

Джакубалиева Юлия Владимировна

учитель математики

МОУ-СОШ № 1 г. Маркса Саратовской области

г. Маркс, Саратовская область

Якубалиева Замира Жумагалиевна

учитель математики

МБОУ «СОШ с. Первомайское Ровенского

муниципального района Саратовской области»

с. Первомайское, Саратовская область

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭВРИСТИК ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ В НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

Аннотация: в статье описывается методика организации деятельности учащихся по поиску и применению эвристических приемов (эвристик) в ходе решения задач в натуральных числах.

Ключевые слова: основное общее образование, математика, задача, эвристика, натуральные числа.

Работа с натуральными числами на уроках [1, с. 171] позволяет выявить, а в дальнейшем и использовать достаточно большое число эвристических приемов (эвристик), которые помогают в решении задач.

Под «эвристическим приемом» будем понимать преобразующее действие, позволяющее составить алгоритм решения проблемной задачи [2].

Значительное количество эвристик можно получить, решая задачу повышенной сложности на множестве натуральных чисел.

Задача. Найдите сумму $60^2 - 59^2 + 58^2 - 57^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

Если ученики не выдвигают идей решения, то предлагаем *восстановить числовое выражение и найти его значение, используя правила арифметики* (эвристика 1): $60^2 - 59^2 + 58^2 - 57^2 + \dots + 2^2 - 1^2 = 60^2 - 59^2 + 58^2 - 57^2 + 56^2 - 55^2 + 54^2 - 53^2 + 52^2 - 51^2 + 50^2 - 49^2 + 49^2 - 47^2 + 46^2 - 45^2 + 44^2 - 43^2 + 42^2 - 41^2 + 40^2 - 39^2 + 38^2 - 37^2 + 36^2 - 35^2 + 34^2 - 33^2 + 32^2 - 31^2 + 30^2 - 29^2 + 28^2 - 27^2 + \dots$

$$26^2 - 25^2 + 24^2 - 23^2 + 22^2 - 21^2 + 20^2 - 19^2 + 18^2 - 17^2 + 16^2 - 15^2 + 14^2 - 13^2 + + 12^2 - 11^2 + 10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + 6^2 - 5^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 = 3600 - 3481 + 3364 - 3249 + 3136 - 3025 + 2916 - 2809 + 2704 - 2601 + \dots = 600 - 481 + 364 - 249 + + 136 - 25 + 916 - 809 + 704 - 601 + \dots = 119 + 115 + 111 + 107 + 103 + \dots =$$

Уже при вычислении первых 10 значений, учащиеся замечают, что разности образуют пары.

Разности образуют убывающую арифметическую прогрессию, первый член которой 119, разность прогрессии (-4) , число членов -30 .

Второе замечание позволяет решить задачу, не возводя в квадрат оставшиеся 50 чисел, а применив формулу суммы для 30 членов нашей прогрессии:

$$S_{30} = \frac{2 \cdot 119 + (30 - 1) \cdot (-4)}{2} \cdot 30 = 1830.$$

Из первого замечания следует традиционный метод решения заданий, подобных данному, – *группировка членов* (эвристика 2).

В результате группировки явным образом выделены разности квадратов, к которым применима известная формула сокращённого умножения.

Первый способ группировки: $(60^2 - 59^2) + (58^2 - 57^2) + \dots + (2^2 - 1^2) = (60 - 59)(60 + 59) + (58 - 57)(58 + 57) + \dots + (2 - 1)(2 + 1) = 119 + 115 + \dots + 3 =$

$$\frac{119 + 3}{2} \cdot 30 = 1830.$$

Второй способ группировки: $(60^2 - 1^2) - (59^2 - 2^2) + \dots + (32^2 - 29^2) - (31^2 - 30^2) = (60 - 1)(60 + 1) - (59 - 2)(59 + 2) + \dots + (32 - 29)(32 + 29) - (31 - 30)(31 + 30) =$

$$59 \cdot 61 - 57 \cdot 61 + \dots + 3 \cdot 61 - 1 \cdot 61 = (59 - 57 + \dots + 3 - 1) \cdot 61 = \dots$$

В скобках – знакопеременная последовательность, к которой можно применить эвристику 2, то есть сгруппировать разности, получим: $\dots = 2 \cdot 15 \cdot 61 = 1830$.

Можно поступить по-другому. Не будем пока учитывать знаки (эвристика 3): 59, 57, 55, ..., 3, 1 – арифметическая прогрессия с разностью (-2) , а значит, из неё можно получить две другие арифметические прогрессии, взяв сначала числа, стоящие на нечётных, а затем на чётных позициях, при этом разность

уменьшится в 2 раза. Итак, 59, 55, 51, ... 3 (15 членов) и 57, 53, 49, ... 1 (15 членов). Возвращаемся к нашей знакопереключающейся последовательности и замечаем, что её можно представить в виде разности:

$$(59 + 55 + \dots + 3) - (57 + 53 + \dots + 1).$$

Эта эвристика носит название *группировки по знакам* (эвристика 4).

Вернёмся к решению задачи: $\dots = ((59 + 55 + \dots + 3) - (57 + 53 + \dots + 1)) \cdot 61 =$
 $\left(\frac{59+3}{2} \cdot 15 - \frac{57+1}{2} \cdot 15 \right) \cdot 61 = \frac{62-58}{2} \cdot 15 \cdot 61 = 1830.$

Теперь предлагаем учащимся проверить, как работают наши эвристики. Применим эвристику 4 к решению исходной задачи: $60^2 - 59^2 + 58^2 - 57^2 + \dots + 2^2 - 1^2 = 60^2 + 58^2 + \dots + 2^2 - 59^2 - 57^2 - \dots - 1^2 = 60^2 + 58^2 + \dots + 4^2 + 2^2 - (59^2 + 57^2 + \dots + 3^2 + 1^2) = \dots$

Если бы не «квадраты», то мы применили бы известную формулу суммы членов арифметической прогрессии.

Главный вывод: *эвристики помогают в поиске решения, но не гарантируют получения ответа!!!*

Если бы не «квадраты» ... Предлагаем учащимся «избавиться от «квадратов» двузначных чисел в исходном выражении $60^2 - 59^2 + 58^2 - 57^2 + \dots + 2^2 - 1^2 = \dots$ замечаем, что 60 от 59 отличается на 1, от 58 на 2 и т. д.

Заменяем несколько первых чисел разностью с уменьшаемым 60 (эта эвристика получила название «*решить часть задачи*» – эвристика 5):

$60^2 - 59^2 = 60^2 - (60 - 1)^2 + (60 - 2)^2 - (60 - 3)^2 = 60^2 - 60^2 - 1^2 + 2 \cdot 60 \cdot 1 + 60^2 + 2^2 - 2 \cdot 60 \cdot 2 - 60^2 - 3^2 + 2 \cdot 60 \cdot 3 = -1^2 + 2 \cdot 60 \cdot 1 + 2^2 - 2 \cdot 60 \cdot 2 - 3^2 + 2 \cdot 60 \cdot 3 = 2 \cdot 60 \cdot (1 - 2 + 3) - 3^2 + 2^2 - 1^2.$ Сопоставление с исходным выражением позволяет сформулировать выводы:

а) не связанные произведением слагаемые образуют ту же последовательность, что и последние слагаемые исходного выражения;

б) если взять n первых слагаемых ($n < 60$), то в результате получим произведение двух, 60 и суммы $(n - 1)$ -го натурального числа с положительными нечётными слагаемыми и отрицательными чётными, сложенное с суммой $(n - 1)$ -

го квадрата натуральных чисел (причём перед квадратом чётного числа будет стоять знак сложения, а перед квадратом нечётного числа будет стоять знак вычитания).

в) если сгруппировать слагаемые по 10, и в каждой десятке заменить числа разностью с уменьшаемым 60, 50, ..., 10 соответственно, то в результате получим:

$$\begin{aligned}
 &= 2 \cdot 60 \cdot (1 - 2 + 3 - 5 + 6 - 7 + 8 + 9) - 9^2 + 8^2 - \dots + 2^2 - 1^2 + \\
 &+ 2 \cdot 50 \cdot (1 - 2 + 3 - 5 + 6 - 7 + 8 + 9) - 9^2 + 8^2 - \dots + 2^2 - 1^2 + \\
 &+ 2 \cdot 40 \cdot (1 - 2 + 3 - 5 + 6 - 7 + 8 + 9) - 9^2 + 8^2 - \dots + 2^2 - 1^2 + \\
 &+ 2 \cdot 30 \cdot (1 - 2 + 3 - 5 + 6 - 7 + 8 + 9) - 9^2 + 8^2 - \dots + 2^2 - 1^2 + \\
 &+ 2 \cdot 20 \cdot (1 - 2 + 3 - 5 + 6 - 7 + 8 + 9) - 9^2 + 8^2 - \dots + 2^2 - 1^2 + \\
 &+ 2 \cdot 10 \cdot (1 - 2 + 3 - 5 + 6 - 7 + 8 + 9) - 9^2 + 8^2 - \dots + 2^2 - 1^2 = \\
 &= 2 \cdot (60 + 50 + 40 + 30 + 20 + 10) \cdot 5 + 6 \cdot (-9^2 + 8^2 - \dots + 2^2 - 1^2) = \\
 &= 10 \cdot 210 + 6 \cdot (-81 + 64 - 49 + 36 - 25 + 16 - 9 + 4 - 1) = 2100 - 270 = 1830.
 \end{aligned}$$

Случай, когда группировка слагаемых по 10 сопровождается заменой числа суммой с 50, ..., 10 соответственно, учащимся предлагается для самостоятельного решения.

Ещё один способ избавиться от квадратов связан с фигурными (квадратными) числами. Демонстрационная миниатюра «Сумма нечётных чисел» (<http://www.etudes.ru/ru/sketches/odd-numbers-sum/>) даёт наглядное представление о возможности заменить квадрат любого натурального числа n суммой первых n нечётных чисел $(2n - 1)$: $60^2 - 59^2 + 58^2 - 57^2 + \dots + 2^2 - 1^2 =$

$$\begin{aligned}
 &= 119 + 117 + 115 + 113 + \dots + 3 + 1 - \text{представление числа } 60^2 \\
 &= 119 - 117 - 115 - 113 - \dots - 3 - 1 + \text{представление числа } 59^2 \\
 &= 119 - 117 + 115 + 113 + \dots + 3 + 1 - \text{представление числа } 58^2 \\
 &117 + 115 - 113 - \dots - 3 - 1 + \text{представление числа } 57^2 \\
 &117 + 115 - 113 - \dots + 3 + 1 - \text{представление числа } 2^2 \\
 &117 + 115 - 113 - \dots - 3 - 1 = \text{представление числа } 1^2 \\
 &= \frac{119 + 3}{2} \cdot 30 = 1830.
 \end{aligned}$$

Представленное решение, как и миниатюра, даёт наглядное представление о способе решения исходной задачи. Эвристика, лежащая в его основе, звучит как «Примени геометрию!».

Эвристика «Примени алгебру!» для нашей задачи формулируется вполне конкретно: «Реши задачу в общем виде»; – то есть предполагает нахождение суммы $n^2 - (n - 1)^2 + (n - 2)^2 - (n - 3)^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

Работа по поиску эвристик позволяет привлечь средства всех трёх важнейших разделов школьного курса математики: арифметики, алгебры, геометрии.

Список литературы

1. Капитонова Т.А. Решение историко-математических задач на уроках алгебры / Т.А. Капитонова, А.С. Пронина // Инновационная стратегия развития педагогического образования: Сборник научных трудов Тринадцатой Международной очно-заочной научно-методической конференции: В 2 ч. Ч. 1. – Саратов: Центр «Просвещение», 2016. – С. 170–172.

2. Мугаллимова С.Р. О видах эвристических приемов [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=28810905> (дата обращения: 27.11.2017).