

The background features a gradient from deep red at the top to dark blue at the bottom, speckled with white stars. Overlaid on this are several faint, white geometric patterns: concentric circles, arcs, and dashed lines with arrows, some resembling a circular scale with numerical markings (40, 150, 160, 170, 180, 190, 200, 210, 220, 230, 240, 250, 260).

# МЕТОД КРАМЕРА

ПОДГОТОВИЛИ:

МАМЛЫГО АЛЕКСАНДР, ДУДКО МАТВЕЙ 9А КЛАСС

ГБОУ ФМЛ №366



# КРАМЕР, ГАБРИЭЛЬ

## (31 ИЮЛЯ 1704 - 4 ЯНВАРЯ 1752)

Родился в Женеве (Швейцария), в семье врача.

В детстве опережал своих сверстников в интеллектуальном развитии и демонстрировал завидные способности в области математики.

Был преподавателем в Женевском университете.

Много путешествовал по Европе, перенимая опыт у знаменитых математиков своего времени – Иоганна Бернулли и Эйлера в Базеле, Галлея и де Муавра в Лондоне, Мопертюи и Клеро в Париже и других.

Талантливый учёный написал множество статей по: геометрии, истории, математике, философии.

Крамер - один из основоположников линейной алгебры.

Одна из самых известных его работ - «Введение в анализ алгебраических кривых», опубликована на французском языке в 1750 году. В ней Крамер определяет систему линейных уравнений и решает её с помощью алгоритма, названного позже его именем – метод Крамера.





# ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

- Из некоторого листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Б и 675 заготовок типа В. При этом можно применять три способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице.
- Определить количество листов материала, которое раскраивается каждым способом?

Тип заготовки	Способ раскроя		
	1	2	3
А	3	2	1
Б	1	6	2
В	4	1	5

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 360 \\ x + 6y + 2z = 300 \\ 4x + y + 5z = 675 \end{cases}$$







# НЕМНОГО ТЕОРИИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

- 
- где  $x_1, x_2, x_3$  - неизвестные,  $a_{ij}$  - коэффициенты ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ),
- $b_1, b_2, b_3$  - свободные члены.
- Тройка чисел  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  называется решением системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными, если при подстановке их в уравнения системы вместо  $x_1, x_2, x_3$  получают верные числовые равенства.



# МЕТОД КРАМЕРА

Пусть нам требуется решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

- в которой определитель системы (он составлен из коэффициентов при неизвестных)  $\Delta \neq 0$ , а определители  $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$  получаются из определителя системы  $\Delta$  посредством замены свободными членами элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

- Теорема (правило Крамера). Если определитель системы  $\Delta \neq 0$ , то рассматриваемая система (1) имеет одно и только одно решение, причём:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$$



# ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

$$\Delta = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} A_{1j}$$

- 
- где  $A_{1j}$  - алгебраическое дополнение элемента  $a_{1j}$  матрицы



# ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

Определителем матрицы первого порядка является сам единственный элемент матрицы

$$\Delta|a| = a$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Алгебраическое дополнение

$$\Delta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * |a_{22}| - a_{12} * |a_{21}|$$

Формула для нахождения главного определителя матрицы второго порядка

Пример СЛАУ:

Системы  
Линейных  
Алгебраических  
Уравнений





# ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

$$\Delta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} * a_{11} * |a_{22}| + (-1)^{1+2} * a_{12} * |a_{21}|$$

Алгебраическое  
дополнение

Алгебраическое  
дополнение



# ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

$$\Delta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} * a_{11} * \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} * a_{12} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} * a_{13} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Алгебраическое  
дополнение

$$\Delta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} * a_{11} * \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} * a_{12} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} * a_{13} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Алгебраическое  
дополнение

$$\Delta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} * a_{11} * \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} * a_{12} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} * a_{13} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Алгебраическое  
дополнение

$$\Delta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} * a_{11} * \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} * a_{12} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} * a_{13} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$



# РЕШИТЬ СИСТЕМУ МЕТОДОМ КРАМЕРА:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 360 \\ x + 6y + 2z = 300 \\ 4x + y + 5z = 675 \end{cases}$$

• Решение:

1. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (6 \cdot 5 - 2 \cdot 1) - 2 \cdot (1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) + 1 \cdot (1 \cdot 1 - 6 \cdot 4) = 67$$

2. Так как определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.  
Составим и вычислим необходимые определители :

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 360 & 2 & 1 \\ 300 & 6 & 2 \\ 675 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 360 \cdot (6 \cdot 5 - 2 \cdot 1) - 2 \cdot (300 \cdot 5 - 2 \cdot 675) + 1 \cdot (300 \cdot 1 - 6 \cdot 675) = 6030$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 360 & 1 \\ 1 & 300 & 2 \\ 4 & 675 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (300 \cdot 5 - 2 \cdot 675) - 360 \cdot (1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) + 1 \cdot (1 \cdot 675 - 4 \cdot 300) = 1005$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 360 \\ 1 & 6 & 300 \\ 4 & 1 & 675 \end{vmatrix} = 3 \cdot (6 \cdot 675 - 300 \cdot 1) - 2 \cdot (1 \cdot 675 - 300 \cdot 4) + 360 \cdot (1 \cdot 1 - 4 \cdot 6) = 4020$$



# РЕШИТЬ СИСТЕМУ МЕТОДОМ КРАМЕРА

- Находим неизвестные по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{6030}{67} = 90,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{1005}{67} = 15,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{4020}{67} = 60.$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 360 \\ x + 6y + 2z = 300 \\ 4x + y + 5z = 675 \end{cases}$$

Ответ:

$x = 90; y = 15; z = 60$



# МЕТОД КРАМЕРА

## ПРОБЛЕМА

- Вычисление определителя  $n$ -го порядка.

## РЕШЕНИЕ

- Автоматизация вычисления определителя  $n$ -го порядка.

# ЗАДАЧА: РЕШИТЬ СИСТЕМУ

$$\begin{cases} 2a + 3b - 4c = 5 \\ 2a + 5b - e = 4 \\ 2a + b + e = 6 \\ -a + c + d = -14 \\ 5a + 3c = -10 \end{cases}$$



# РЕАЛИЗАЦИЯ

MATLAB

The image displays the MATLAB R2011a environment. The Command Window shows the execution of a script that defines two matrices, M and M1, and calculates their determinants and related variables. The Workspace window shows the current state of the workspace, including the matrices M, M1, M2, and the calculated variables delta, delta1, delta2, x, and y. The Command History window shows the sequence of commands executed.

**Command Window:**

```
>> M = [2 3; 1 2]
M =
     2     3
     1     2

>> det(M)
ans =
     1

>> delta = ans
delta =
     1

>> M1 = [4 3; 3 2]
M1 =
     4     3
     3     2

>> delta1 = det(M1)
delta1 =
    -1

>> M2 = [2 4; 1 3]
M2 =
     2     4
     1     3

>> delta2 = det(M2)
delta2 =
     2

>> x = delta1 / delta
x =
    -1

>> y = delta2 / delta
y =
     2
```

**Workspace:**

Name	Value	Min	Max
M	[2,3;1,2]	1	3
M1	[4,3;3,2]	2	4
M2	[2,4;1,3]	1	4
ans	1	1	1
delta	1	1	1
delta1	-1	-1	-1
delta2	2	2	2
x	-1	-1	-1
y	2	2	2

**Command History:**

```
14.02.2017 0:58 -->
>> M = [2 3; 1 2]
>> det(M)
>> delta = ans
>> M1 = [4 3; 3 2]
>> delta1 = det(M1)
>> M2 = [2 4; 1 3]
>> delta2 = det(M2)
>> x = delta1 / delta
>> y = delta2 / delta

19.02.2017 22:44 -->
>> M = [2 3; 1 2]
>> det(M)
>> M = [2 3; 1 2]
>> det(M)
>> delta = ans
>> M1 = [4 3; 3 2]
>> delta1 = det(M1)
>> M2 = [2 4; 1 3]
>> delta2 = det(M2)
>> x = delta1 / delta
>> y = delta2 / delta
```

# ПРИМЕР АВТОМАТИЗАЦИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Метод Крамера

Количество элементов в системе:  
3

Ввод данных:  
3 2 1 360 1 6 2 300 4 1 5 675

----Пример ввода данных----

Вид уравнений:  
 $k_1 \cdot x[1] + k[2] \cdot x[2] + \dots = k_n$

Пример заиси в программу:  
 $k_1 k_2 k_3 \dots k_n \dots$

После полного  
переписывания коэффициентов  
первого уравнения также через  
пробел продолжаем вводить  
остальные числа

$(3) \cdot X[0] + (2) \cdot X[0] + (1) \cdot X[0] + (360) == 0$   
 $(1) \cdot X[1] + (6) \cdot X[1] + (2) \cdot X[1] + (300) == 0$   
 $(4) \cdot X[2] + (1) \cdot X[2] + (5) \cdot X[2] + (675) == 0$   
  
 $X[0] == 90$   
 $X[1] == 15$   
 $X[2] == 60$

Ввод из файла

Решить

Очистить



# ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ПРИЕМЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

- Метод рекурсии



# ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6d/Gabriel\\_Cramer.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6d/Gabriel_Cramer.jpg)
- Биография:
- <http://www.calend.ru/person/1064/>
- Теория:
- <http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/lecture12.html>
- <http://www.km.ru/referats/304DC7EF274042C98ABD35BBFC0A120A>
- <http://group22x.narod.ru/grenkin/habr/1.png>
- [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5\\_%D0%B4%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%B4%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5)
- <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C>
- [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4\\_%D0%9A%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%B0](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%9A%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%B0)