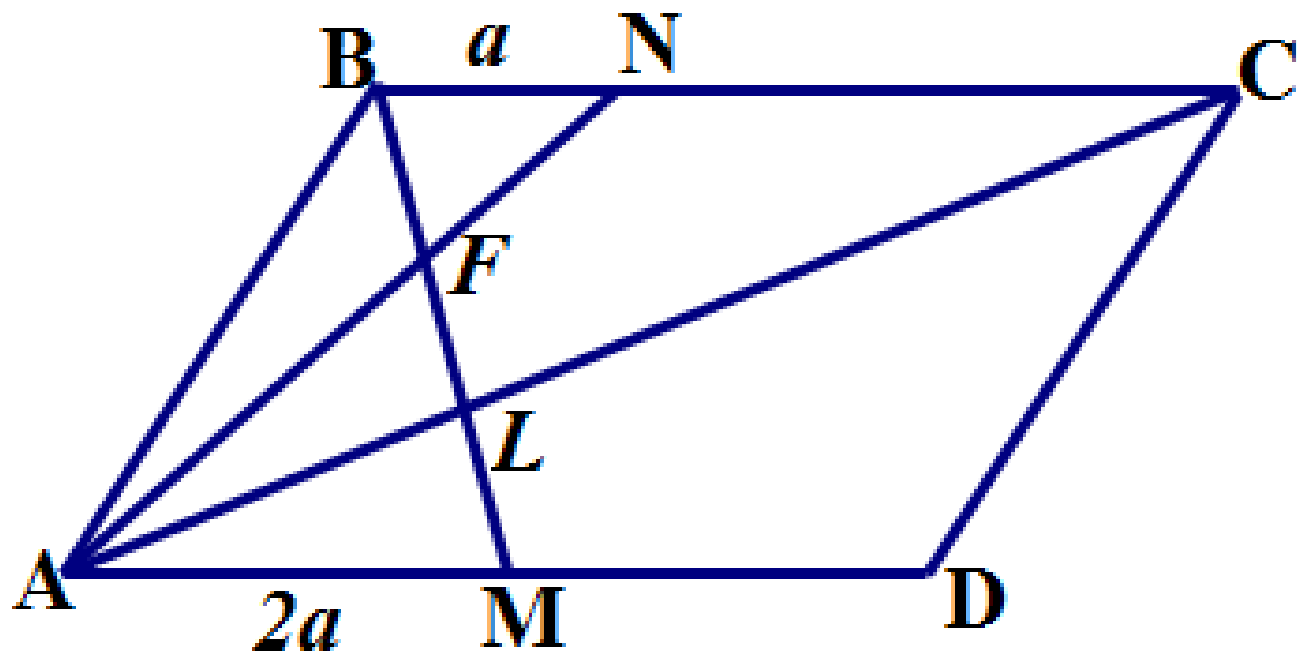
Решение.

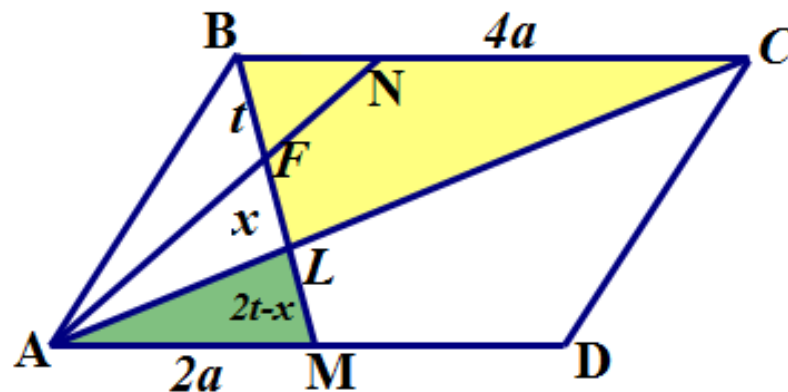
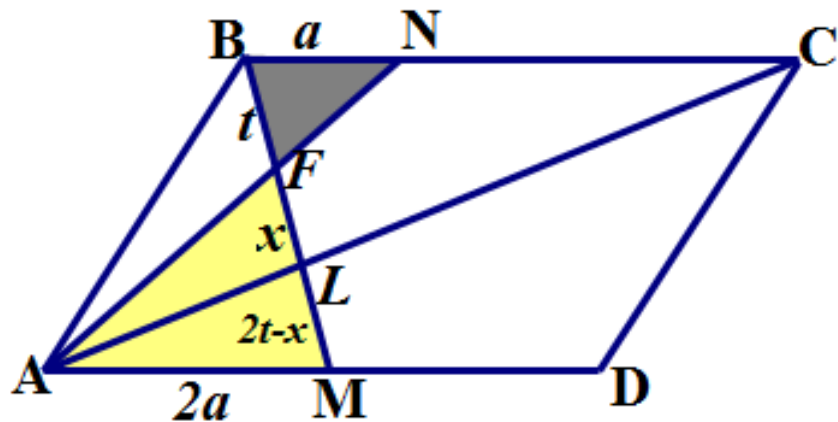
а) Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
 $AM=MD$, $NC=3BN$.

Доказать: $BF=FL=LM$.



Пусть $AD=4a$, тогда $BN=a$





$$\frac{BF}{FM} = \frac{1}{2} \quad \frac{LM}{BL} = \frac{1}{2} \quad \frac{BF}{FM} = \frac{LM}{BL}, \quad \frac{t}{2t} = \frac{2t-x}{t+x}$$

$$t+x=2(2t-x)$$

$$x=t$$

б) О – точка пересечения диагоналей ABCD, BN=4a, h – высота $\triangle BKN$.

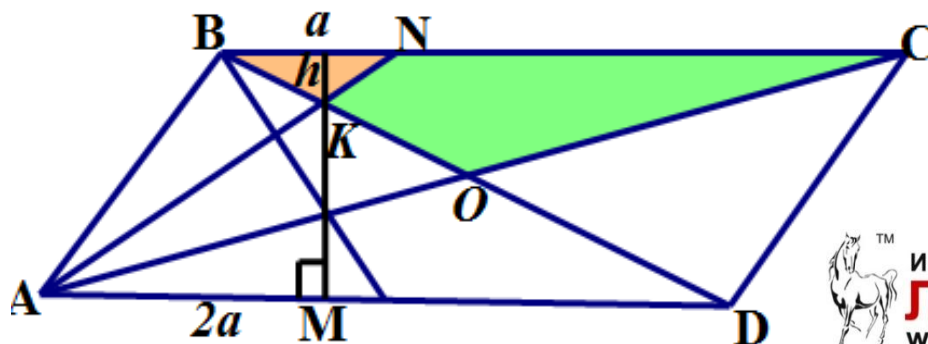
$$S=4a \cdot 5h=20ah$$

$$\frac{S}{4} - \frac{1}{2}ah = \frac{S}{4} - \frac{1}{2} \frac{S}{20} = S\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{40}\right) = \frac{9}{4} = \frac{27}{4} = 6,75$$

$$S_{ABCD}=30$$

$$S_{KNCO}=?$$

Отвѣт. 6,75



Метод площадей

Один из алгоритмов решения многих геометрических задач основан на использовании свойств площадей фигур.

Задача 16 (ЕГЭ вариант 25 «Легион» 2015)

В прямоугольном треугольнике ABC вневписанная окружность с центром O_a и радиусом r_a касается катета BC в точке T_a , вневписанная окружность с центром O_b и радиусом r_b касается катета BC в точке T_b .

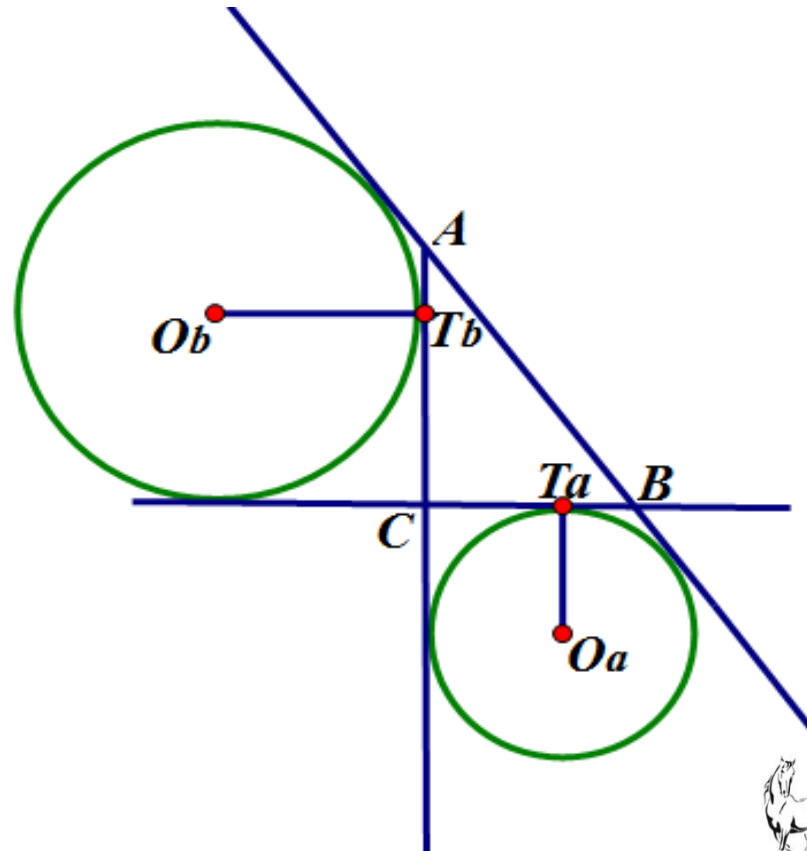
а) Докажите, что площадь прямоугольного треугольника ABC может быть найдена по формуле $S = r_a \cdot r_b$;

б) Найдите площадь четырехугольника AT_bTaB , если $S_{ABC} = 30$.

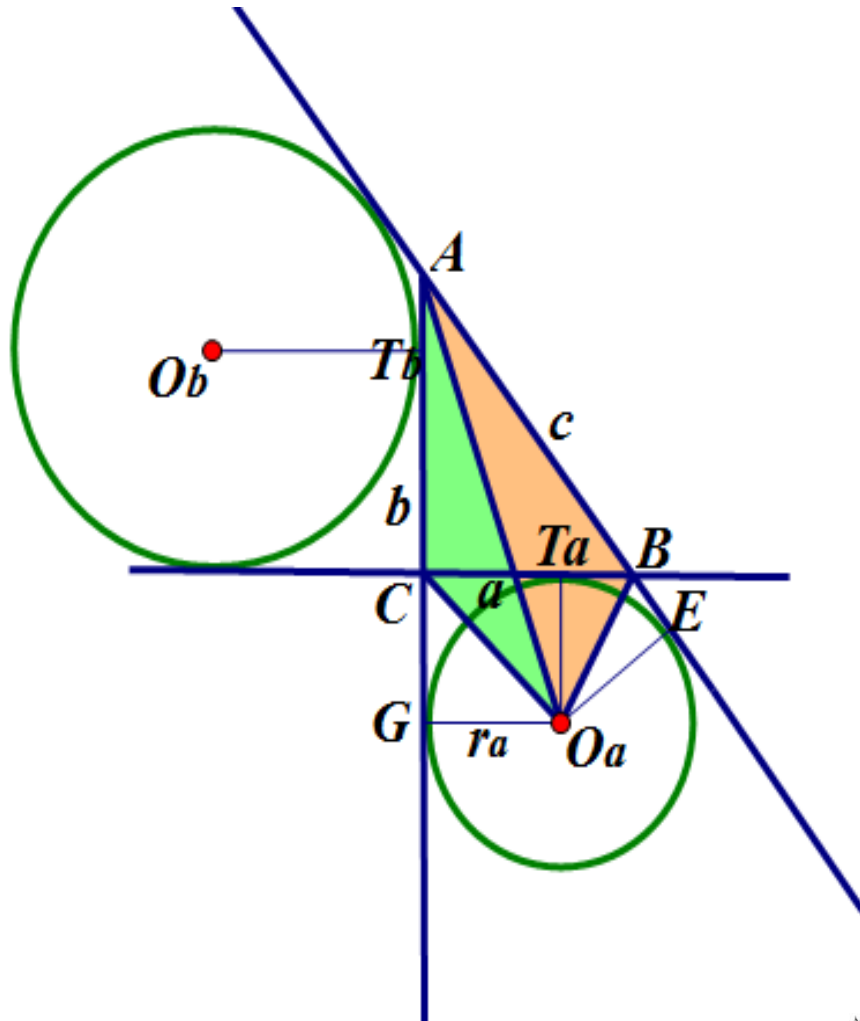
Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный,
внеписанные окружности с центрами O_a
и O_b , T_a, T_b – точки касания.
и радиусами r_a и r_b .

Доказать:

$$S_{ABC} = r_a \cdot r_b$$



Решение. $2S = 2S_{ABC} = r_a \cdot b + r_a \cdot c - r_a \cdot a = r_a(c + b - a)$



$$r_a = \frac{2S}{c + b - a}$$

Аналогично $rb = \frac{2S}{c+b-a}$

$$\text{Тогда } ra \cdot rb = \frac{2S}{c+b-a} \cdot \frac{2S}{c+b-a} = \frac{4S^2}{2ab} = \frac{2S^2}{2S} = S$$

Задача.

Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается стороны BC в точке P и пересекает отрезок BO в точке T . Отрезки OC и TP параллельны.

а) Доказать: $\triangle ABC$ – равнобедренный.

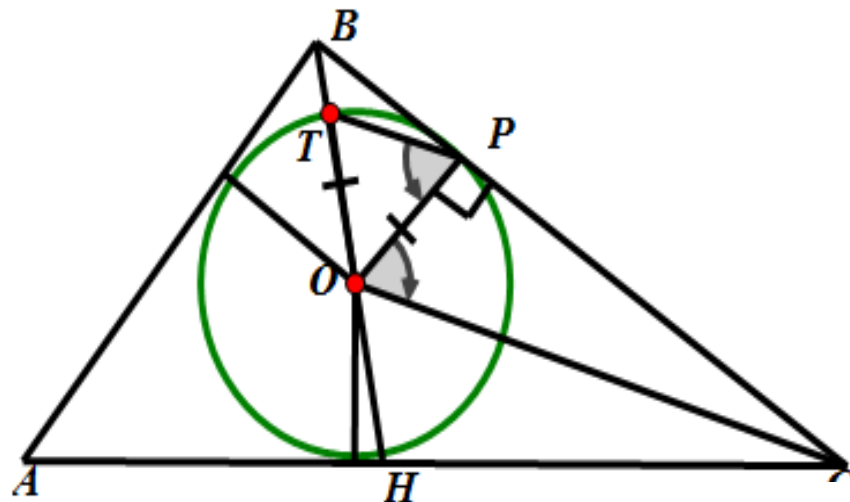
б) Найти площадь треугольника BPT , если точка O делит высоту BH в отношении $BO:OH=3:1$. $AC=2a$.

Решение.

а) O – точка пересечения биссектрис.

$\triangle BOP$ – прямоугольный.

$\angle ACO = \angle BCO = \alpha$,



$$\angle COP = 90^\circ - \alpha = \angle OPT,$$

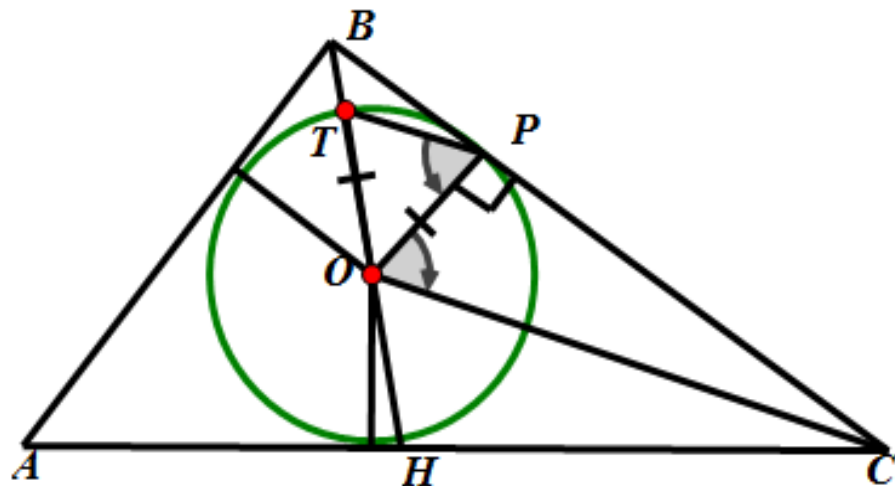
углы OPT и COP – накрест лежащие;

$\triangle TOP$ – равнобедренный,

$OT = OP$ (радиусы).

$$\angle TOP = 180^\circ - 2(\angle OPT) =$$

$$= 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$$



Пусть BO пересекается с AC в точке H.

Треугольники BOP и BSH подобны. Угол B общий, $\angle BOP = \angle BSH = 2\alpha$. Следовательно, $\angle BHS = \angle BPO = 90^\circ$.

В треугольнике ABC отрезок BH является биссектрисой и высотой.

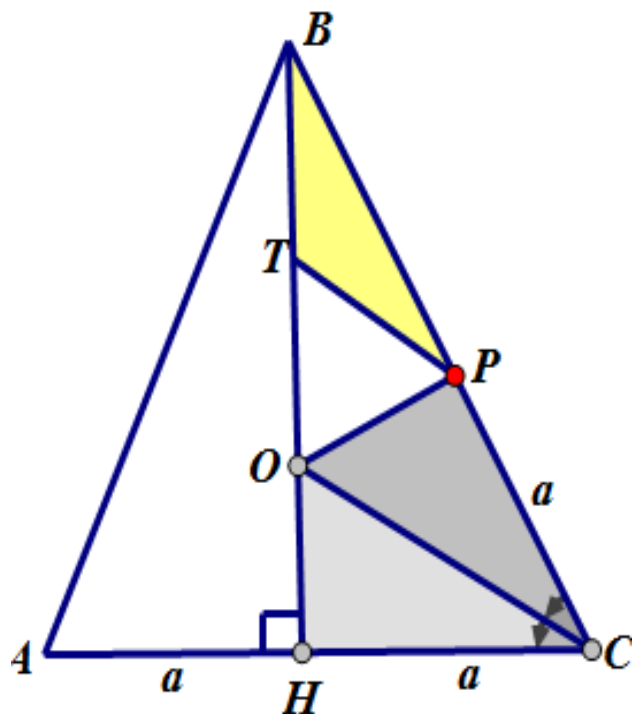
$\triangle ABC$ – равнобедренный.

б) $\triangle OHC$ и $\triangle BHC$ имеют общую высоту, проведенную из вершины C .

$$\frac{S_{OHC}}{S_{BHC}} = \frac{OH}{BH} = \frac{1}{4} \quad \frac{OH}{BH} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{BO}{OH} = \frac{BT + OT}{OH} = 1 + \frac{BT}{OH} = 3$$

$S_{OPC} = S_{OHC}$ Поэтому $S_{BPO} = 0,5 S_{BHC}$.

$$\frac{BT}{OH} = 2, \quad (OH=OT). \text{ Поэтому } S_{BTP} = \frac{2}{3} S_{BPO}.$$


$$BC=3a.$$

$$\text{Значит, } S_{BPO} = 0,5 S_{BHC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} S_{BHC} = \frac{1}{3} S_{BHC}$$

$$S_{BHC} = \frac{1}{2} BH \cdot HC = \frac{1}{2} \sqrt{BC^2 - HC^2} \cdot HC$$

$$\frac{1}{2} a \sqrt{8a^2} = a^2 \sqrt{2}$$

$$S_{BTP} = \frac{\sqrt{2} a^2}{3}$$

Метод вспомогательной окружности

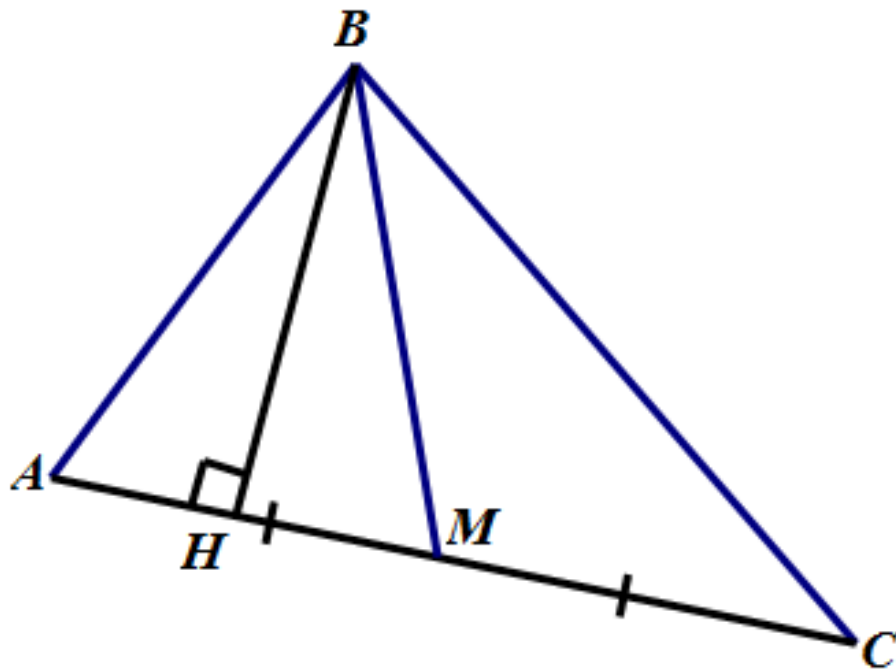
Окружность – душа геометрии.

**Познайте окружность, и вы не
только познаете душу геометрии,
но и возвысите душу свою”.**

И.Ф. Шарыгин

Задача

Доказать, что биссектриса угла разностороннего треугольника лежит между высотой и медианой, проведенными из той же вершины.

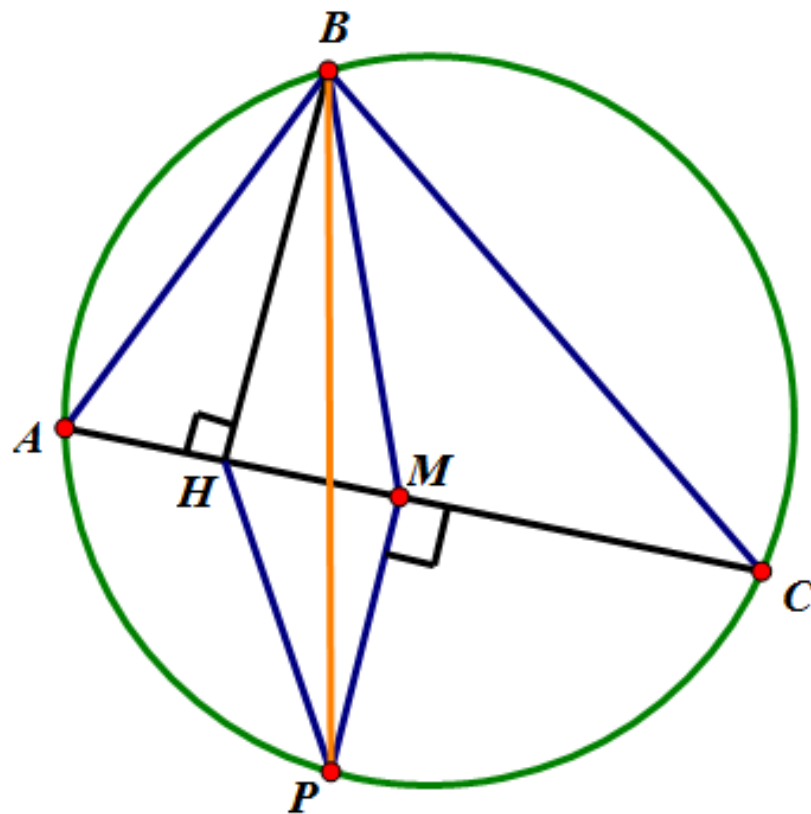


Решение.

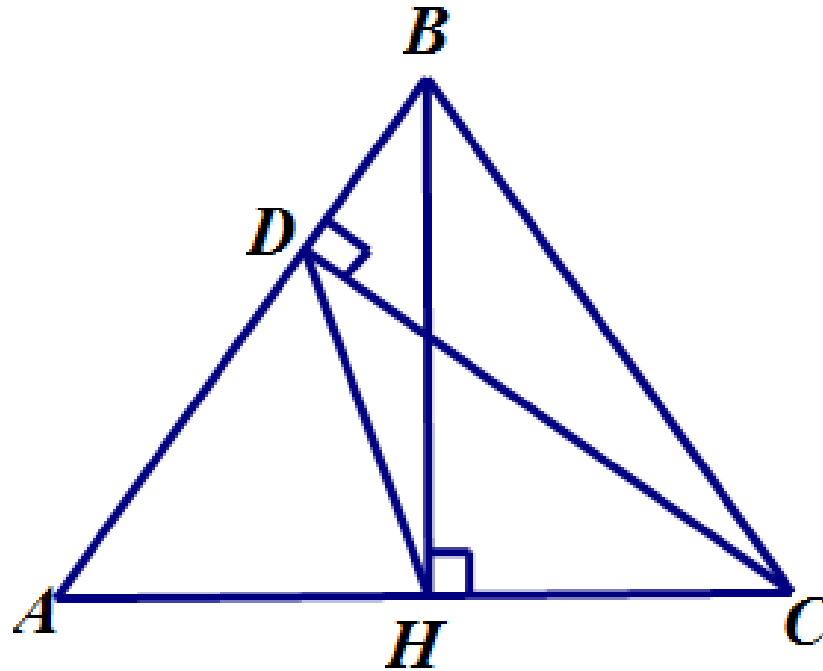
Построим описанную
окружность.

$AM=MC$, дуги AP и PC
равны,

BP — диагональ трапеции
 $BHPM$.



Прямая, проходящая через основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от этого треугольника подобный ему треугольник.

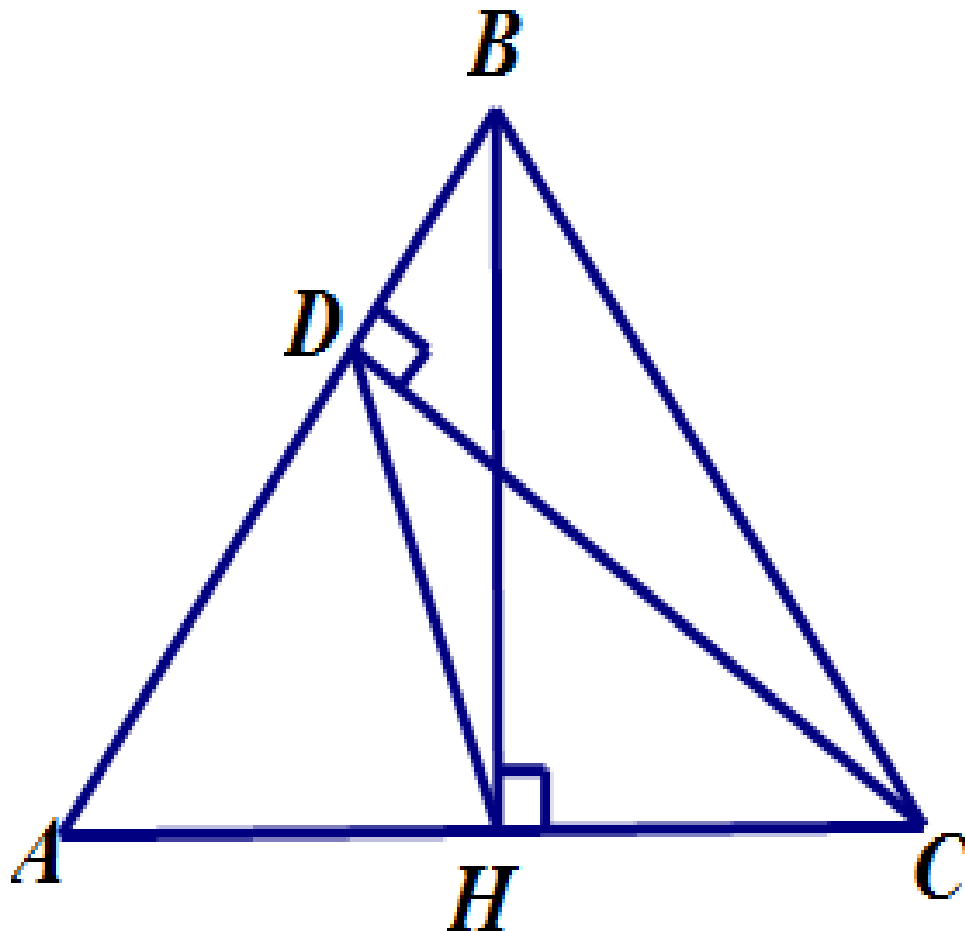


Решение.

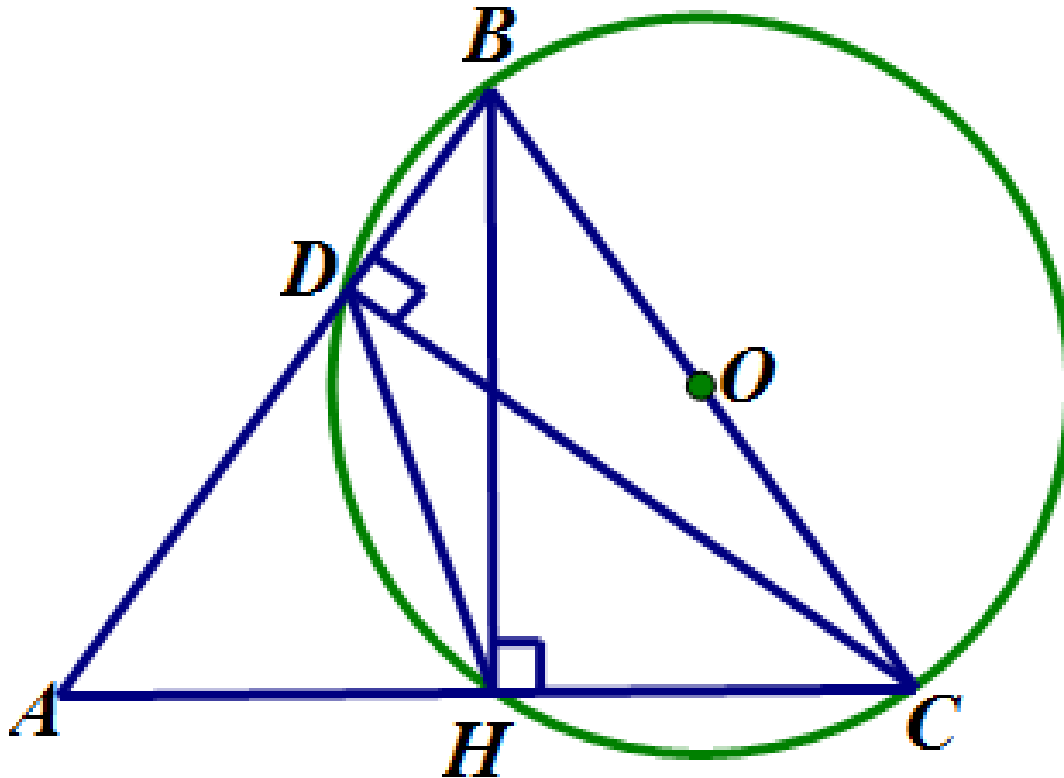
Дано: $\triangle ABC$ –
остроугольный,
 BH , CD – высоты.

Доказать:

$\triangle ABC \sim \triangle ADH$.



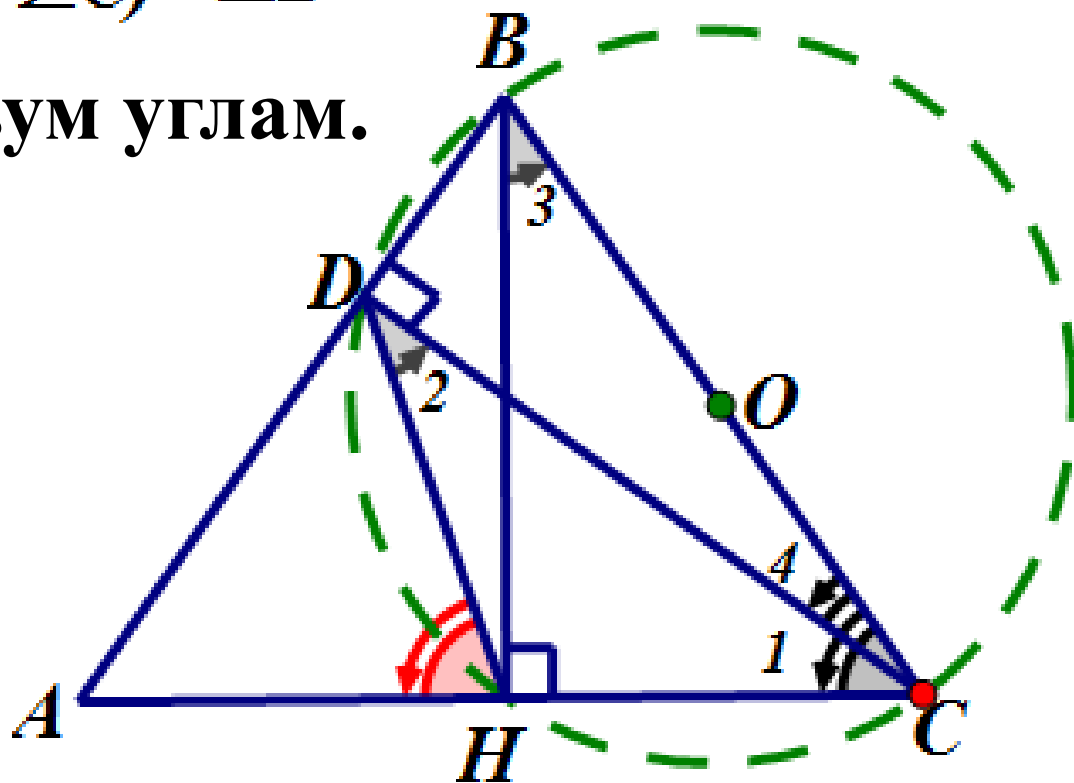
Построим вспомогательную окружность, с центром в точке O (середина BC), которая пройдет через точки H и D .



$$\angle 1 = \angle C - \angle 4 = \angle C - (90^\circ - \angle B)$$

$$\begin{aligned}\angle AHD &= \angle 1 + \angle 2 = \angle 1 + \angle 3 = \\ &= \angle C - (90^\circ - \angle B) + (90^\circ - \angle C) = \angle B\end{aligned}$$

$\triangle ABC \sim \triangle ADH$ по двум углам.



Метод геометрического видения

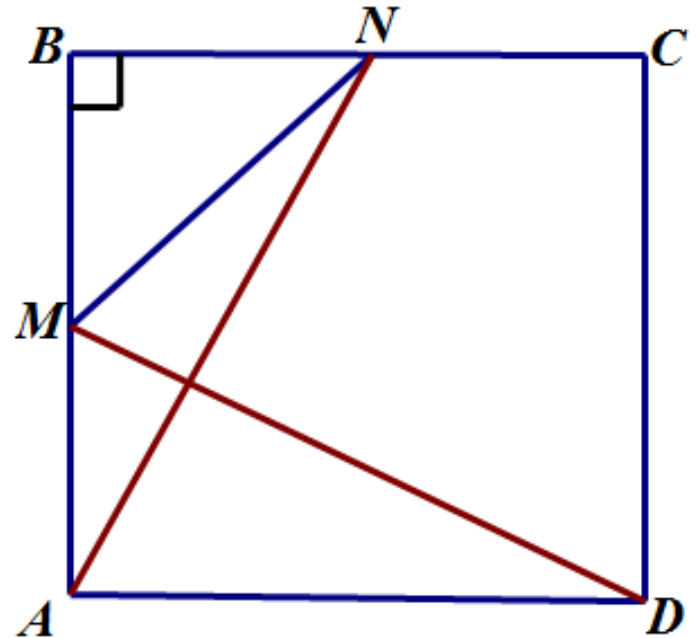
Основывается на умениях видеть и сопоставлять геометрические факты.

Обычно при решении не нужно выполнять дополнительные построения и вычислений.

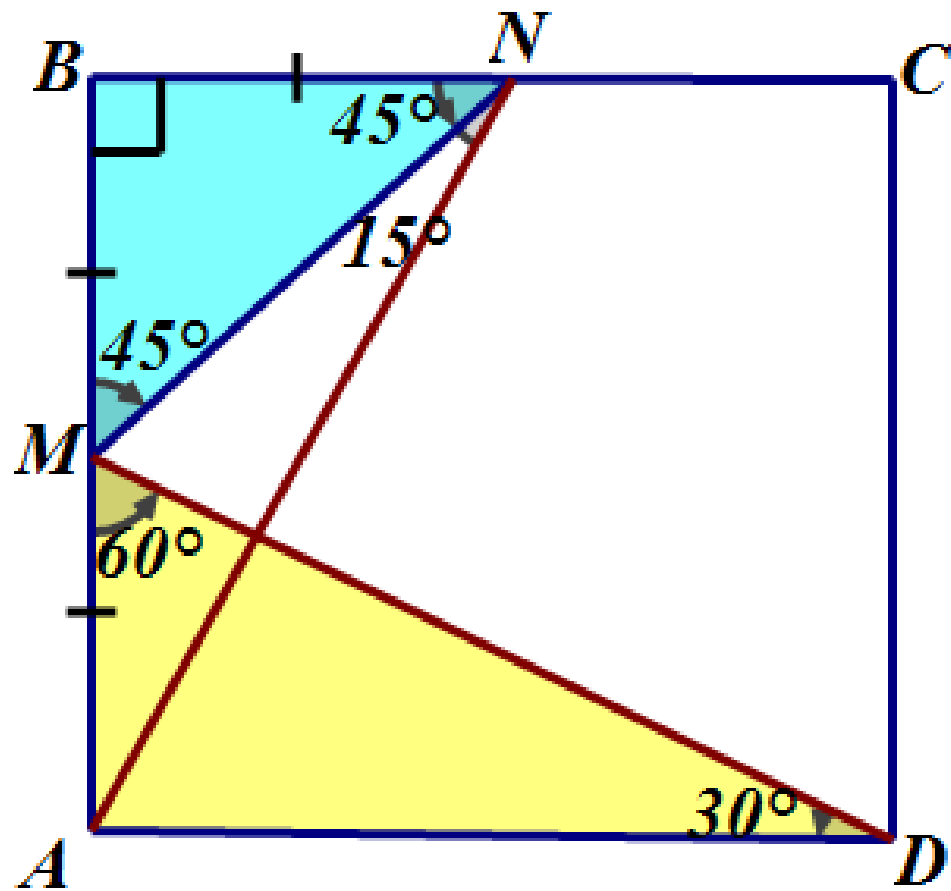
Задача 25

(вариант 3 ОГЭ «Легион» 2015)

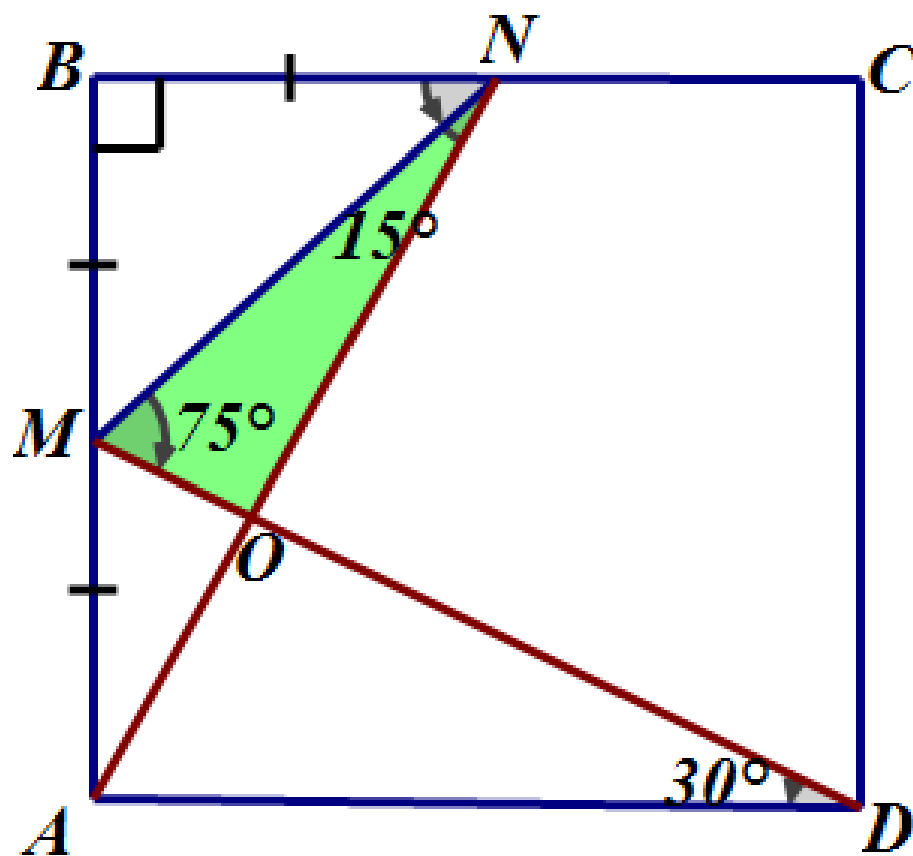
$ABCD$ – квадрат. Точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Докажите, что AN перпендикулярна MD .



Решение



$$\angle NMD = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$$



$$\angle MON = 90^\circ$$

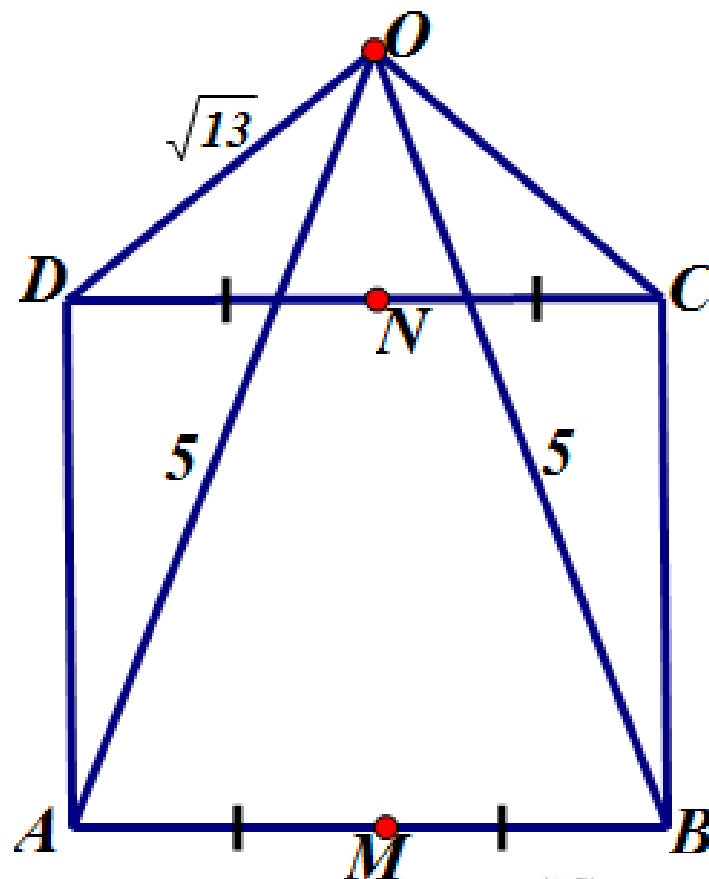
Задача 16 пункт а) (вариант 13 ЕГЭ «Легион» 2015)

Точка O лежит в
плоскости квадрата
 $ABCD$.

Известно, что точка O
лежит вне квадрата.

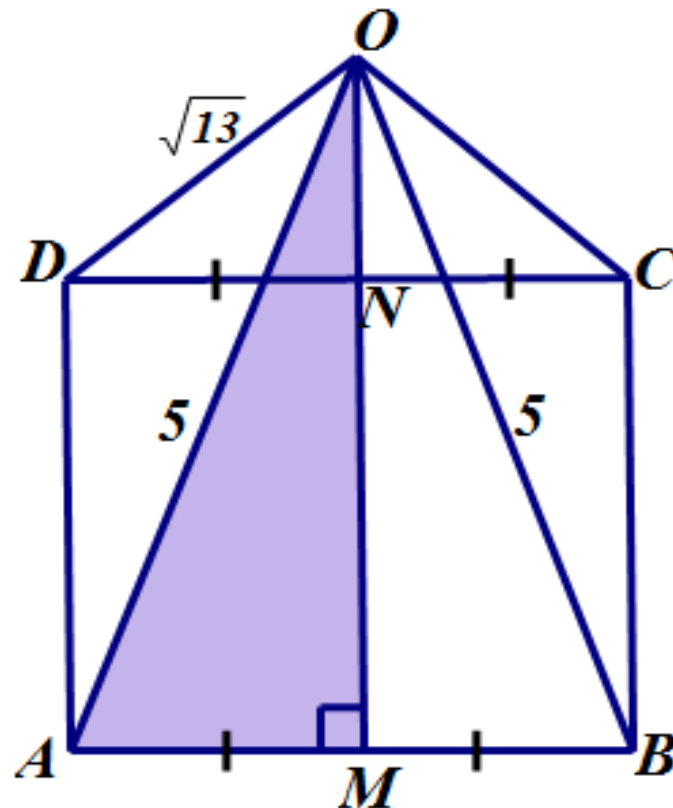
$$OA=OB=5,$$
$$OD=\sqrt{13}.$$

а) Докажите, что площадь
квадрата $ABCD$
меньше 36.



Решение.

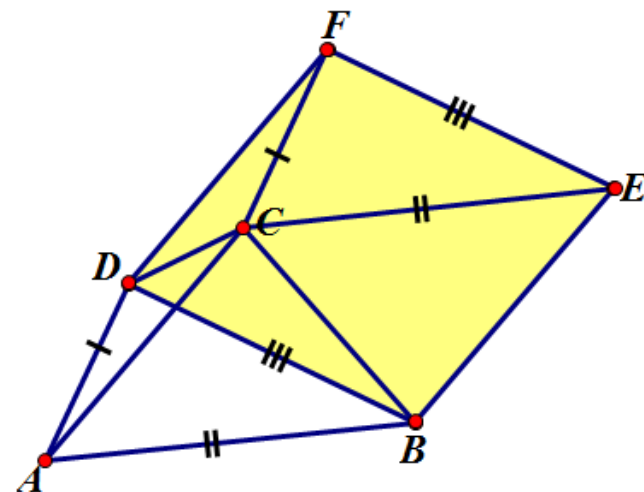
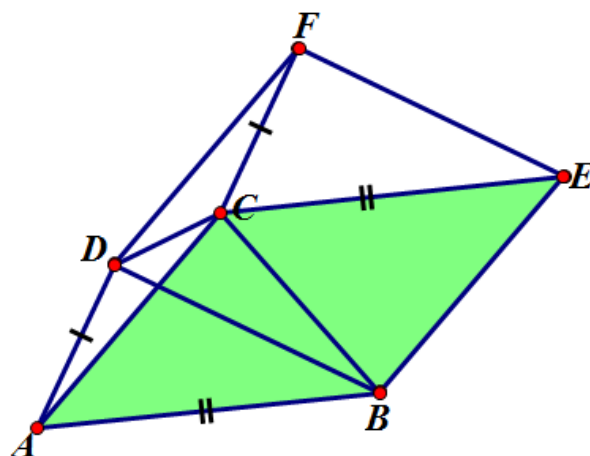
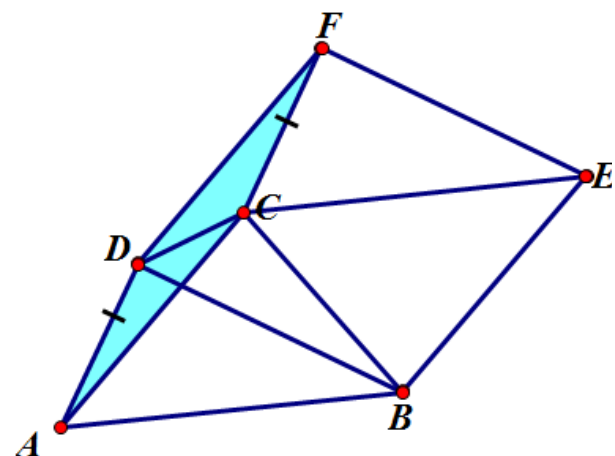
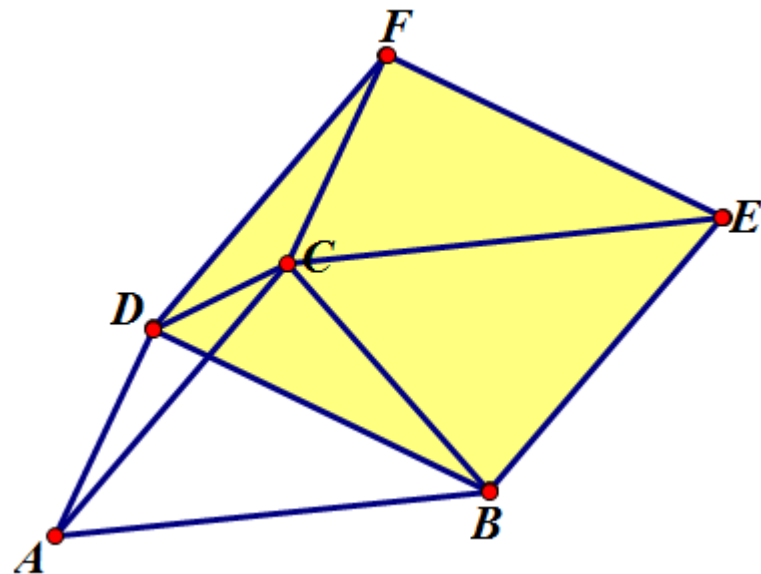
а) В прямоугольном
треугольнике AOM
 $OM = MN + NO < AO = 5$, откуда
 $MN < AO = 5$, $MN = AB$,
 $AB < 5$. Тогда $S_{ABCD} < 25 < 36$.



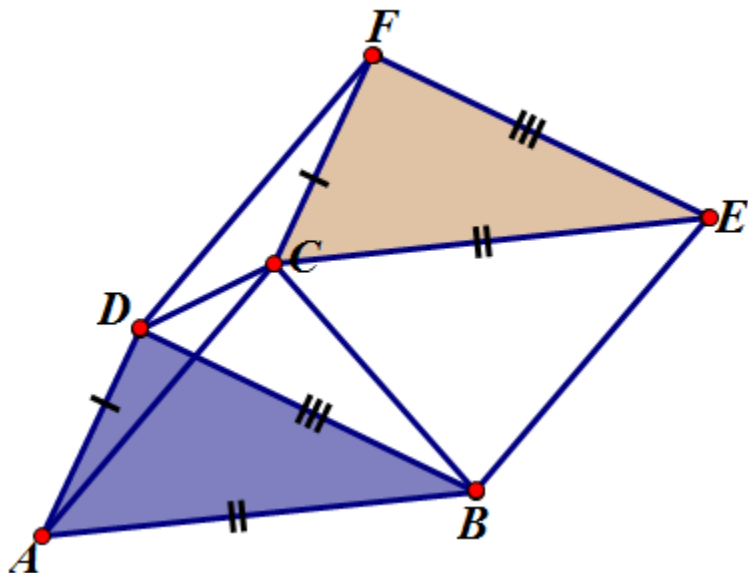
Задача.

Площадь четырехугольника $ABCD$ равна S .

Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны и параллельны диагоналям четырехугольника.



$ACED$, $ABEC$, $BEFD$ параллелограммы, следовательно,



$$\Delta ABD = \Delta CFE, \Delta BCE = \Delta ACB, \\ \Delta ADC = \Delta DCE.$$

$$\text{Тогда } S_{BEFD} = S_{CFD} + S_{BCE} + S_{DCB} + S_{FCE} = (S_{ACD} + S_{ABC}) + \\ + (S_{ABD} + S_{BCD}) = S + S = 2S.$$

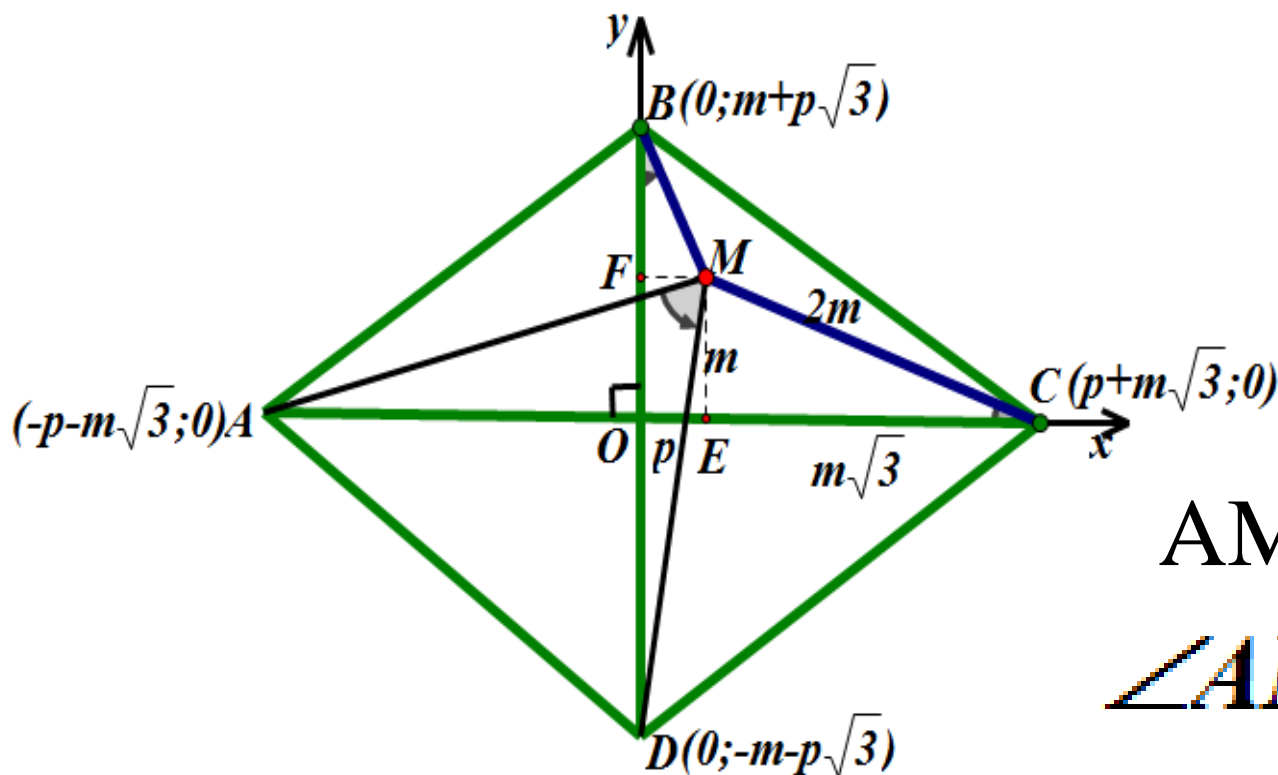
Метод координат

Метод координат и векторный метод - самые универсальные методы геометрии.

Главное - удачно выбрать систему координат.

- *I тип* — задачи на нахождение зависимости между элементами данной фигуры;
- *II тип* — задачи на составление уравнения данной фигуры, если известны характеристические свойства точек данной фигуры.

Внутри ромба $ABCD$ находится точка M такая, что $\angle MBD = \angle MCA = 30^\circ$ и отрезки MB и MC не пересекают диагонали ромба. Найдите $\angle AMD$.



$$AM = MD = AD$$

$$\angle AMD = 60^\circ$$

Задача 14

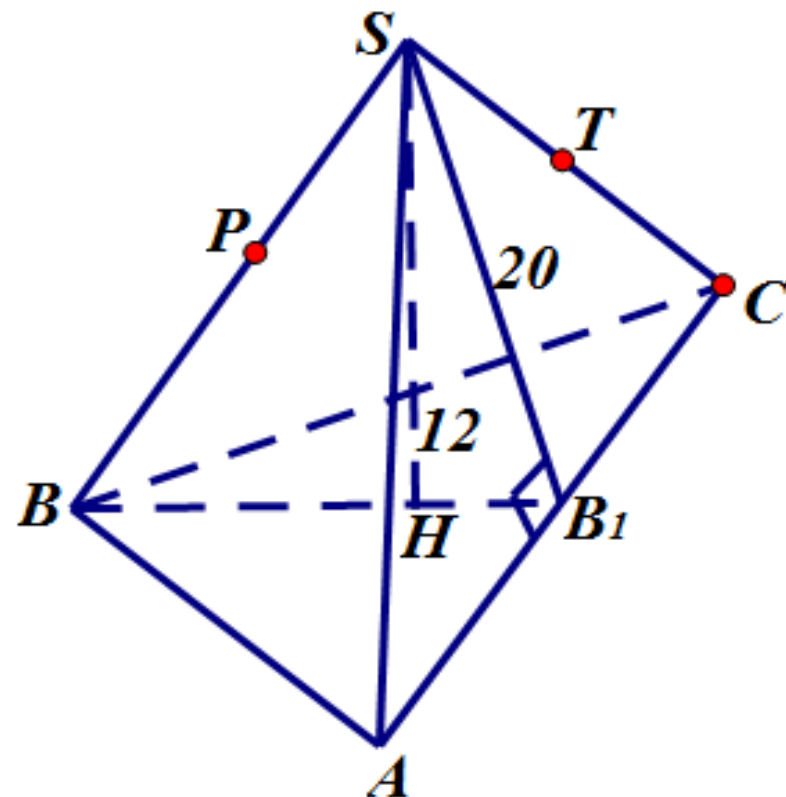
(вариант 3 ЕГЭ «Легион» 2015)

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота равна 12, апофема равна 20.

Точки P и T – середины ребер SB и SC соответственно. Плоскость α содержит прямую PT и параллельна высоте пирамиды SH .

а) Докажите, что плоскость α делит высоту основания BB_1 в отношении 1:2, считая от вершины B .

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости α .



Построить

плоскость α :

$PT \in \alpha, \alpha \parallel SH$.

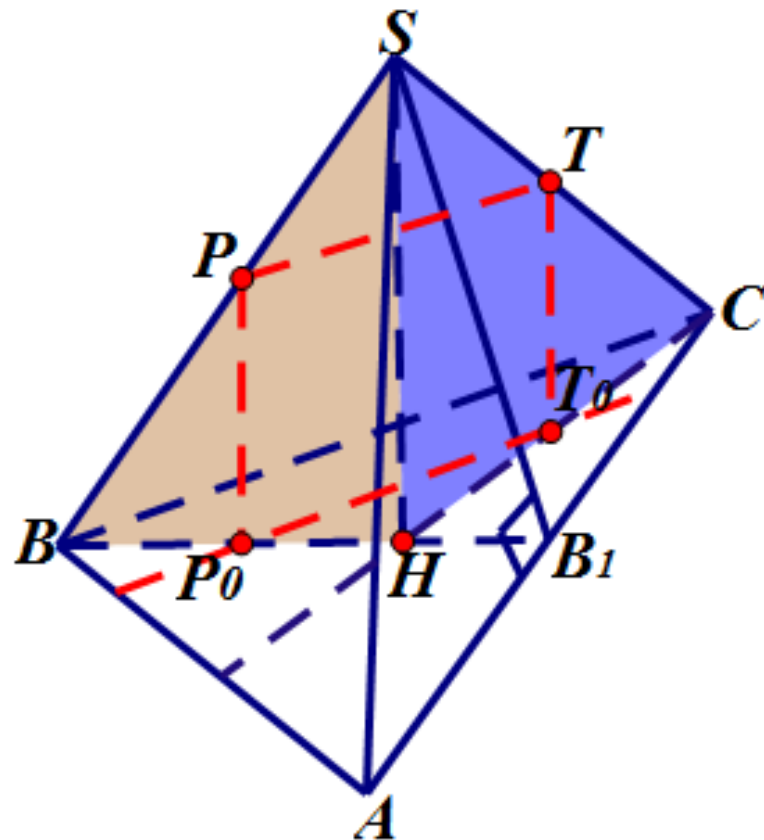
Решение.

а) В плоскостях BSH и CSH
проведем

PP_0 и TT_0 параллельно SH .

P_0T_0 - линия пересечения плоскости α
и плоскости ABC .

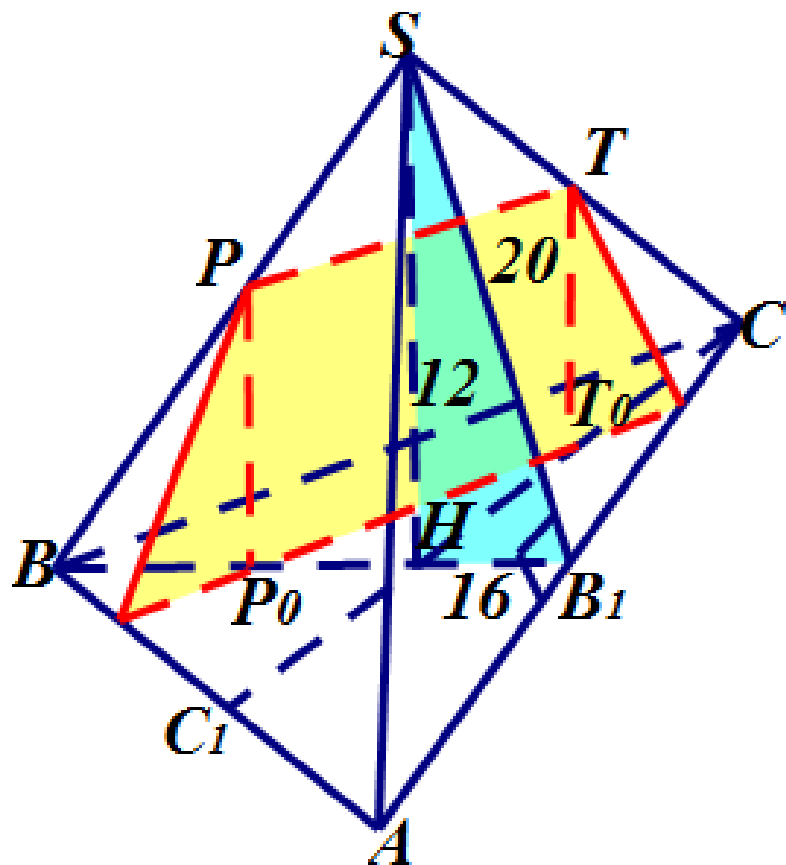
PP_0 – средняя линия $\triangle BSH$, следовательно,
 $BP_0 = P_0H = HB_1$, откуда $BP_0 : P_0B_1 = 1 : 2$.



б) $\alpha = PTT_0$.

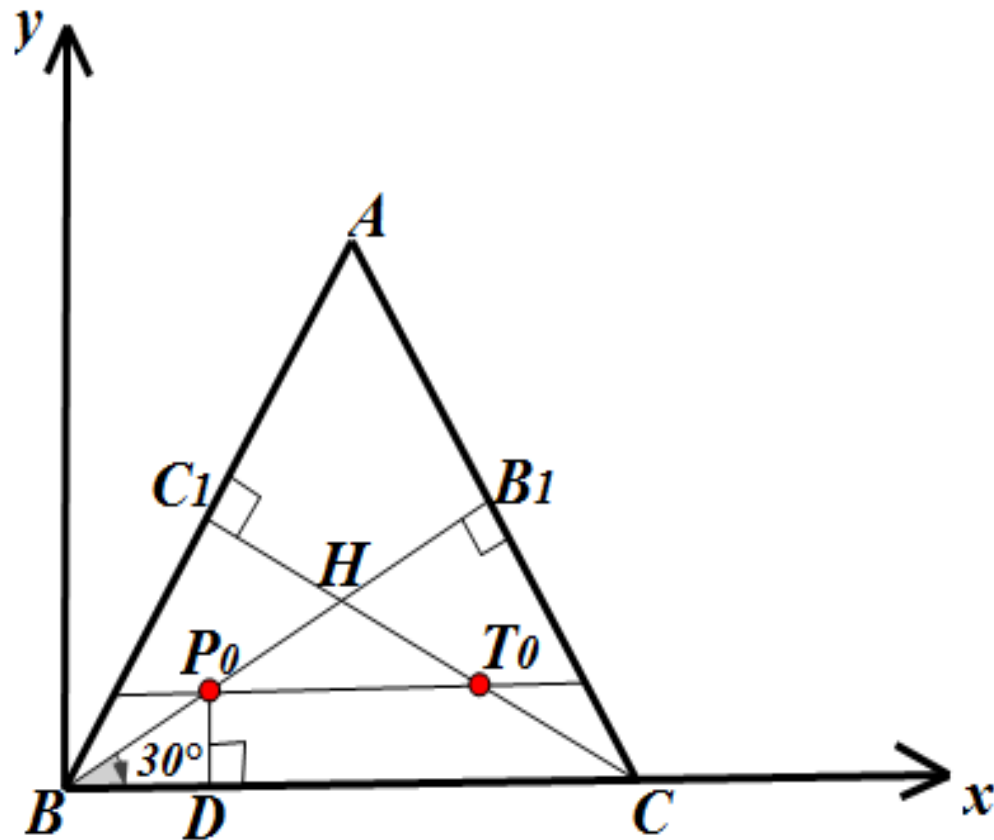
Из $\triangle SHB_1$ по теореме Пифагора $HB_1 = 16$.

$PT \parallel P_0T_0 \parallel BC$. Значит, расстояние от точки B до плоскости α равно расстоянию между прямыми BC и P_0T_0 .



Расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, вычисляется по формуле

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Расстояние между прямыми ВС и P_0T_0 равно расстоянию от точки P_0 (T_0) до оси абсцисс (ВС).

Из п.а) $BP_0:P_0V_1=1:2$, $HV_1=16$, значит, $BP_0=16$, откуда $P_0D=8$.

Ответ: 8.

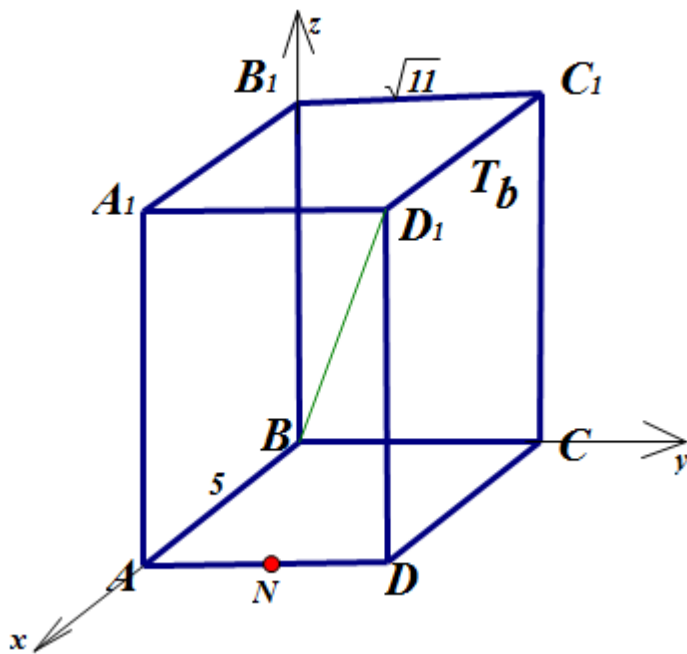
Векторный метод

Типы задач, решаемых с помощью
векторного метода:

I тип – задачи, связанные с использованием операций сложения векторов и умножения вектора на число;

II тип – задачи с использованием операций скалярного умножения векторов и разложения вектора по базису.

Задача. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ -прямоугольник $ABCD$, в котором $AB=5$, $AD=\sqrt{11}$. Найти тангенс угла между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1 , если расстояние между прямой AC и $B_1 D_1$ равно 12.



$$B(0;0,0), A(5;0;0), D_1(5; \sqrt{11}; 12)$$

Координаты нормали к плоскости сечения: $\overrightarrow{BD_1} \{5; \sqrt{11}; 12\}$

Координаты нормали к плоскости основания: $\overrightarrow{BB_1} \{0;0;12\}$

$$\left| \cos \angle(\overrightarrow{BD_1}; \overrightarrow{BB_1}) \right| = \left| \frac{0 \cdot 5 + 0 \cdot \sqrt{11} + 12 \cdot 12}{\sqrt{25 + 11 + 144} \cdot \sqrt{144}} \right| = \frac{12}{\sqrt{180}}$$

α – острый угол, то

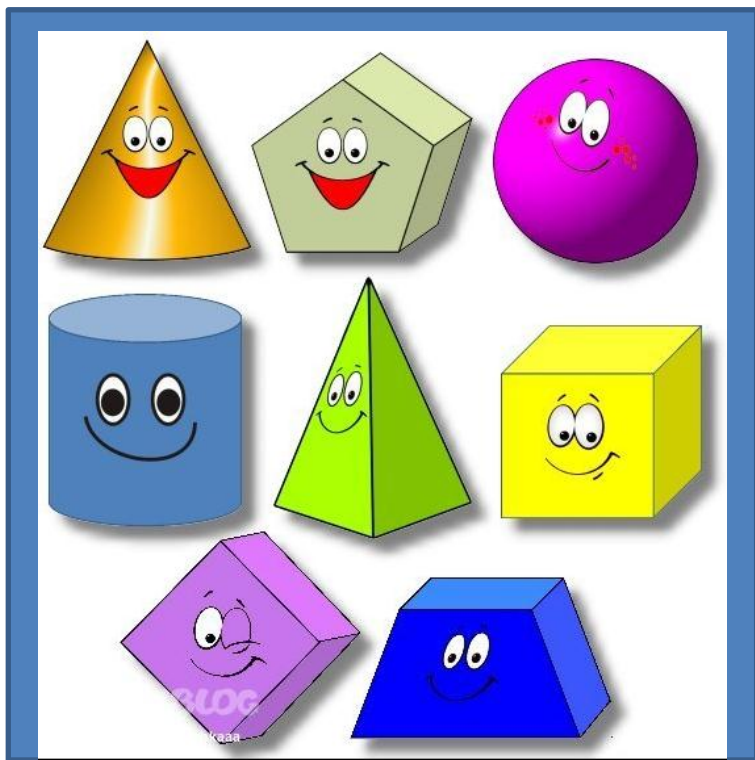
$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{180}{144}} - 1 = 0,5$$

Ответ: 0,5.

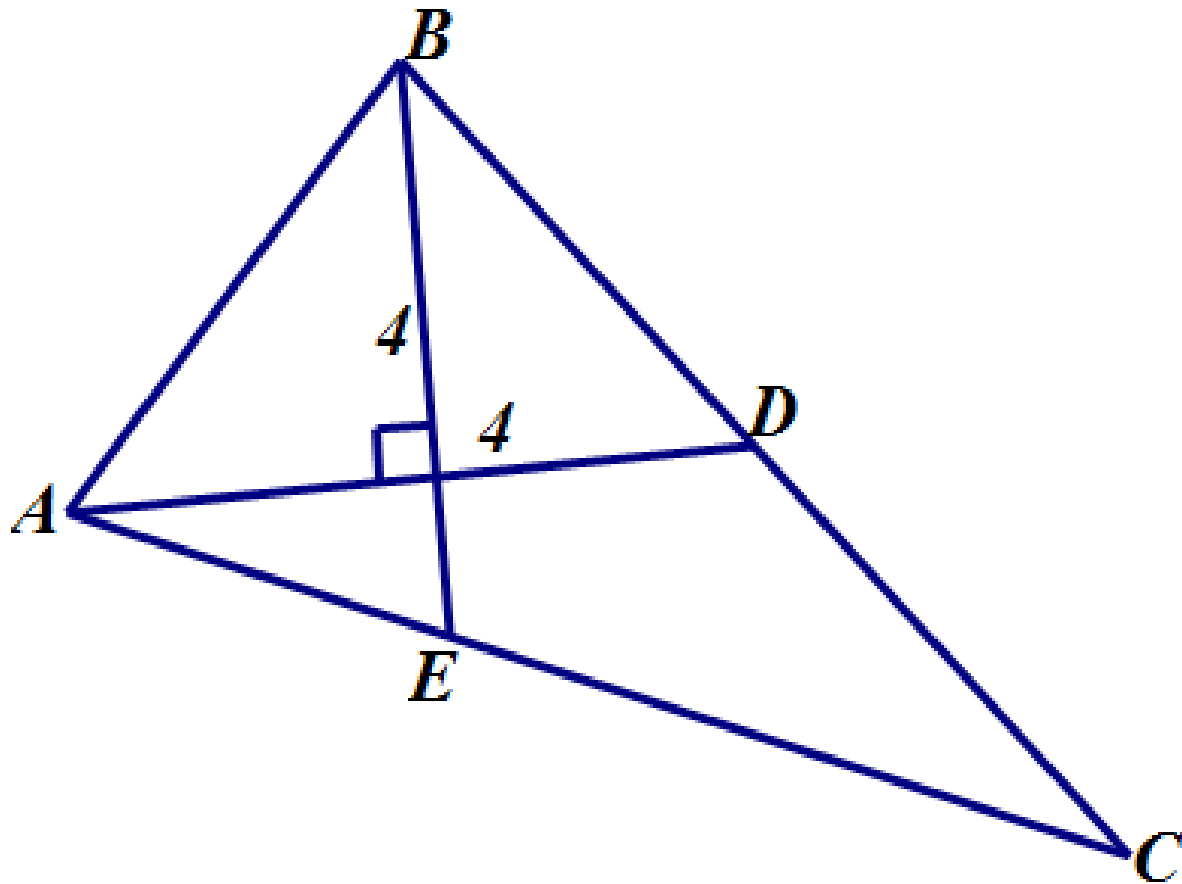
*«Лучше решить
задачу десятью способами,
чем десять задач одним».*



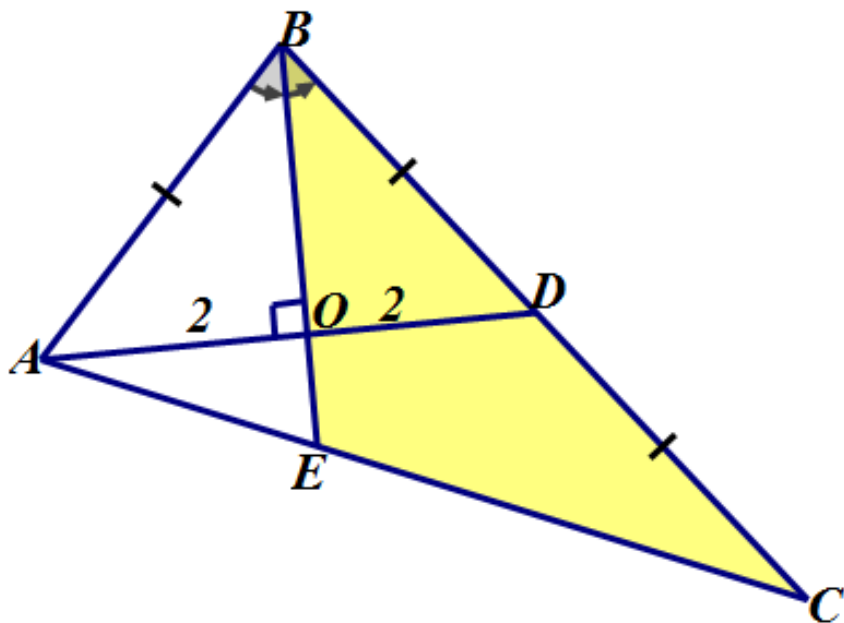
Дьёрдь Пойя



В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC .



Метод дополнительных построений



В равнобедренном $\triangle ABD$
BO – биссектриса и
высота, значит

$$AO = OD = 2,$$

AD – медиана $\triangle ABC$,
тогда $BC = 2AB$.

BE – биссектриса $\triangle ABC$,
следовательно,
 $EC = 2AE$.

**Проведем среднюю линию DF $\triangle BCE$. DF=2.
Тогда OE=1 как средняя линия $\triangle ADF$. BO=3.**

**$\triangle AOB$ прямоугольный.
По теореме Пифагора**

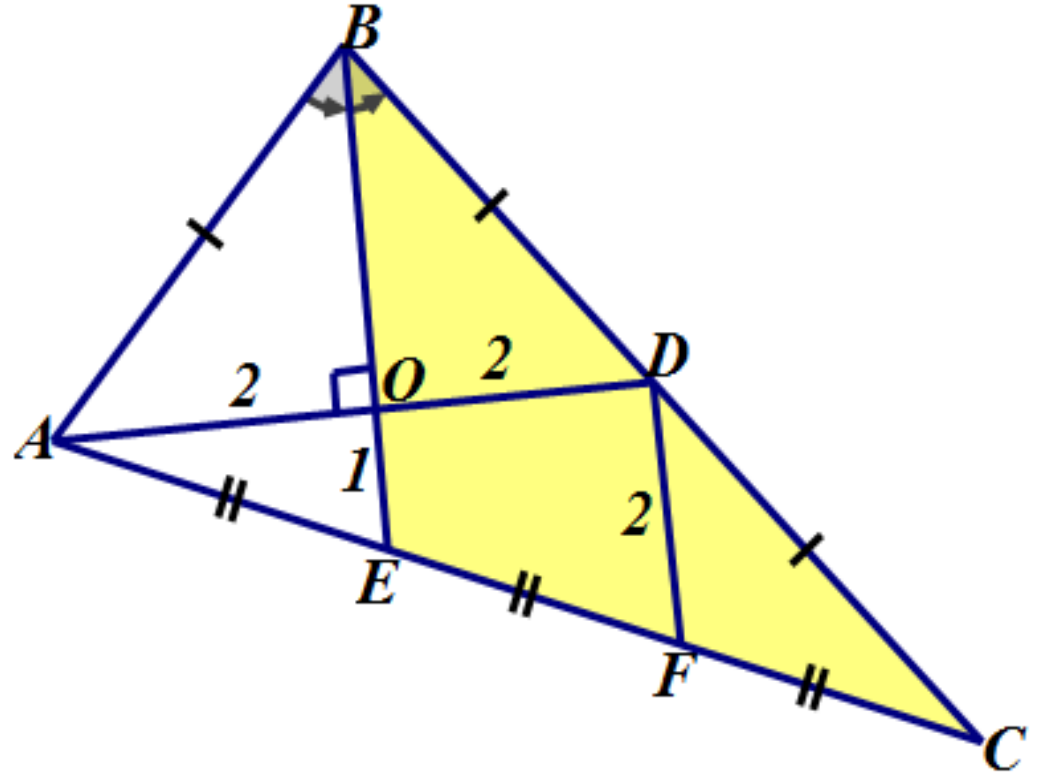
$$\mathbf{AB} = \sqrt{AO^2 + OB^2}$$

$$\mathbf{AB} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\mathbf{BC} = 2\sqrt{13}$$

$$AC=3AE.$$

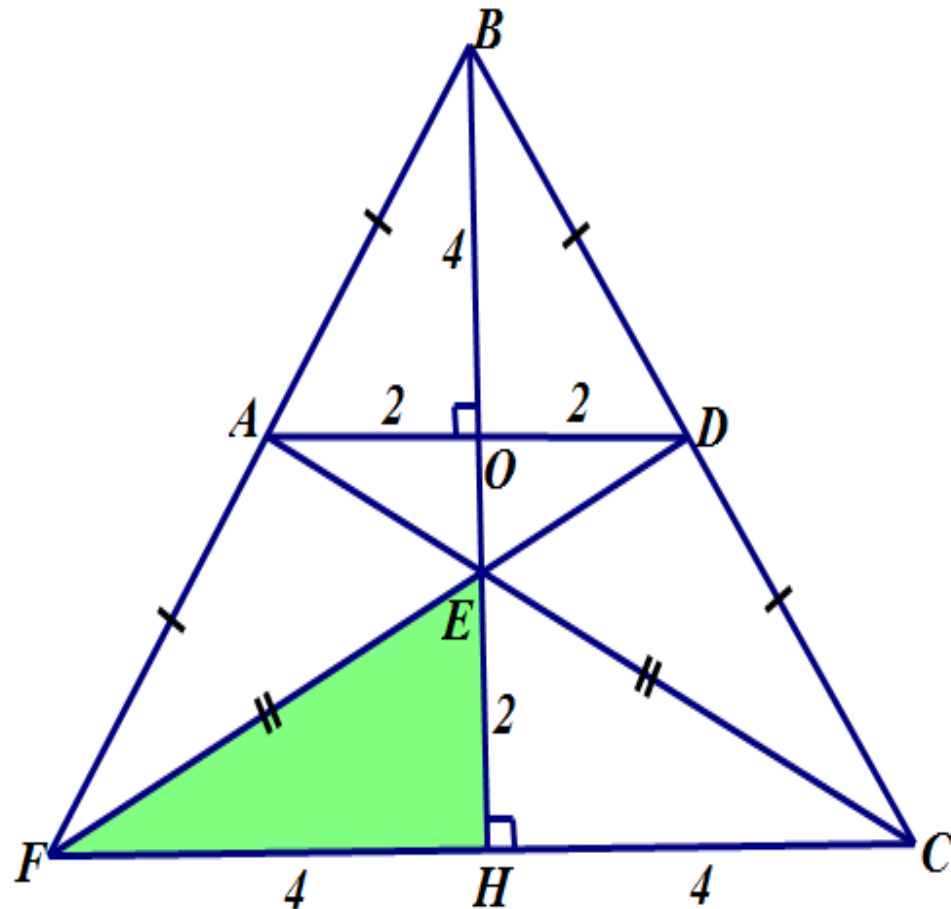
$$\mathbf{AC} = 3\sqrt{AO^2 + OE^2} = 3\sqrt{2^2 + 1^2} = 3\sqrt{5}$$



Метод геометрических преобразований

Построим точку F ,
симметричную точке
 C относительно BE :

$$F = AB \cap DE$$



$\triangle FBC$ равнобедренный,

E – точка пересечения медиан $\triangle FBC$.

$$FE=EC= \frac{2}{3} AC = \sqrt{FH^2 + EH^2} = 2\sqrt{5}$$

$$BH=6, AD - \text{средняя линия, значит } BO=3. AB= \sqrt{13}$$

$$BC=2\sqrt{13}.$$

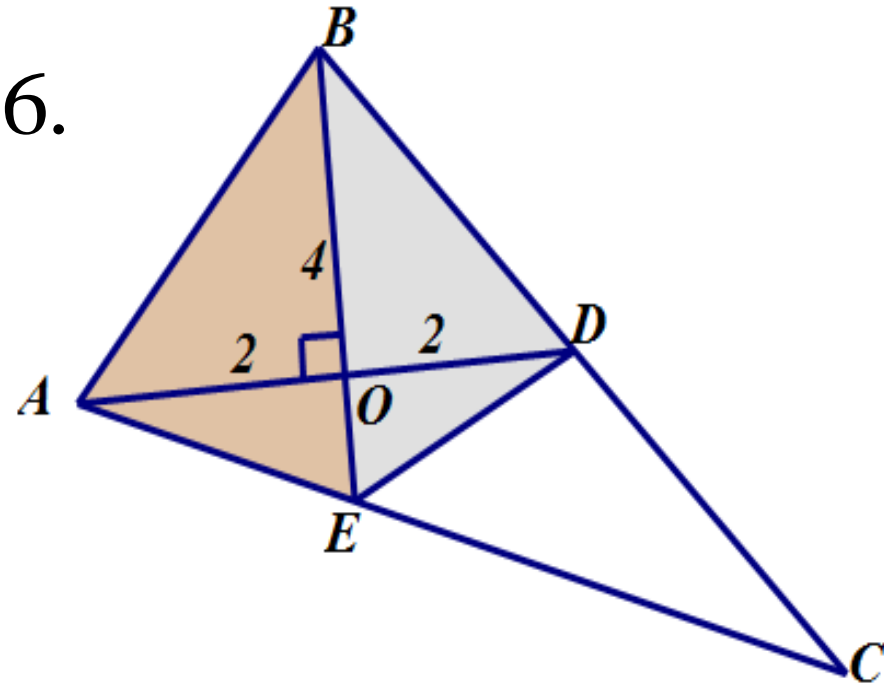
Метод площадей

$$\frac{1}{2}AO \cdot BE = S_{ABE} = S_{BDE} = 4 = S_{CDE}$$

Тогда $S_{ABC} = 12$, а $S_{ABD} = 6$.

$$6 = \frac{1}{2}AD \cdot BO, AD = 4,$$

откуда $BO = 3$.



Далее воспользуемся теоремой Пифагора для отыскания сторон треугольника ABC.

Координатный метод

Уравнение прямой

$$AC: \frac{x-4}{-2-4} = \frac{y+b}{0+b}$$

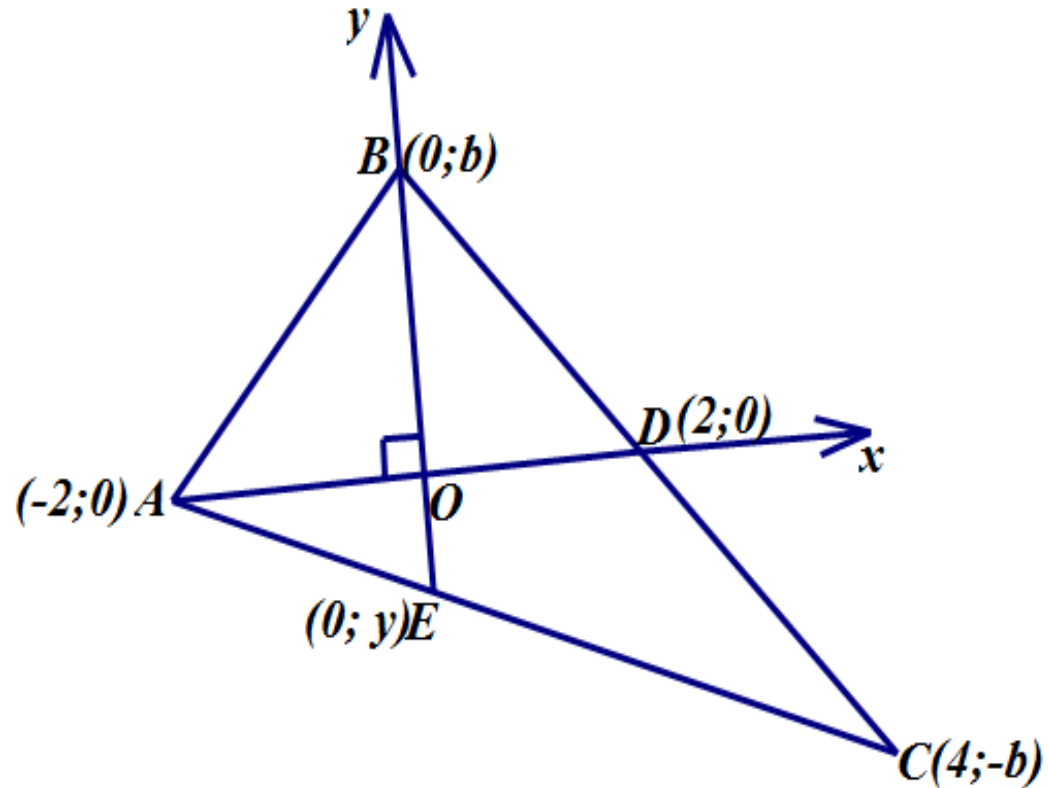
$$\text{или } y = -\frac{b}{6}x + \frac{b}{3}$$

$E \in AC$, поэтому

$$E(0; -\frac{b}{3}). BE=4.$$

$$4 = \sqrt{0^2 + \frac{16b^2}{9}} = \frac{4b}{3}$$

$b=3$. Остается найти стороны по теореме Пифагора



Векторный метод

$$BE=4, \quad \overrightarrow{BE} = \frac{2\vec{a} + \vec{c}}{3}$$

$$AD=4, \quad \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}$$

$$36 = 2a^2 + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$16 = 2a^2 - \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$a = \sqrt{13}, c = 2\sqrt{13}$$

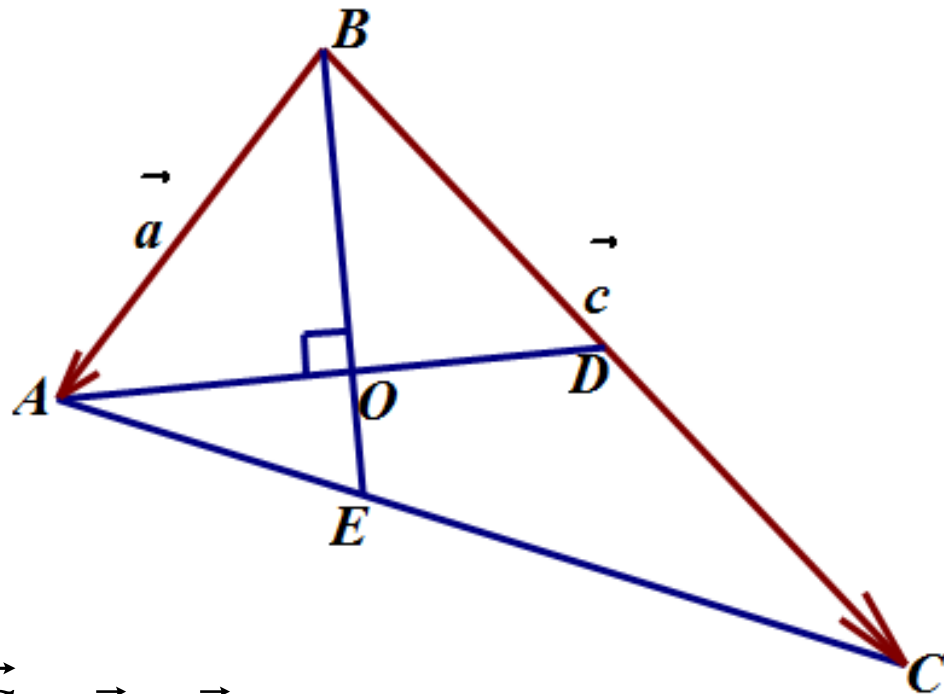
$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$$

$$(\overrightarrow{AC})^2 = (\vec{c} - \vec{a})^2$$

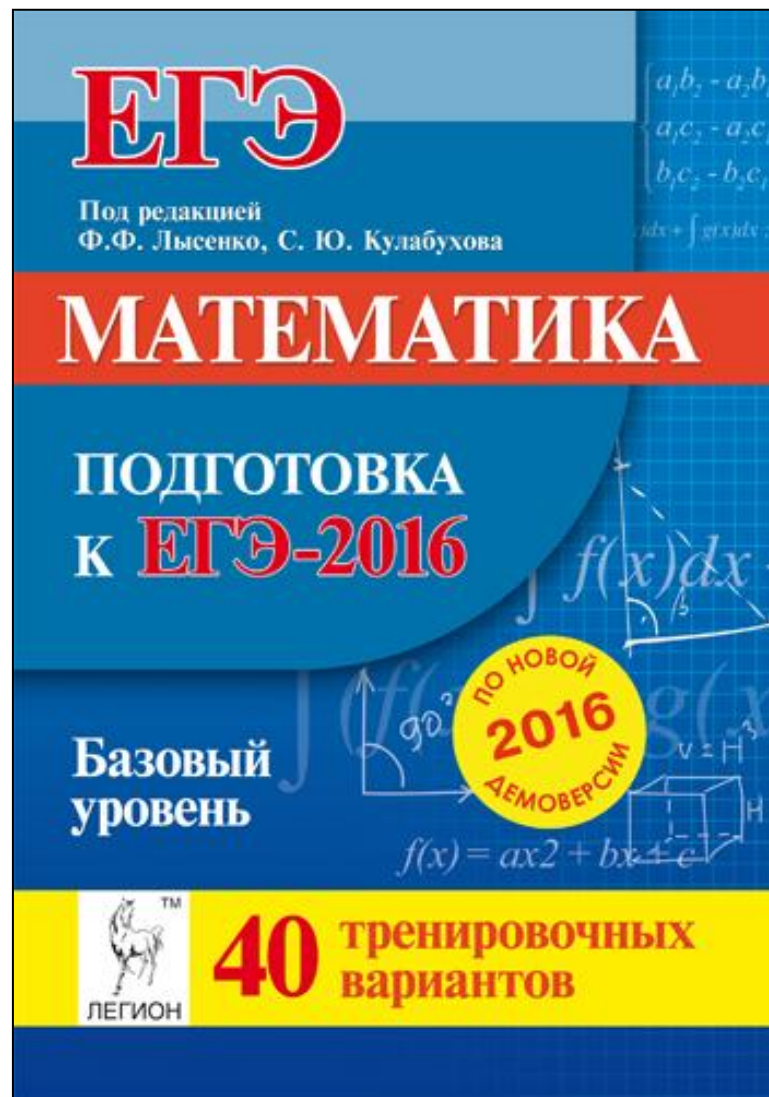
$$\overrightarrow{AC}^2 = c^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + a^2 =$$

$$= 5a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} = 5 \cdot 13 - 20 = 45$$

$$AC = 3\sqrt{5}.$$



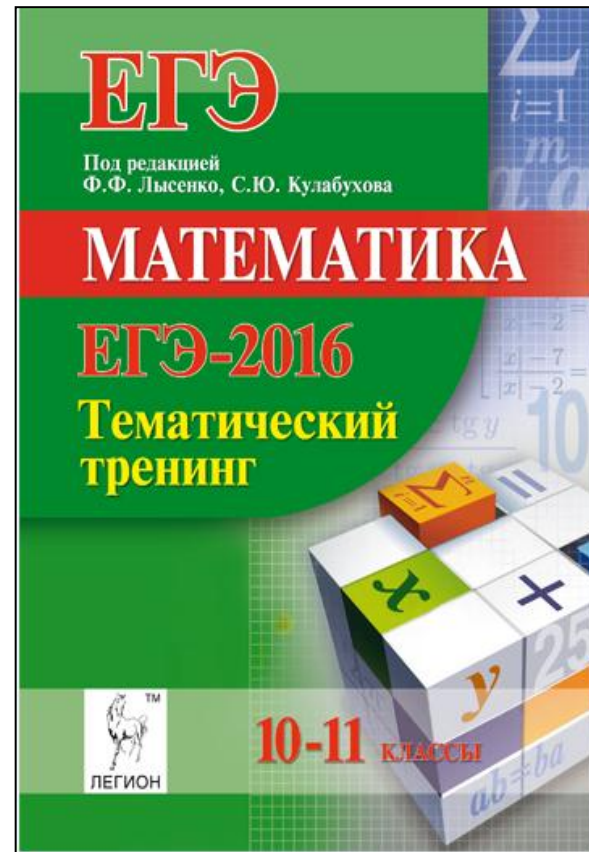
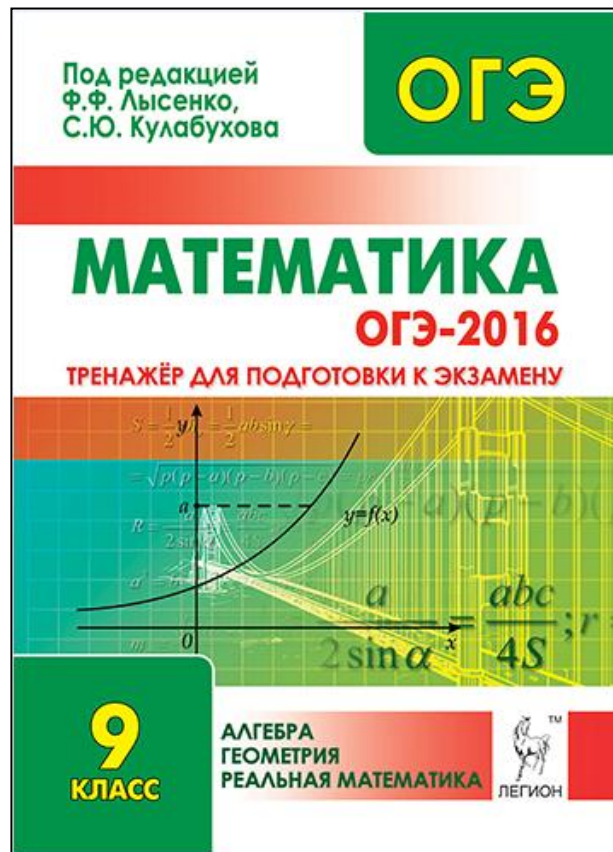
Основные книги для подготовки к ЕГЭ



Основные книги для подготовки к ОГЭ



Дополнительные книги для подготовки к ЕГЭ и ОГЭ





ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ

Издательство «Легион» предлагает дистанционные
(заочные) курсы повышения квалификации
с нормативным сроком освоения 108 часов для работников
образовательных учреждений.

**Ссылка на дистанционное обучение
находится на главной странице сайта www.legionr.ru**

*Деятельность осуществляется на основании лицензии
№ 3031 от 22 ноября 2012 г., выданной Региональной
службой по надзору и контролю в сфере образования
Ростовской области, рег. № 1116100000323.*



Книги можно заказать в нашем
интернет-магазине на сайте:

www.legionr.ru

Спрашивайте
в книжных магазинах города!



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН
www.legionr.ru

Приказом Минобрнауки РФ №729 от 14.12.2009
пособия издательства «Легион» допускаются к использованию
в общеобразовательных учреждениях

Ростов-на-Дону
(863) 303-05-50

**Издательство регулярно
проводит вебинары для
педагогов.**

**По завершении каждого
вебинара участники получают
электронные сертификаты.**

**Ссылки для участия вы
сможете найти на сайте
издательства www.legionr.ru**



***Все вебинары издательства «Легион»
носят обучающий характер***



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН
www.legionr.ru

Приказом Минобрнауки РФ №729 от 14.12.2009
пособия издательства «Легион» допускаются к использованию
в общеобразовательных учреждениях

Ростов-на-Дону
(863) 303-05-50

legionrus@legionrus.com

Вступайте в группу
«Издательство «Легион»
в социальных сетях:

 **Контакте**

 **одноклассники**

 **acebook**

Видео вебинаров смотрите на



.

Адрес для корреспонденции:
344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550