

Муниципальное общеобразовательное учреждение  
«Смирновская средняя школа»



## Исследовательская работа

# Правильные многогранники

I Вахтеровский фестиваль - конкурс  
творческих работ по математике  
«Красота и величие математики»

Автор работы: *Беляк Виктория*  
Класс: 11.

МОУ Смирновская СОШ

Руководитель: *Киселева*  
*Галина Александровна,*  
учитель математики,  
МОУ Смирновская СОШ.



с.Смирново

## *Содержание*

I.	Введение .....	3
II.1	Многогранники.....	4
II. 2	Правильные многогранники.....	5
II. 3	Общие свойства правильныхмногогранников .....	6
II. 4	Комбинаторные свойства правильных многогранников ....	7
III.	Заключение .....	11
IV.	Терминологический словарь .....	12
V.	Используемая литература и Интернет – ресурсы .....	13

## *Введение*

*Правильных многогранников вызывающе мало, но этот весьма скромный по численности отряд сумел пробраться в самые глубины различных наук. Л. Кэрролл*

Математика есть орудие познания и изменение природы человеком. Каждый человек проявляет интерес к многогранникам на протяжении всей своей жизни – от двухлетнего ребёнка, играющего деревянными кубиками, до зрелого математика. Особый интерес к многогранникам связан с красотой и совершенством их форм. Они довольно часто встречаются в природе. Достаточно вспомнить форму снежинок, граней кристаллов, ячеек в пчелиных сотах, спичечного коробка, игрушечного кубика. Ни одни геометрические тела не обладают таким совершенством и красотой, как многогранники.

В нашем учебнике геометрии (авт. Л.С.Атанасян) тема «Многогранники» рассматривается не так подробно, как мне хотелось бы. Тем более, я учусь в классе, где математика не является профильным предметом. На изучении геометрии отводится 1,5 часа в неделю. Этого времени недостаточно, чтобы хорошо подготовиться к сдаче ЕГЭ по математике. Свою дальнейшую судьбу я хочу связать с математикой и мечтаю поступить в АГПИ им.А.П.Гайдара на физико-математический факультет. Поэтому я много времени посвящаю дополнительной подготовке к предстоящим мне испытаниям по любимому предмету: посещаю математический кружок «Эрудит», занимаюсь индивидуально с учителем и много работаю самостоятельно.

В своей работе я хочу более подробно исследовать правильные многогранники, чтобы расширить свое представление о них.

**Цель работы:** - обобщить и систематизировать сведения о правильных многогранниках.

### **Задачи работы:**

- ✓ Собрать материал о правильных многогранниках.
- ✓ Установить взаимосвязь между элементами многогранников.
- ✓ Изучить основные свойства правильных многогранников.
- ✓ Проанализировать и обработать собранную информацию.
- ✓ Сделать презентацию с помощью MicrosoftPowerPoint 2007.
- ✓ Изготовить буклет – памятку, альбом «Правильные многогранники»
- ✓ Оформить материал.
- ✓ Показать полученную презентацию учащимся и учителям.
- ✓ Представить результаты проектно-исследовательской работы.

**Рабочая гипотеза:** Я считаю, что существует связь между элементами многогранников, а также радиусами вписанной, описанной и срединной сфер.

**Объект исследования:** правильные многогранники и их элементы.

**Предполагаемый продукт:** учебная презентация,буклет-памятка, альбом «Правильные многогранники».

**Информационная база:** труды отечественных и зарубежных ученых и практиков, справочники и словари по математике, электронные носители, ресурсы сети Интернет.

**Методы исследования:** метод систематизации и обработки данных, исследовательский и аналитический методы.

**Необходимые ресурсы:**

1. Техническое оснащение: фотоаппарат, компьютер, принтер, сканер.
2. Программное обеспечение: прикладной пакет MicrosoftWord для создания текстовых фрагментов, прикладной пакет MicrosoftVisio для создания рисунков, прикладной пакет MicrosoftPowerPoint для создания презентаций.

## *II.1. Многогранники.*

Многогранник – это часть пространства, ограниченная совокупностью конечного числа плоских многоугольников, соединенных таким образом, что каждая сторона одного является одновременно стороной другого (но только одного). Многоугольники называются гранями, их стороны - ребрами, а вершины – вершинами.

Грани образуют так называемую многогранную поверхность. На многогранную поверхность обычно накладывают такие ограничения:

- 1)каждое ребро должно являться общей стороной двух, и только двух, граней, называемых смежными;
- 2)каждые две грани можно соединить цепочкой последовательно смежных граней;
- 3)для каждой вершины углы прилежащие к этой вершине граней должны ограничивать некоторый многогранный угол.

Многогранники бывают выпуклые и невыпуклые. Выпуклый многогранник – это такой многогранник, который расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани. Это условие эквивалентно каждому из двух других:

- 1)отрезок с концами в любых двух точках многогранника целиком лежит в многограннике;
- 2)многогранник можно представить как пересечение нескольких полупространств.

Невыпуклый многогранник – это многогранник, у которого грани пересекаются.

В свою очередь, выпуклые многогранники делятся на правильные и не правильные многогранники.

## *II.2. Правильные многогранники.*

В различных учебниках по стереометрии используются разные определения правильных многогранников. Так, в учебнике Л.С.Атанасяна выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани - равные правильные многоугольники и, кроме того, в каждой вершине сходится одно и то же число ребер. В учебнике вместо условия равенства правильных многоугольников требуется, чтобы правильные многоугольники были с одним и тем же числом сторон. Пособие А.Д. Александрова и других по сравнению с учебником Л.С.Атанасяна накладывает дополнительное требование - равенство всех двугранных углов правильного многогранника. При этом многогранник называется выпуклым, если любые две его точки соединимы в нем отрезком. Как видим, в перечисленных учебниках даются различные определения понятия правильного многогранника, использующие их разные свойства. *Слайд №7.*

Многогранники классифицируются по числу их граней.

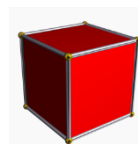
Существует лишь пять правильных многогранников, то есть таких тел, все грани которых состоят из одинаковых правильных многоугольников. Они еще называются телами Платона.

**1. Тетраэдр**, гранями которого являются четыре правильных треугольника, куб с шестью квадратными гранями; Слово «тетраэдр» образовано из двух греческих слов: tetra - «четыре» и hedra - «основание», «грань». Тетраэдр задается четырьмя своими вершинами не лежащими в одной плоскости; грани тетраэдра - четыре треугольника; ребер у тетраэдра шесть. В отличие от произвольной  $n$ -угольной пирамиды (при  $n \geq 4$ ) в качестве основания тетраэдра может быть выбрана любая его грань.



*Тетраэдр*

**2. Куб или правильный гексаэдр**, имеющий шесть квадратных граней. Частный случай параллелепипеда и призмы. Четыре сечения куба являются правильными шестиугольниками — эти сечения проходят через центр куба перпендикулярно четырём его главным диагоналям.



*Куб*

**3. Октаэдр**, имеющий восемь треугольных граней; Октаэдр (греч. октаэдрон, от греч. окτώ, «восемь» и греч. эдра — «основание») имеет 8 треугольных граней, 12 рёбер, 6 вершин, в каждой его вершине сходятся 4 ребра.



*Октаэдр*

**4. Додекаэдр**, гранями которого являются двенадцать правильных пятиугольников; Додекаэдр - двенадцатигранник, составленный из двенадцати

*Додекаэдр*





правильных пятиугольников.  
вершина

Каждая

додекаэдра является вершиной трёх правильных пятиугольников. Таким образом, додекаэдр имеет 12 граней (пятиугольных), 30 рёбер и 20 вершин (в каждой сходятся 3 ребра). Сумма плоских углов при каждой из 20 вершин равна  $324^\circ$ . Додекаэдр имеет центр симметрии и 15 осей симметрии.

Каждая из осей проходит через середины противоположащих параллельных рёбер. Додекаэдр имеет 15 плоскостей симметрии. Любая из плоскостей симметрии проходит в каждой грани через вершину и середину противоположного ребра.



**5. Икосаэдр** с двадцатью треугольными гранями. Икосаэдр (от греч.  $\epsilon\iota\kappa\omicron\sigma\acute{\alpha}\varsigma$  — двадцать;  $-\epsilon\delta\rho\omicron\nu$  — грань, лицо, основание) — правильный выпуклый многогранник, двадцатигранник. Каждая из 20 граней представляет собой равносторонний треугольник. Число рёбер равно 30, число вершин — 12. Икосаэдр имеет 59 звёздчатых форм.

Тип правильного многогранника	Число сторон у грани	Число рёбер, примыкающих к вершине	Общее число вершин	Общее число рёбер	Общее число граней
Тетраэдр	3	3	4	6	4
Гексаэдр (куб)	4	3	8	12	6
Октаэдр	3	4	6	12	8
Додекаэдр	5	3	20	30	12
Икосаэдр	3	5	12	30	20

### II.3. Общие свойства правильных многогранников.

Все правильные многогранники обладают следующими свойствами:

- 1°. Выпуклость многогранника.
- 2°. Все грани - равные правильные многоугольники.
- 3°. Все грани - правильные многоугольники с одним и тем же числом сторон.
- 4°. В каждой вершине сходится одинаковое число рёбер.
- 5°. Все многогранные углы имеют одинаковое число граней.

6°. Равны все многогранные углы.

7°. Равны все двугранные углы.

8°. Равны все ребра многогранника.

9°. Равны все плоские углы многогранника.

#### *II.4. Комбинаторные свойства правильных многогранников*

Эйлером была выведена формула, связывающая число вершин (В), граней (Г) и рёбер (Р) любого выпуклого многогранника простым соотношением:

$$B + \Gamma = P + 2.$$

Отношение количества вершин правильного многогранника к количеству рёбер одной его грани равно отношению количества граней этого же многогранника к количеству рёбер, выходящих из одной его вершины. У тетраэдра это отношение равно 4:3, у гексаэдра и октаэдра — 2:1, а у додекаэдра и икосаэдра — 4:1.

Правильный многогранник может быть комбинаторно описан символом Шлефли  $\{p, q\}$ , где:

$p$  — число сторон каждой грани;

$q$  — число рёбер, сходящихся в каждой вершине.

Символы Шлефли для правильных многогранников приведены в следующей таблице:

Многогранник	тетраэдр	куб	октаэдр	додекаэдр	икосаэдр
Символ Шлефли	$\{3, 3\}$	$\{4, 3\}$	$\{3, 4\}$	$\{5, 3\}$	$\{3, 5\}$

Другой комбинаторной характеристикой многогранника, которую можно выразить через числа  $p$  и  $q$ , является общее количество вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г). Поскольку любое ребро соединяет две вершины и лежит между двумя гранями, выполняются соотношения:

$$p\Gamma = 2P = qB.$$

Из этих соотношений и формулы Эйлера можно получить следующие выражения для В, Р и Г:

$$B = \frac{4p}{4 - (p - 2)(q - 2)}, \quad P = \frac{2pq}{4 - (p - 2)(q - 2)}, \quad \Gamma = \frac{4q}{4 - (p - 2)(q - 2)}.$$

С каждым правильным многогранником связаны определённые углы, характеризующие его свойства.

**Двугранный угол** между смежными гранями правильного многогранника  $\{p, q\}$  задаётся формулой:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\cos(\pi/q)}{\sin(\pi/p)}$$

Иногда удобнее пользоваться выражением через тангенс:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\cos(\pi/q)}{\sin(\pi/h)}$$

где  $h$  принимает значения 4, 6, 6, 10 и 10 для тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра соответственно.

Вычислим градусные меры двугранных углов правильных многогранников и занесем их в таблицу.

Тетраэдр	Куб	Октаэдр	Додекаэдр	Икосаэдр
$p=3, q=3.$	$p=4, q=3.$	$p=3, q=4.$	$p=5, q=3, h=10.$	аналогично
$\sin \frac{Q}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} =$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \approx$ $0,57735$ $\frac{Q}{2} = 35,26^\circ =$ $70,53^\circ.$	$\sin \frac{Q}{2} =$ $\frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} =$ $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{Q}{2} = 45^\circ,$ $Q=90^\circ$	$\sin \frac{Q}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{3}} =$ $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx$ $0,8164969$ $\frac{Q}{2} = 54^\circ 42,$ $Q=109^\circ 24$	$\operatorname{tg} \frac{Q}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{10}} =$ $\frac{1}{2} \cdot 0,3090$ $\approx 1,6181229$ $\frac{Q}{2} = 58^\circ 18, Q=$ $116^\circ 36.$	$Q=138^\circ 17$

Плоский угол между ребрами при вершине можно вычислить по формуле

$$\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ.$$

Результаты вычислений занесены в таблицу (см. далее).

Угловой дефект при вершине многогранника – это разность между  $2\pi$  и суммой углов между рёбрами каждой грани при этой вершине. Дефект  $\delta$  при любой

$$\delta = 2\pi - q\pi \left(1 - \frac{2}{p}\right).$$

вершине правильного многогранника:

По теореме Декарта, он равен  $4\pi$  делённым на число вершин (т.е. суммарный дефект при всех вершинах равен  $4\pi$ ).

$$\delta = \frac{4\pi}{V}$$



Тетраэдр	Куб	Октаэдр	Додекаэдр	Икосаэдр
$\delta = \frac{4\pi}{4} = \pi$	$\delta = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$	$\delta = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$	$\delta = \frac{4\pi}{20} = \frac{\pi}{5}$	$\delta = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$

Все полученные данные заносим в таблицу.

Многогранник	Двугранный угол $\theta$	$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$	Плоский угол между рёбрами при вершине	Угловой дефект ( $\delta$ )
тетраэдр	70.53°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	60°	$\pi$
куб	90°	1	90°	$\frac{\pi}{2}$
октаэдр	109°24	$\sqrt{2}$	60°, 90°	$\frac{2\pi}{3}$
додекаэдр	116°36.	$\varphi$	108°	$\frac{\pi}{5}$
икосаэдр	138°17.	$\varphi^2$	60°, 108°	$\frac{\pi}{3}$

Константа  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  – золотое сечение.

С каждым правильным многогранником связаны три концентрические сферы:

- Описанная сфера, проходящая через вершины многогранника;
- Срединная сфера, касающаяся каждого его ребра в середине;
- Вписанная сфера, касающаяся каждой его грани в её центре.

Радиусы описанной ( $R$ ) и вписанной ( $r$ ) сфер задаются формулами:

$$R = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{q} \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \quad \text{и} \quad r = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{p} \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad \text{где } \theta -$$

двугранный угол между смежными гранями многогранника. Радиус срединной сферы задаётся формулой:

$$\rho = \frac{a \cos(\pi/p)}{2 \sin(\pi/h)},$$

где  $h$  - величина описанная выше, при определении двугранных углов ( $h = 4, 6, 10$  или  $10$ ). Отношения описанных радиусов к вписанным радиусам симметрично относительно  $p$  и  $q$ :

$$\frac{R}{r} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{p} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{q}.$$

Вычислим радиусы описанной, вписанной и срединной сфер при  $a=2$ , (где  $a$  – сторона многогранника).

Тетраэдр	Куб	Октаэдр	Додекаэдр	Икосаэдр
$R = \frac{2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{70.53^\circ}{2} =$ $\sqrt{3} \cdot 0,7080$ $\approx 2,44 \approx$ $\sqrt{1,5} \approx \sqrt{\frac{3}{2}}$	$R = \frac{2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{90^\circ}{2} =$ $\sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}.$	$R = \frac{2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{90^\circ}{2}$ $= 1 \cdot 1,4124 \approx$ $\sqrt{2}$	$R = \sqrt{3}\varphi$ (данные брала из справочника по высшей математике)	$R = \xi\varphi$ (данные брала из справочника по высшей математике)

Константы  $\varphi$  и  $\xi$  задаются выражениями

$$\varphi = 2 \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \xi = 2 \sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = 5^{1/4} \varphi^{-1/2}.$$

Тетраэдр	Куб	Октаэдр	Додекаэдр	Икосаэдр
$r = \frac{2}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{70.53^\circ}{2} =$ $= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$	$r = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{90^\circ}{2} =$ $= 1 \cdot 1 = 1$	$r =$ $\frac{2}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{109^\circ 24'}{2} \approx$ $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} \approx \sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{\varphi^2}{\xi}$	$\frac{\varphi^2}{\sqrt{3}}$

Тетраэдр	Куб	Октаэдр	Додекаэдр	Икосаэдр
$\rho = \frac{2 \cos \frac{\pi}{3}}{2 \sin \frac{\pi}{4}} =$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\rho = \frac{2 \cos \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{\pi}{6}} =$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = \sqrt{2}$	$\rho = \frac{2 \cos \frac{\pi}{3}}{2 \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \cdot 2$ $= 1$	$\varphi^2$	$\varphi$

Площадь поверхности  $S$ :  $S = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Gamma p \operatorname{ctg} \frac{\pi}{p}.$

Тетраэдр	Куб	Октаэдр	Додекаэдр	Икосаэдр
$S = \left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot 4 \cdot 3 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} =$ $= 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$	$S = \left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot 6 \cdot$ $\cdot 4 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 24$	$S = \left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot 8 \cdot 3 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$ $= 24 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$	$S = 60 \frac{\varphi}{\xi}$	$S = 20\sqrt{3}$

Объём правильного многогранника вычисляется, как умноженный на число граней объём правильной пирамиды, основанием которой служит правильный

$p$ -угольник, а высотой — радиус вписанной сферы  $r$ :  $V = \frac{1}{3} r S.$

Тетраэдр	Куб	Октаэдр	Додекаэдр	Икосаэдр
$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot$ $4\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{2}}{6}$ $= \frac{2\sqrt{2}}{3}$	$V = a^3, V = 8$	$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot$ $8\sqrt{3} = \frac{1 \cdot \sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2}}{3 \cdot \sqrt{3}} =$ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$	$V = \frac{20\varphi^3}{\xi^2}$	$V = \frac{20\varphi^2}{3}$

Приведённая таблица содержит полученные данные различных радиусов, площадей поверхностей и объёмов правильных многогранников. Значение длины ребра  $a$  в таблице приравнены к 2.

Многогранник ( $a = 2$ )	Радиус вписанной сферы ( $r$ )	Радиус срединной сферы ( $\rho$ )	Радиус описанной сферы ( $R$ )	Площадь поверхности ( $S$ )	Объём ( $V$ )
тетраэдр	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$4\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$
куб	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	24	8
октаэдр	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	1	$\sqrt{2}$	$8\sqrt{3}$	$\frac{8\sqrt{2}}{3}$
додекаэдр	$\frac{\varphi^2}{\xi}$	$\varphi^2$	$\sqrt{3}\varphi$	$60\frac{\varphi}{\xi}$	$20\frac{\varphi^3}{\xi^2}$
икосаэдр	$\frac{\varphi^2}{\sqrt{3}}$	$\varphi$	$\xi\varphi$	$20\sqrt{3}$	$\frac{20\varphi^2}{3}$

Среди правильных многогранников, как додекаэдр, так и икосаэдр представляют собой лучшее приближение к сфере. Икосаэдр имеет наибольшее число граней, наибольший двугранный угол и плотнее всего прижимается к своей вписанной сфере. С другой стороны, додекаэдр имеет наименьший угловой дефект, наибольший телесный угол при вершине и максимально заполняет свою описанную сферу.

### III. Заключение

Моя гипотеза подтвердилась. Изучив огромное количество литературы, познакоившись с различными понятиями, относящимися к данной теме, поработав над формулами, я пришла к выводу, что действительно существует связь между элементами многогранника, а также радиусами вписанной, описанной и срединной сфер правильных многогранников.

В завершение, я хочу сказать что, многогранные фигуры скрывают в себе некую тайну, встретившись с которой, истинный математик считает необходимым разгадать её. Именно это завораживает и интригует многих людей. Я думаю, что в своей жизни разгадаю еще не одну загадку правильных многогранников.

#### *IV. Терминологический словарь.*

**ВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРАННИК** – это многогранник, в котором ни один прямолинейный отрезок, соединяющий любые две его точки, не содержит точек, принадлежащих внешнему пространству.

**ДОДЕКАЭДР** - правильный многогранник который составлен из двенадцати правильных пятиугольников. Каждая вершина додекаэдра является вершиной трех правильных пятиугольников.

**КУБ** - правильный многогранник который составлен из шести квадратов. Каждая вершина куба является вершиной трех квадратов.

**МНОГОГРАННИК** – это часть пространства, ограниченная совокупностью конечного числа плоских многоугольников, соединенных таким образом, что каждая сторона любого многоугольника является стороной ровно одного другого многоугольника (называемого смежным), причем вокруг каждой вершины существует ровно один цикл многоугольников. Эти многоугольники называются гранями, их стороны – ребрами, а вершины – вершинами многогранника.

**ОКТАЭДР** - правильный многогранник который составлен из восьми равносторонних треугольников. Каждая вершина октаэдра является вершиной четырех треугольников.

**ОСЬ СИММЕТРИИ:** Точки  $A$  и  $A_1$  называются симметричными относительно прямой  $a$ , если прямая  $a$  проходит через середину отрезка  $AA_1$  и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка прямой  $a$  считается симметричной самой себе.

**ПЛОСКОСТЬ СИММЕТРИИ:** Точки  $A$  и  $A_1$  называются симметричными относительно плоскости  $\alpha$ , если плоскость  $\alpha$  проходит через середину отрезка  $AA_1$  и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка плоскости  $\alpha$  считается симметричной самой себе.

**ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОГРАННИК** – это выпуклый многогранник, у которого все его грани – равные правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер.

**ТЕТРАЭДР** - правильный многогранник который составлен из четырех равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной трех треугольников.

**ТОЧКА (ПРЯМАЯ, ПЛОСКОСТЬ)** называется **ЦЕНТРОМ (ОСЬЮ, ПЛОСКОСТЬЮ)** симметрии фигуры, если каждая точка фигуры симметрична относительно нее некоторой точке той же фигуры. Фигура может иметь один или несколько центров симметрии. С симметрией мы часто встречаемся в природе, архитектуре, технике, быту.

**ЦЕНТР СИММЕТРИИ:** Точки  $A$  и  $A_1$  называются симметричными относительно точки  $O$ , если  $O$ - середина отрезка  $AA_1$ . Точка  $O$  считается симметричной самой себе.

#### **ХАРАКТЕРИСТИКА ЭЙЛЕРА**

(для любого правильного многогранника)  $V - P + \Gamma = 2$

$V$  - число вершин,  $P$  - число ребер,  $\Gamma$  - число граней.

### *✓Используемая литература и Интернет – ресурсы*

1. Азевич А.И. Двадцать уроков гармонии: Гуманитарно-математический курс. М.: Школа-Пресс, 1998. (Библиотека журнала «Математика в школе». Вып.7).
2. Винниджер. Модели многогранников. М., 1975.
3. Геометрия: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кардомцев и др.–5-е изд.– М.: Просвещение, 1997.
4. Гросман С., Тернер Дж. Математика для биологов. М., 1983.
5. Кованцов Н.И. Математика и романтика. Киев, 1976.
6. Смирнова И.М. В мире многогранников. М., 1990.
7. Шафрановский И.И. Симметрия в природе. Л., 1988.
8. [http://ru.wikipedia.org/wiki/Тело\\_Платона](http://ru.wikipedia.org/wiki/Тело_Платона)
9. [http://krugosvet.ru/enc/nauka\\_i\\_tehnika/matematika/MNOGOGRANNIK](http://krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/matematika/MNOGOGRANNIK).
10. <http://polygran.boom.ru/base/12.htm>
11. <http://www.Zaitseva-Irina.ru>



