



Смирнова Ирина Михайловна, доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры элементарной математики и методики обучения математики Московского педагогического государственного университета.

Смирнов Владимир Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой элементарной математики и методики обучения математики Московского педагогического государственного университета.

Сайт: vasmirnov.ru

ПРОЕКТЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

Проекты должны отвечать следующим требованиям.

I. Тема проекта должна быть интересна для учащихся, создавать мотивацию для её исследования.

II. Проект должен соответствовать целям и задачам обучения, учитывать индивидуальные и возрастные особенности учащихся, опираться на пройденный учебный материал.

III. Содержание проекта должно быть значимым с точки зрения математического образования и с точки зрения математики или её приложений. Оно может расширять и углублять основное содержание школьного курса математики, отражать некоторые современные направления математики, иметь исторический, научно-популярный или прикладной характер.

IV. Методы исследования, используемые в проекте, должны быть доступны для учащихся.

V. Учащиеся должны быть обеспечены литературой, интернет-ресурсами, заданиями для самостоятельной работы и другими учебными материалами для выполнения проекта.

VI. Проект должен допускать выбор индивидуальной траектории его выполнения учащимися таким образом, что переход к следующему этапу выполнения проекта зависит от выполнения предыдущего этапа.

VII. Время, отводимое на проект, должно соответствовать объёму работы, необходимому для выполнения этого проекта.

VIII. Проект должен предполагать объективную оценку его выполнения, например, балльно-рейтинговую систему оценивания выполнения заданий проекта.

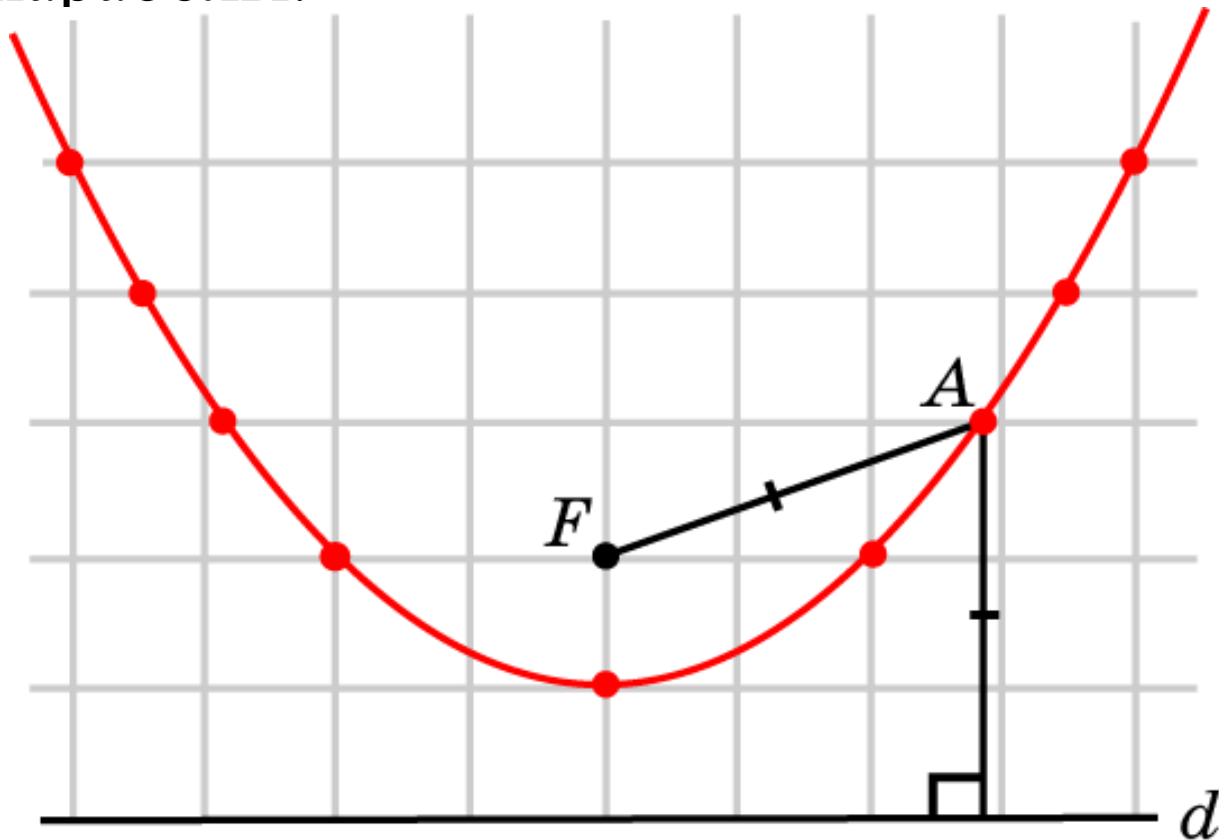
Этапы работы над проектом

Работа учащегося над проектом может включать в себя следующие этапы.

1. Выбор темы.
2. Знакомство с литературой, интернет-ресурсами и другими источниками по выбранной теме.
3. Изучение теоретического материала.
4. Выполнение предложенных заданий и решение задач.
5. Оформление проекта.
6. Выступление с докладом о результатах выполнения проекта или сдача экзамена.

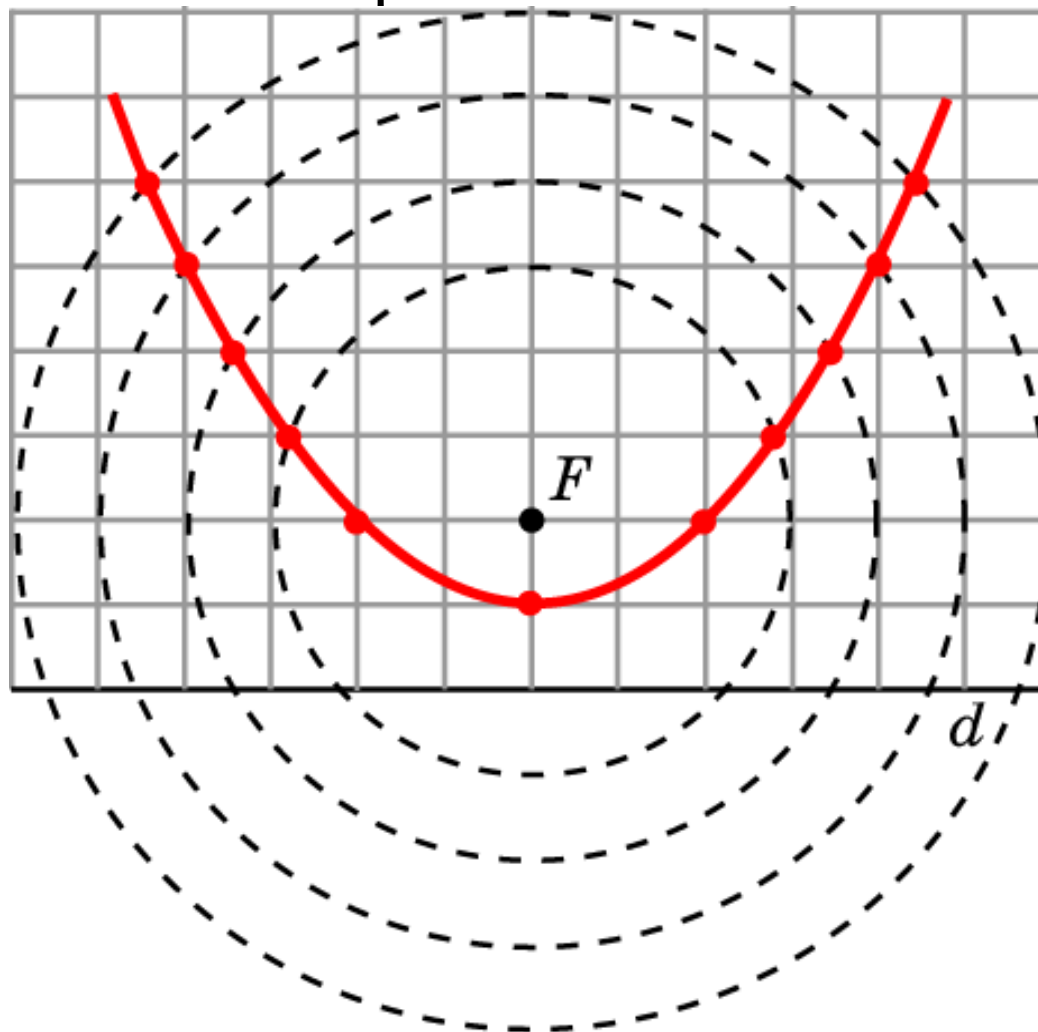
ПАРАБОЛА

Пусть на плоскости задана прямая d и точка F , не принадлежащая этой прямой. Геометрическое место точек, равноудаленных от прямой d и точки F , называется **параболой**. Прямая d называется **директрисой**, а точка F - **фокусом** параболы.



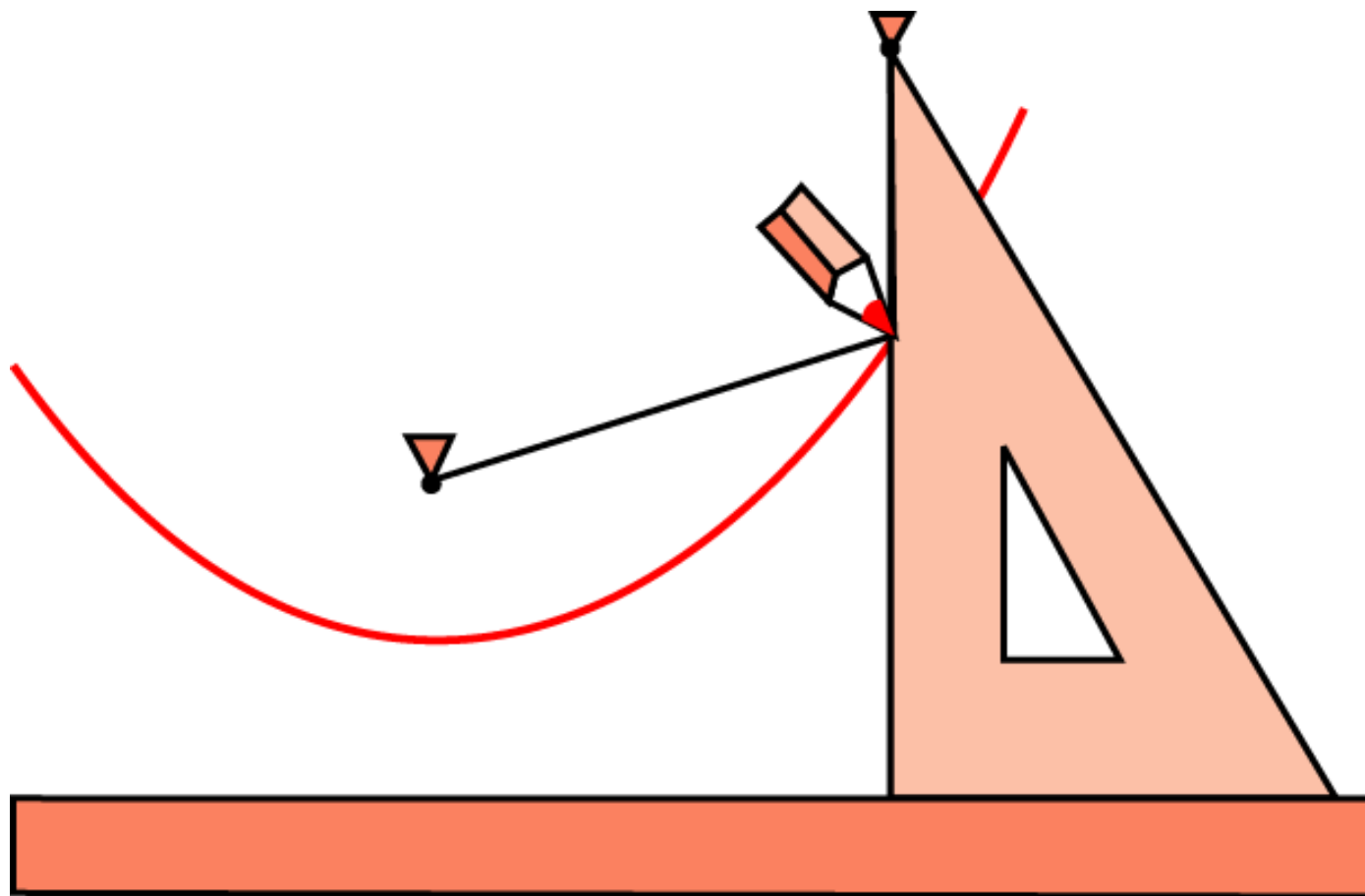
Упражнение

На клетчатой бумаге постройте несколько точек, равноудаленных от данной точки F и данной прямой d . Соедините их плавной кривой.



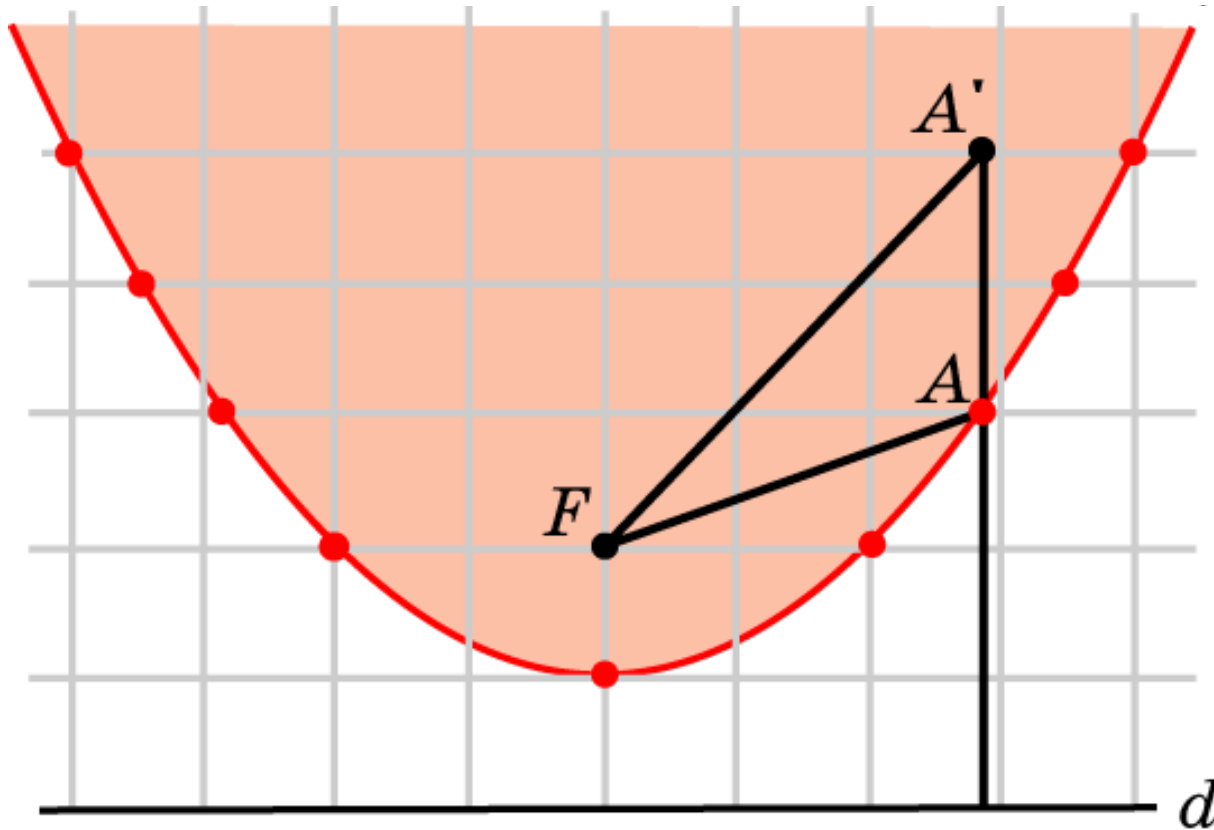
Рисуем параболу

Параболу можно нарисовать с помощью линейки, угольника, кнопок, нитки и карандаша.



Упражнение

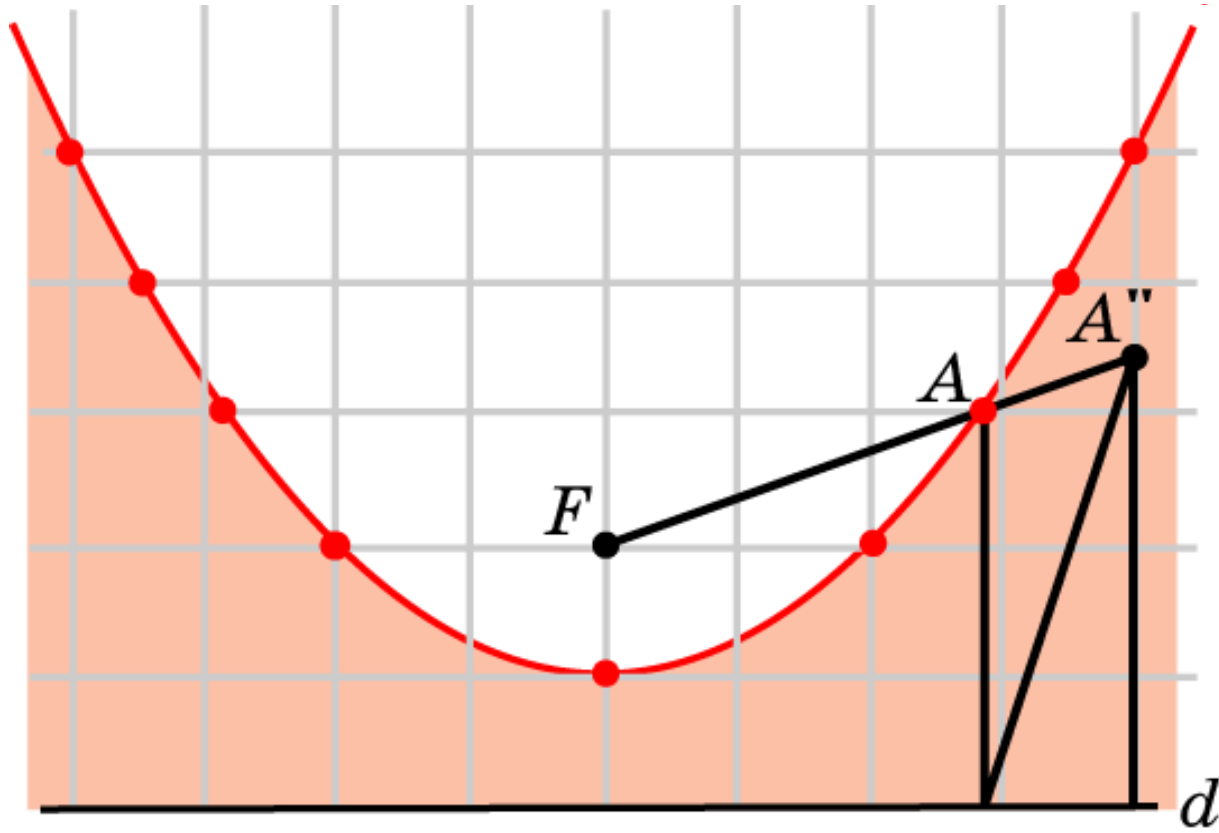
Изобразите ГМТ A' , для которых расстояние до фокуса меньше расстояния до директрисы.



Ответ: Точки A' , расположенные выше параболы.

Упражнение

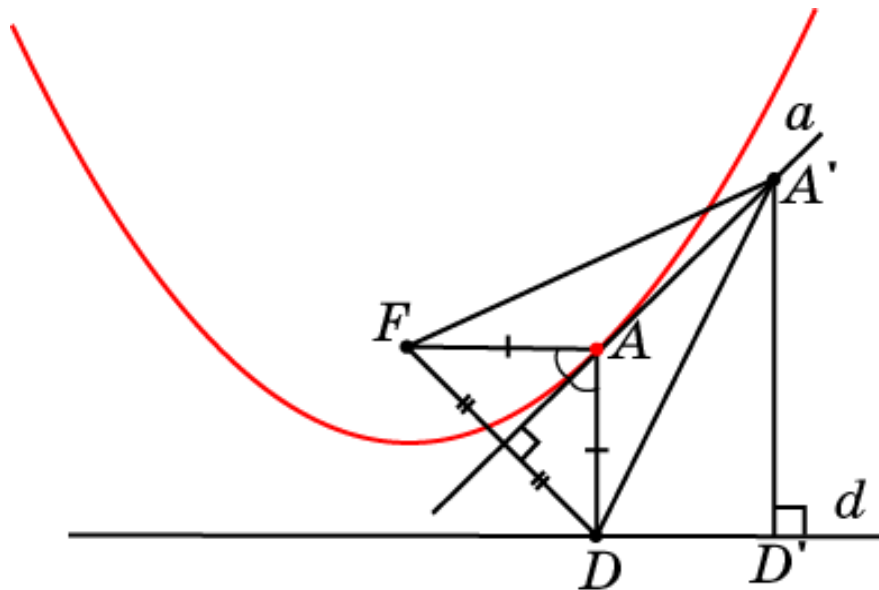
Изобразите ГМТ A'' , для которых расстояние до фокуса больше расстояния до директрисы.



Ответ: Точки A'' , расположенные ниже параболы.

Касательная к параболе

Прямая, имеющая с параболой только одну общую точку и не перпендикулярная ее директрисе, называется **касательной** к параболе. Общая точка называется **точкой касания**.

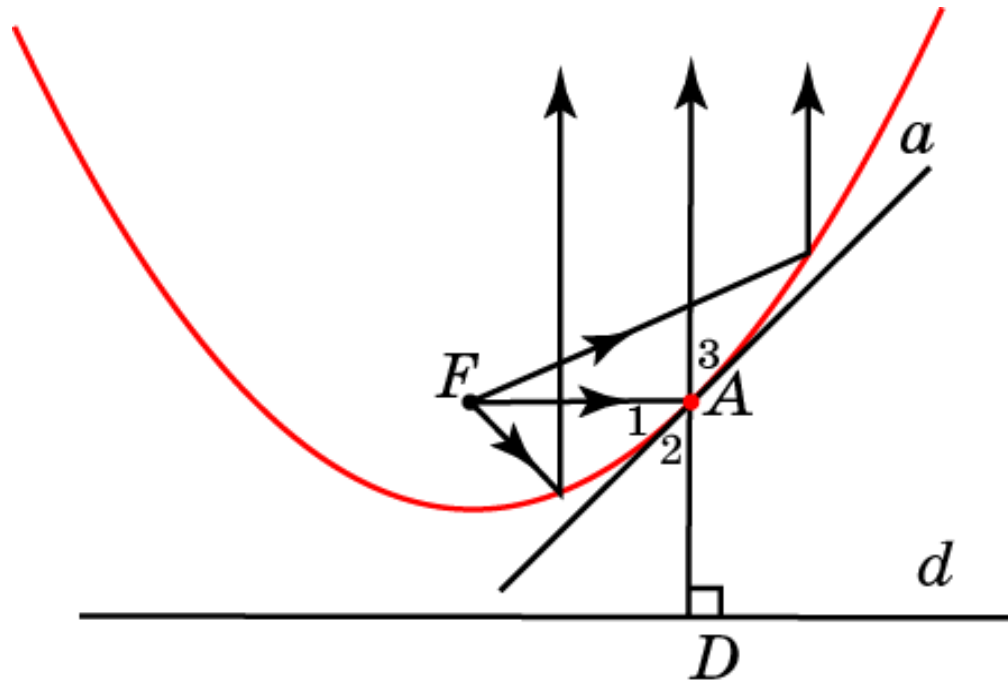


Теорема. Пусть A – точка на параболе с фокусом F и директрисой d , AD – перпендикуляр, опущенный на директрису. Тогда касательной к параболе, проходящей через точку A , будет прямая, содержащая биссектрису угла FAD .

Проведите доказательство теоремы, используя рисунок.

Фокальное свойство параболы

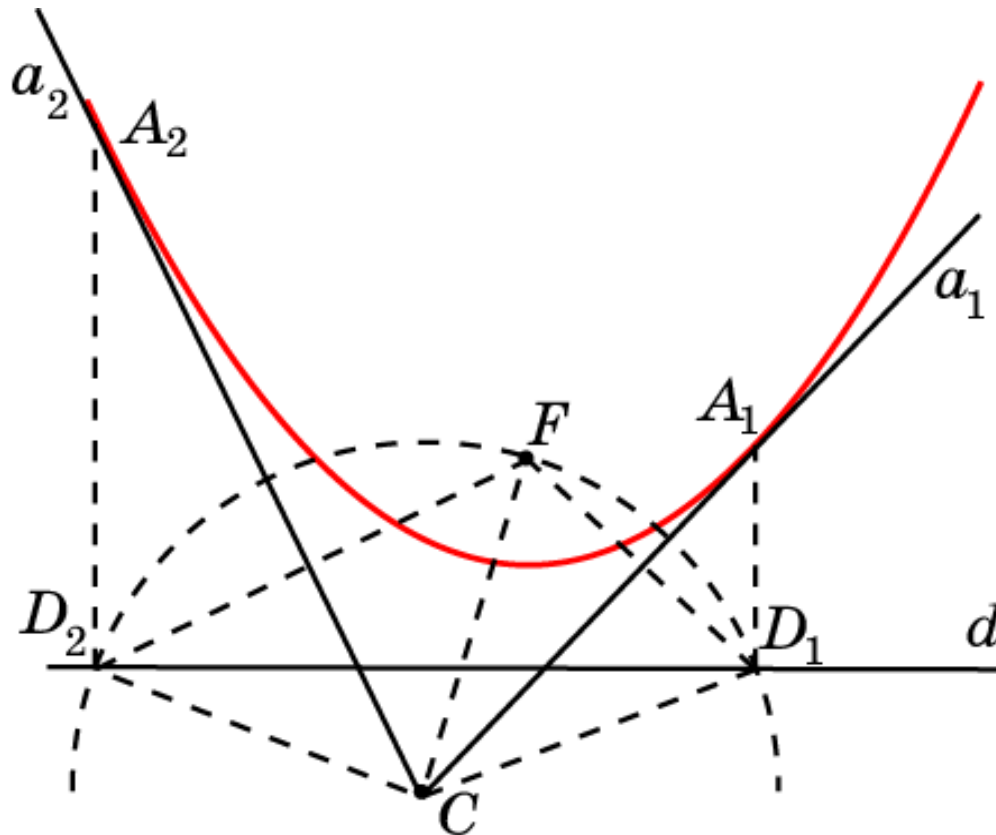
Если источник света поместить в фокус параболы, то лучи, отразившись от параболы, пойдут в одном направлении, перпендикулярном директрисе.



Фокальное свойство параболы используется при изготовлении отражающих поверхностей прожекторов, автомобильных фар, карманных фонариков, телескопов, параболических антенн и т.д.

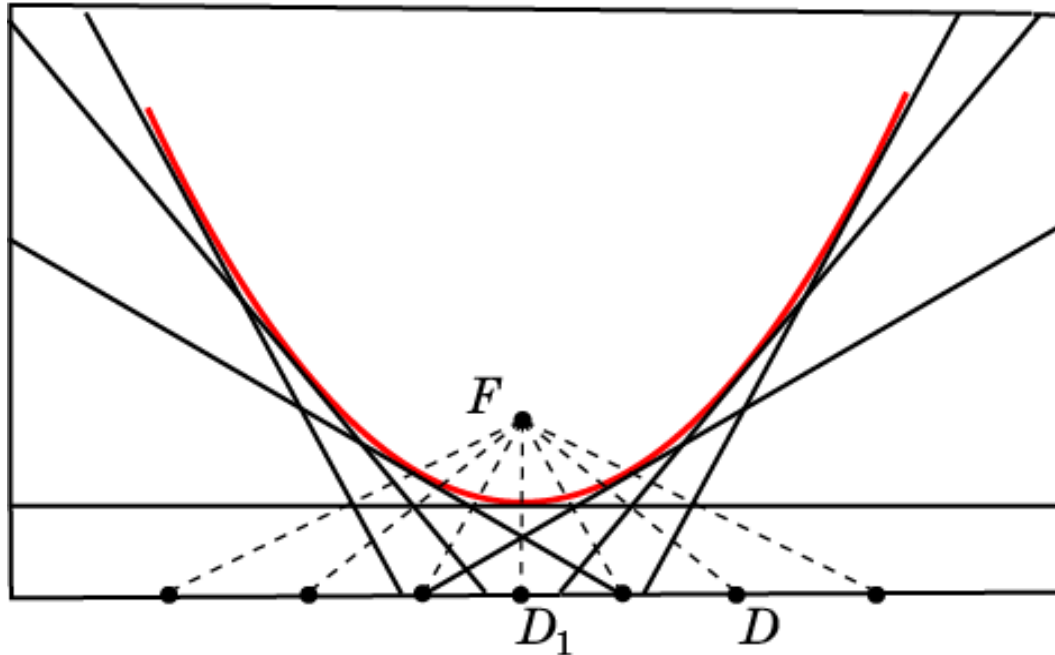
Построение касательной

По данному рисунку укажите способ построения касательной к параболе, заданной фокусом F и директрисой d , проходящей через точку C , с помощью циркуля и линейки.



Лабораторная работа

Возьмем лист бумаги прямоугольной формы и отметим около его большой стороны точку F .



Сложим лист так, чтобы точка F совместилась с какой-нибудь точкой D большой стороны листа.

Разогнем лист. Линия сгиба будет серединным перпендикуляром к отрезку FD и, следовательно, касательной к параболе.

Снова согнем и разогнем лист, совместив точку F с другой точкой D_1 большой стороны.

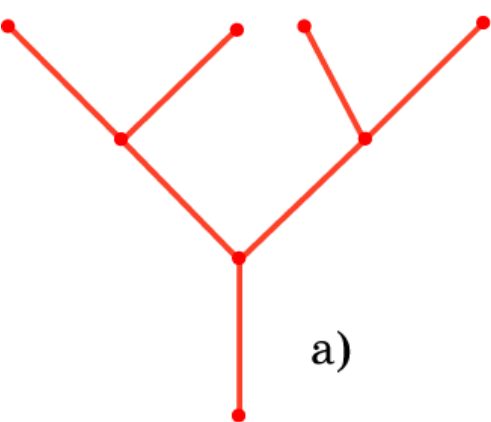
Сделаем так несколько раз, пока вся бумага не покроется линиями сгибов. Линии сгибов будут касательными к параболе. Чем больше будет линий сгибов тем больше граница участка внутри этих сгибов будет приближаться к параболе.

ГРАФЫ

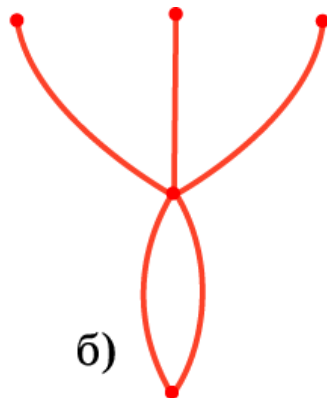
Фигура, образованная конечным набором точек плоскости и отрезков, соединяющих некоторые пары из этих точек, называется **плоским графом**, или просто **графом**. Точки называются **вершинами**, а отрезки – **ребрами** графа.

Граф называется **связным**, если любые две его вершины можно соединить ломаной, состоящей из ребер графа.

Вместо отрезков в качестве ребер графов рассматриваются также кривые линии.



а)



б)

Литература

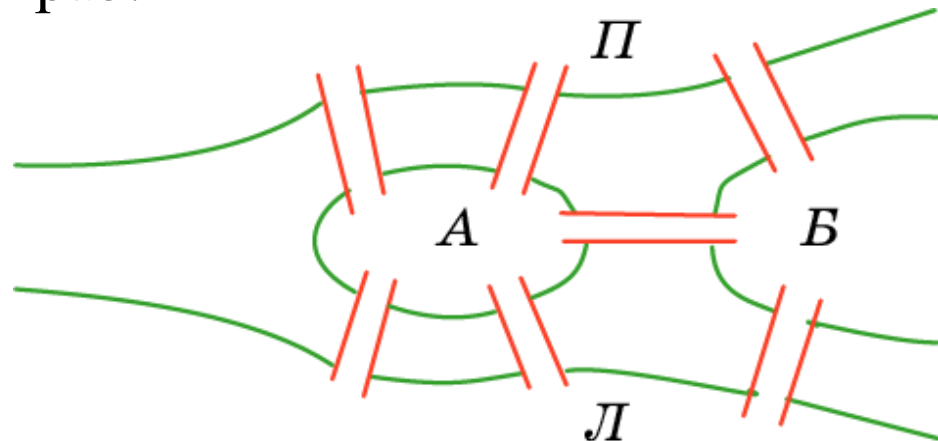
1. Березина Л.Ю. Графы и их применение. – М.: Просвещение, 1979.
2. Оре О. Графы и их применение. – М.: Мир, 1965.

Задача Эйлера 1

Теория графов зародилась в ходе решения головоломок двести с лишним лет назад. Одной из таких задач-головоломок была задача о кенигсбергских мостах, которая привлекла к себе внимание Леонарда Эйлера (1707-1783), долгое время жившего и работавшего в России (с 1727 по 1741 год и с 1766 до конца жизни).

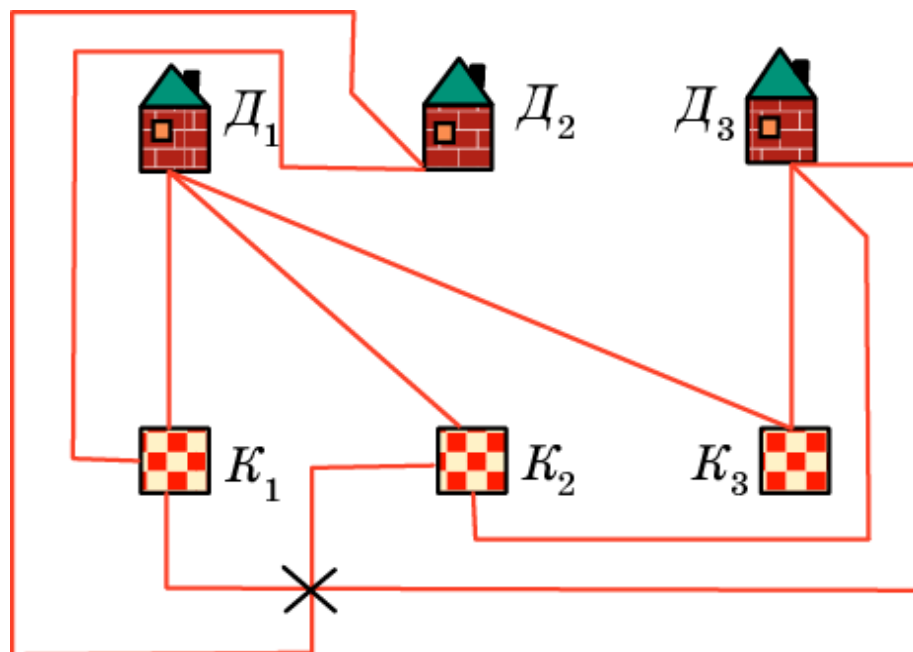


Задача. В г. Кёнигсберге (ныне Калининград) было семь мостов через реку Прегель (Л - левый берег, П - правый берег, А и Б - острова). Можно ли, прогуливаясь вдоль реки, пройти по каждому мосту ровно один раз?



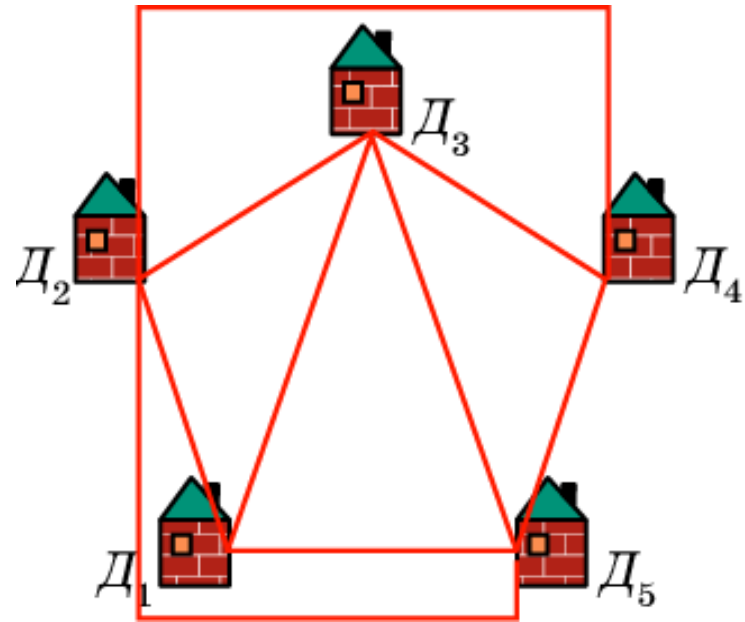
Задача Эйлера 2

Задача. Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?



Упражнение

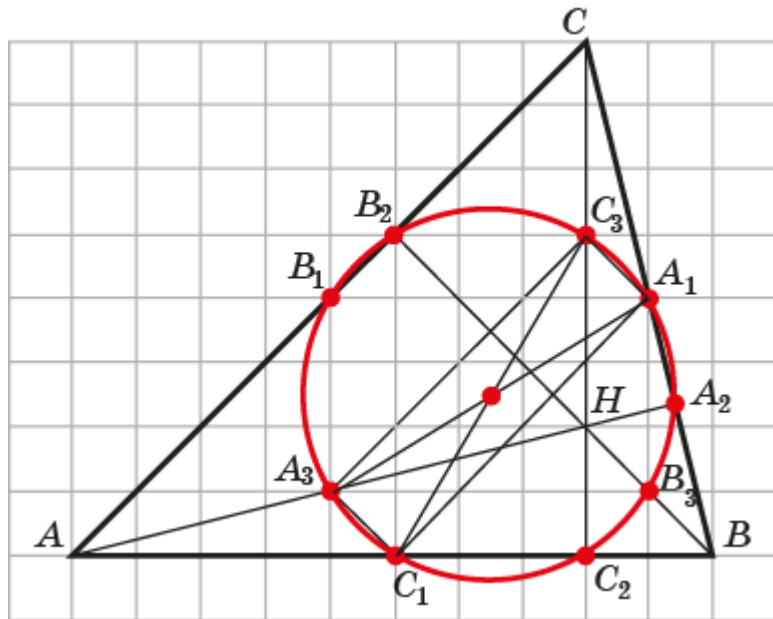
Докажите, что пять домиков нельзя соединить непересекающимися дорожками так, чтобы каждый домик был соединен со всеми другими домиками.



Предположим, что это сделать можно. Тогда мы имеем связный простой граф, у которого $V = 5$, $P = 10$ и, следовательно, $\Gamma = 7$. С другой стороны, поскольку каждая область ограничена, по крайней мере тремя ребрами, то число ребер должно быть больше или равно $\frac{7 \cdot 3}{2} > 10$. Противоречие.

ОКРУЖНОСТЬ ЭЙЛЕРА

Пусть в треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 обозначают середины сторон противоположных соответствующим вершинам; H – точка пересечения высот треугольника; A_2, B_2, C_2 – основания высот, опущенных из соответствующих вершин; A_3, B_3, C_3 – середины отрезков AH, BH и CH . Докажите, что точки $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ принадлежат одной окружности, называемой **окружностью девяти точек**, или **окружностью Эйлера**.

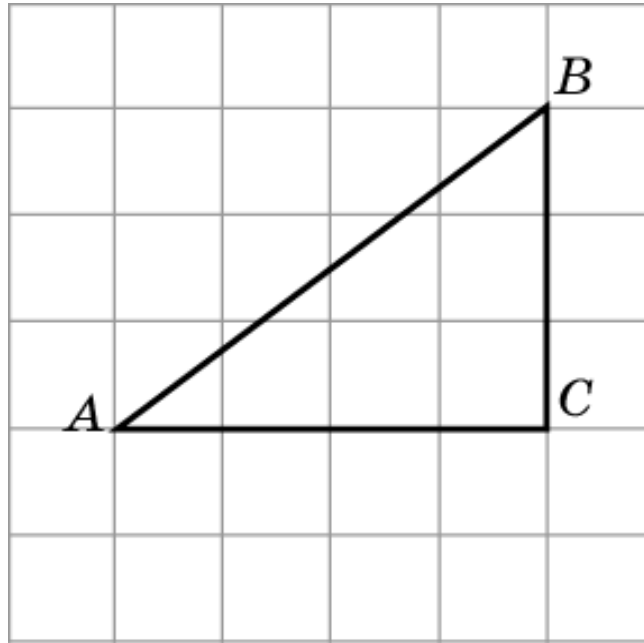


Литература

1. Гиндикин С.Г. Леонард Эйлер // Квант. – 1983 - № 10, 11.
2. Яковлев А.Я. Леонард Эйлер. – М.: Просвещение. 1983.
3. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. – М.: Учпедгиз, 1962.

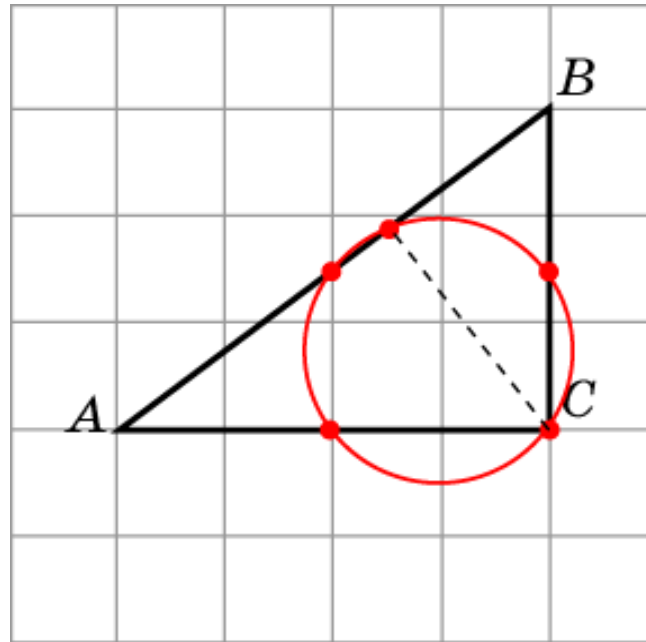
Упражнение

Изобразите окружность Эйлера для треугольника ABC .
Найдите ее радиус.



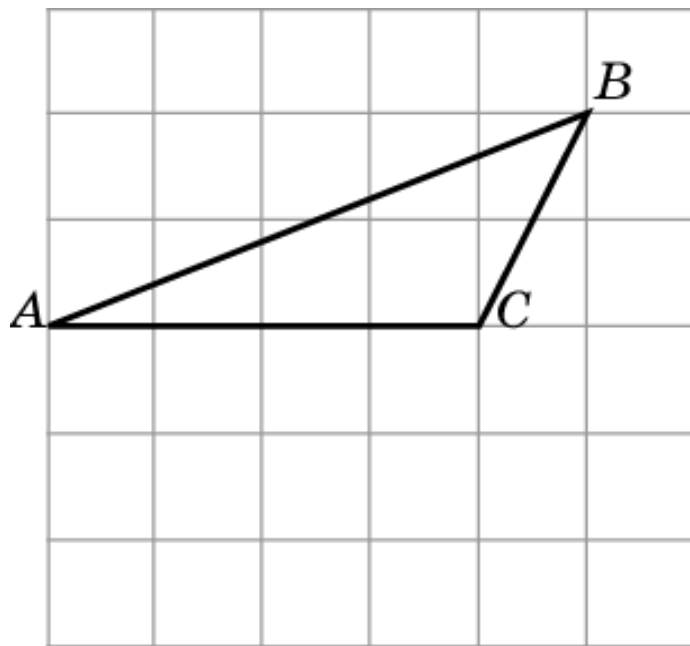
Ответ

$$R = 2,5.$$

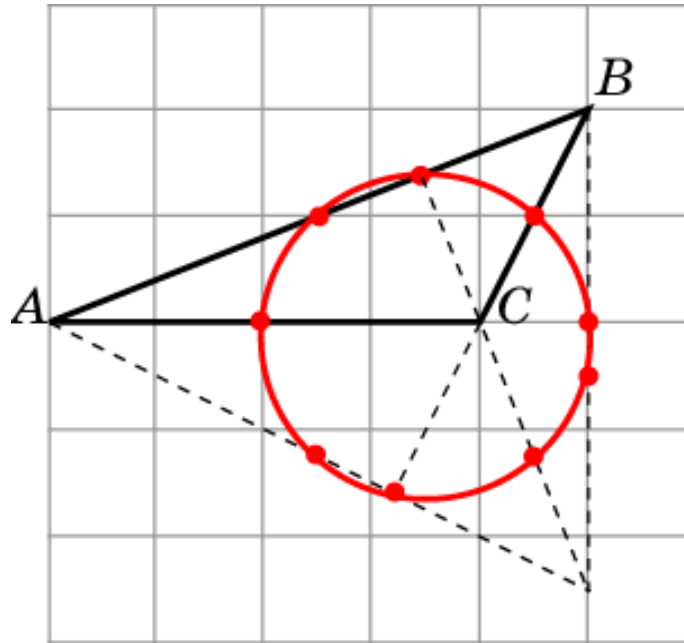


Упражнение

Изобразите окружность Эйлера для треугольника ABC .

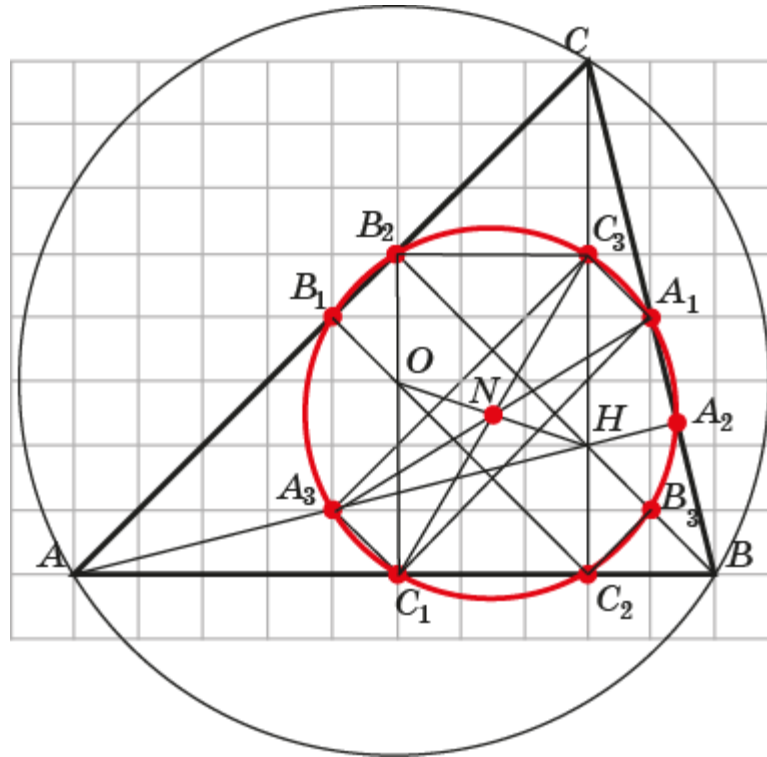


Ответ



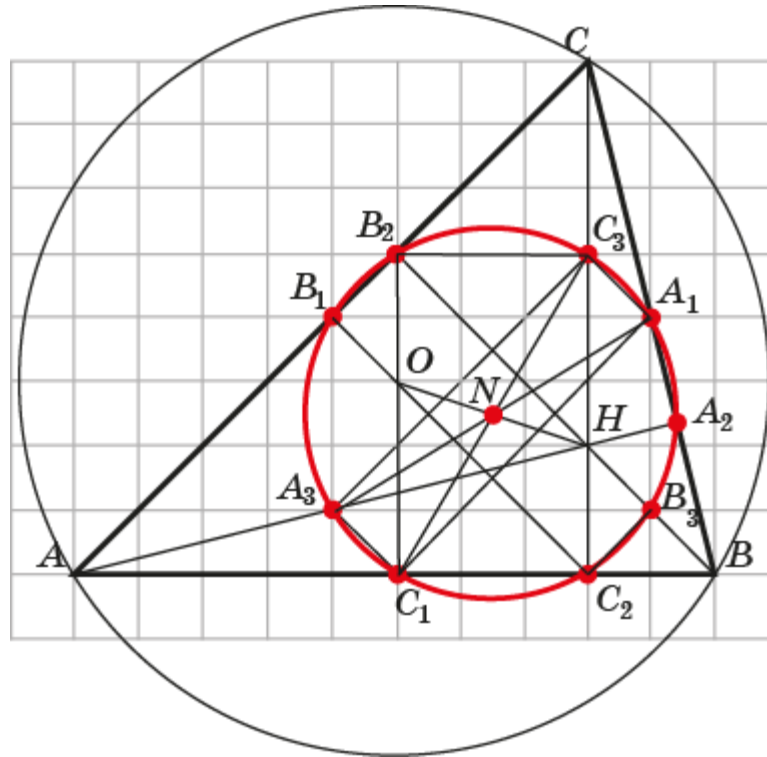
Упражнение

Докажите, что радиус окружности Эйлера в два раза меньше радиуса описанной окружности.



Упражнение

Докажите, что центр N окружности Эйлера треугольника ABC является серединой отрезка, соединяющего ортоцентр H и центр O описанной окружности этого треугольника.



ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ

Золотым сечением называется такое делением целого на две неравные части, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая часть относится ко всему целому.

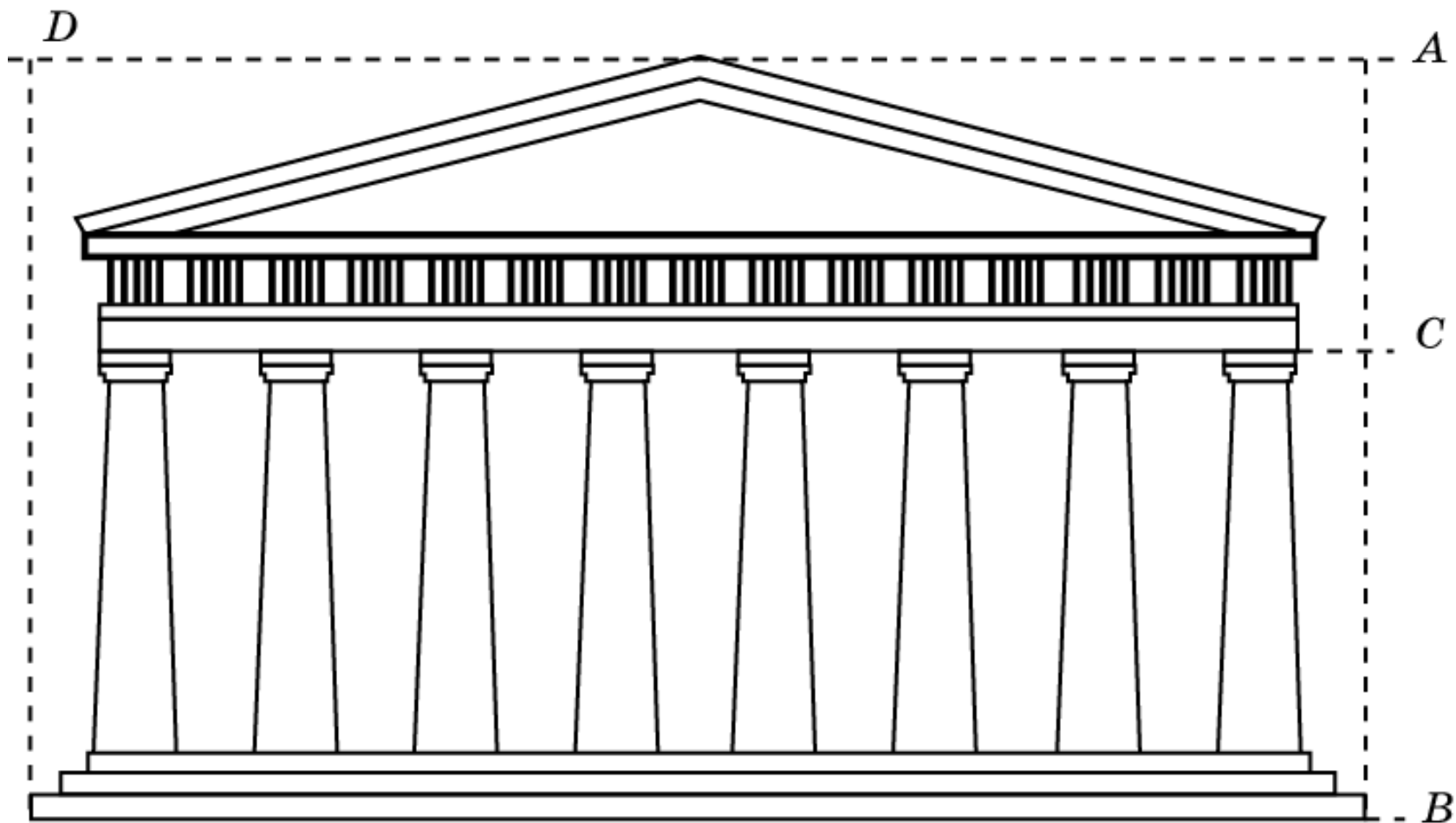
Выясним, каким числом выражается золотое сечение. Для этого выберем произвольный отрезок и примем его длину за единицу. Разобьем этот отрезок на две неравные части, и большую из них обозначим через x . Тогда меньшая часть равна $1-x$. По определению золотого отношения должно выполняться равенство $(1-x) : x = x : 1$. Мы получили уравнение относительно x , которое легко свести к квадратному $x^2 + x - 1 = 0$. Положительный корень этого уравнения равен $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,6$.



Полученное число обозначается буквой ϕ . Это первая буква в имени великого древнегреческого скульптора Фидия.

Парфенон

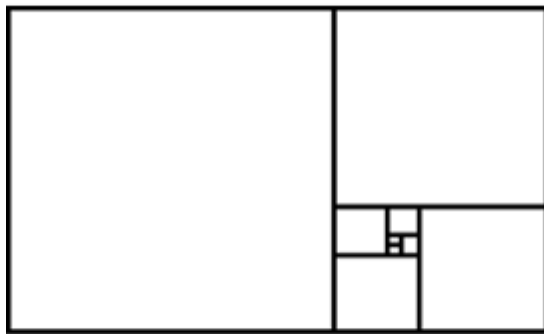
Одно из красивейших произведений древнегреческой архитектуры - Парфенон в Афинах (V в. до н.э.) содержит в себе золотые пропорции. Так отношение высоты AB здания к его длине AD равно ϕ . Кроме того, отношение AC к BC также равно ϕ .



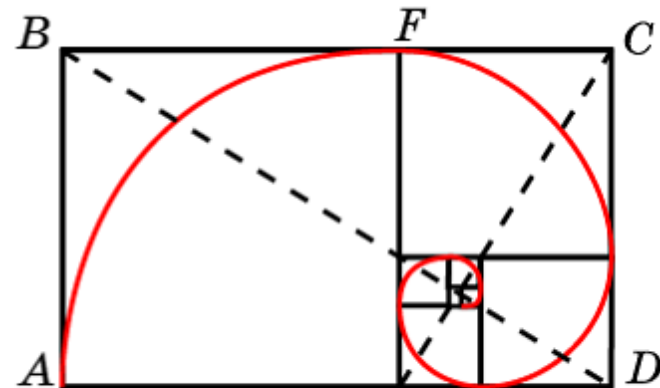
Золотой прямоугольник

Прямоугольник, стороны которого находятся в золотом отношении, называется **золотым прямоугольником**.

Если от золотого прямоугольника отрезать квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, то снова получим золотой прямоугольник меньших размеров, подобный исходному.



а)



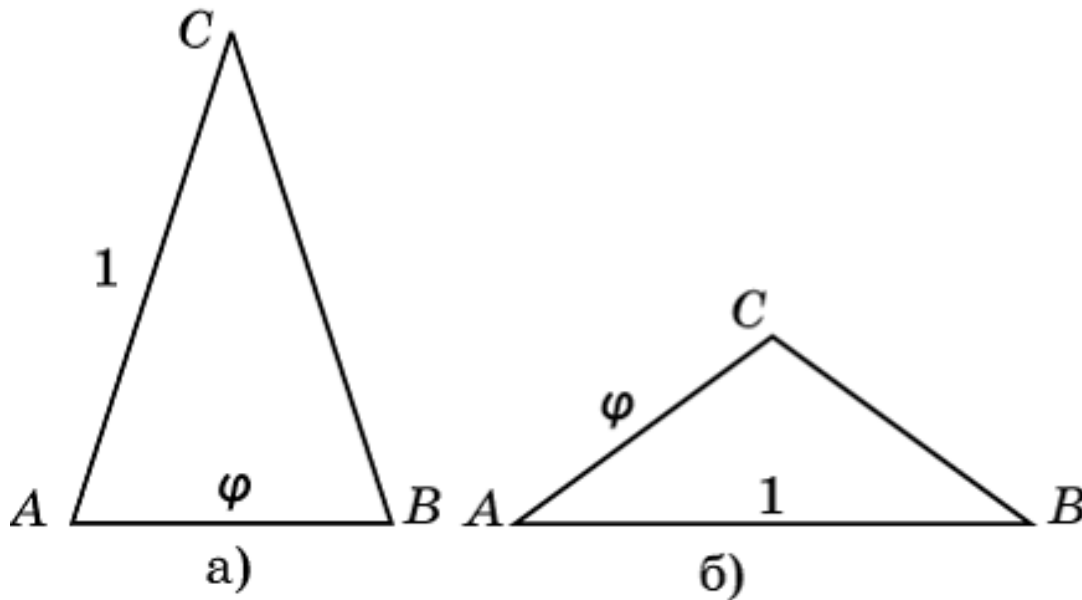
б)

Если этот процесс продолжить, то мы получим так называемые вращающиеся квадраты, и весь прямоугольник окажется составленным из этих квадратов (рис. а). Если вершины квадратов соединить плавной кривой, то получим кривую, называемую **золотой спиралью** (рис. б).

Золотые треугольники

Равнобедренный треугольник называется **золотым**, если его боковая сторона и основание находятся в золотом отношении.

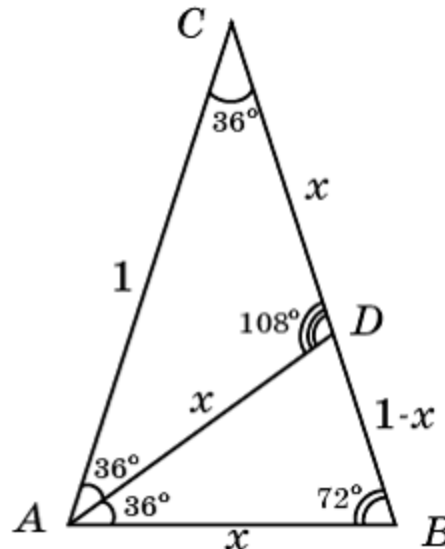
Возможны два типа золотых треугольников. В первом случае $AB : AC = \varphi$. Во втором случае $AC : AB = \varphi$.



Золотые треугольники

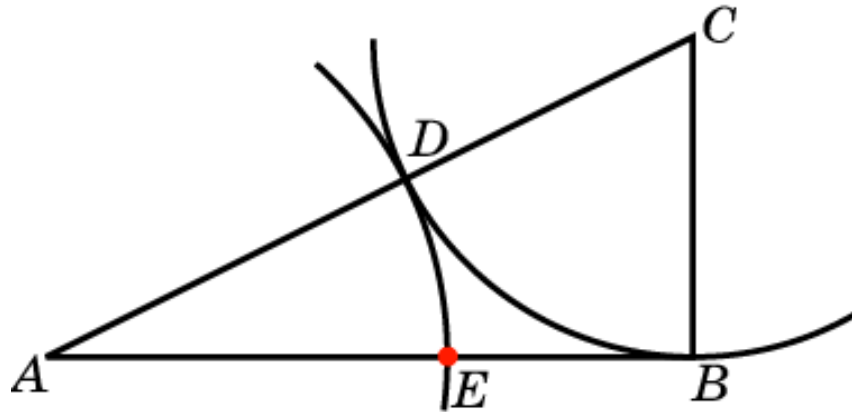
Теорема. Золотыми треугольниками являются равнобедренные треугольники с углами при вершинах 36° и 108° .

Доказательство. Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AC = BC = 1$, $AB = x$), угол C равен 36° . Проведем биссектрису AD . Треугольники ABD и CAB подобны по трем углам. Следовательно, $BD : AB = AB : AC$, т.е. $1 - x : x = x : 1$. Решая это уравнение относительно x , находим $x = \varphi$. Значит, треугольник ABC – золотой. Заметим, что треугольник ACD – также золотой.



Упражнение

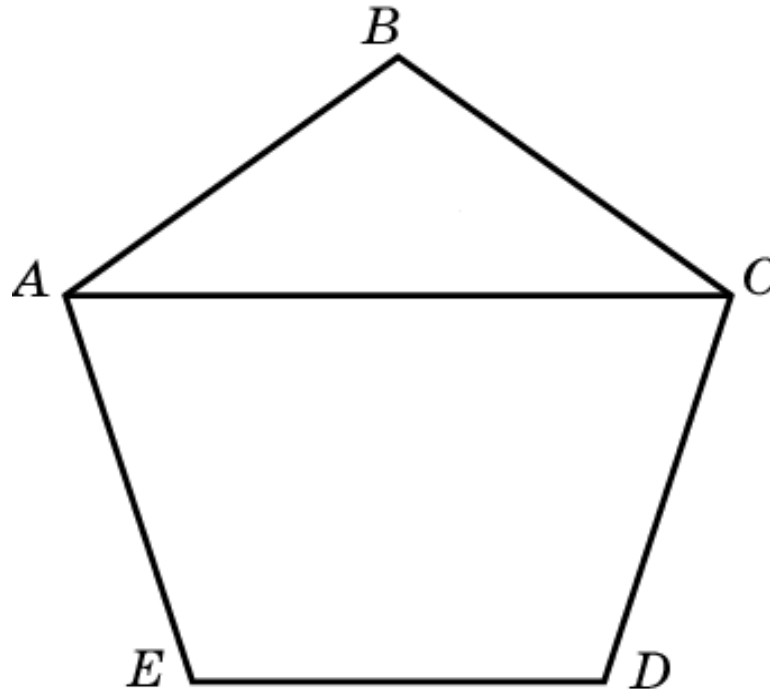
Используя циркуль и линейку, разделите данный отрезок AB в золотом отношении.



Решение: Через точку B проведем прямую, перпендикулярную прямой AB , отложим на ней отрезок BC , равный половине отрезка AB . Проведем отрезок AC . С центром в точке C проведем окружность радиуса BC , ее точку пересечения с отрезком AC обозначим D . С центром в точке A проведем окружность радиуса AD , ее точку пересечения с отрезком AB обозначим E . Эта точка и будет делить отрезок AB в золотом отношении.

Упражнение

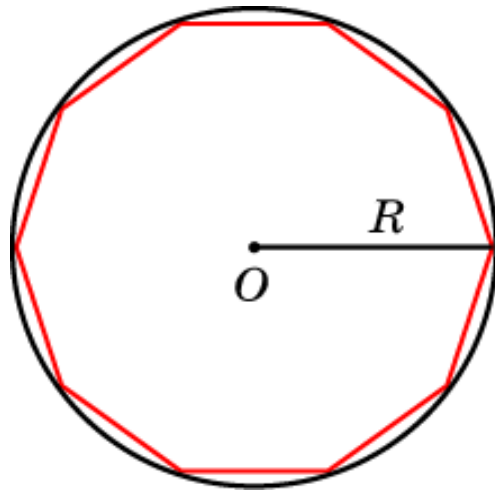
Сторона правильного пятиугольника равна 1.
Найдите его диагональ.



Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение

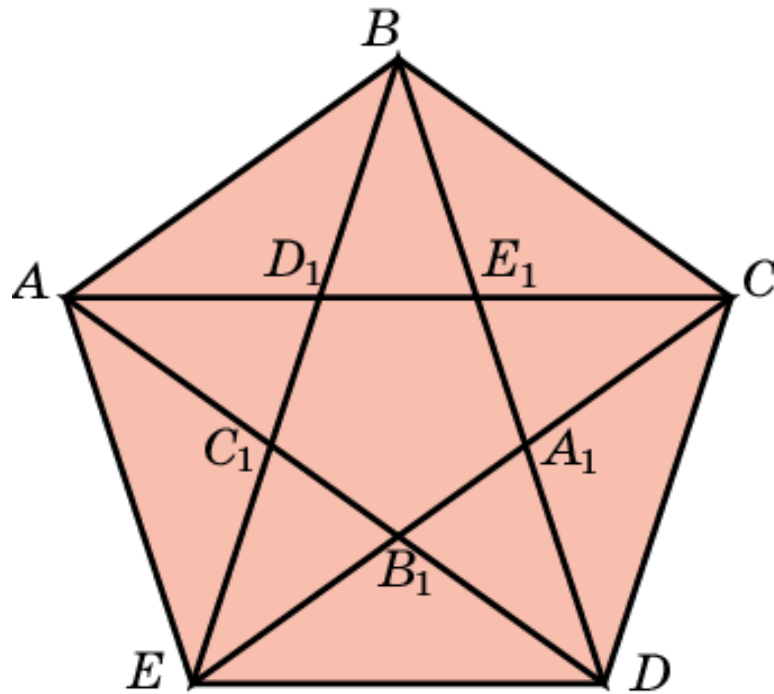
Найдите радиус окружности, описанной около правильного десятиугольника со стороной 1.



Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение

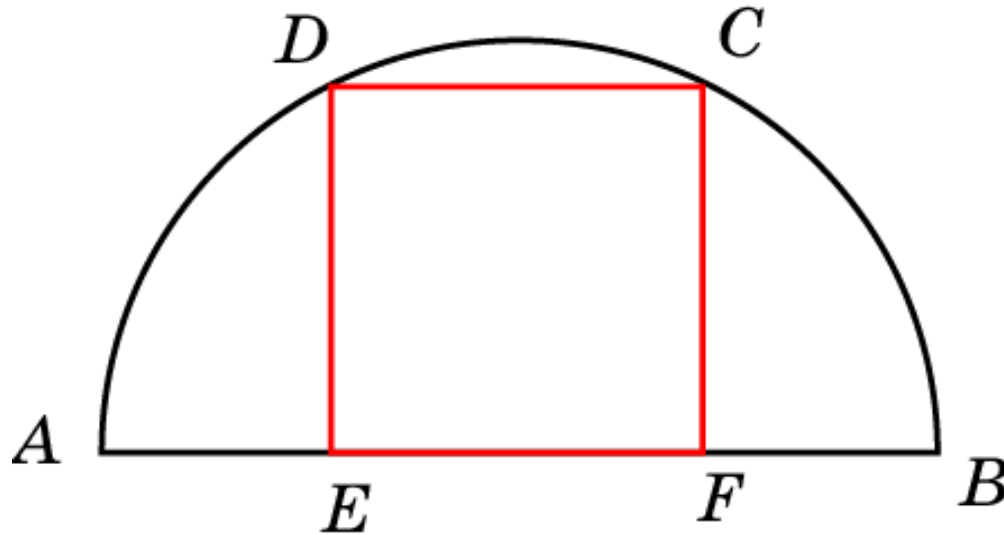
Докажите, что диагонали правильного пятиугольника образуют правильный пятиугольник. Найдите сторону этого пятиугольника, если сторона исходного пятиугольника равна 1.



Ответ: $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Упражнение

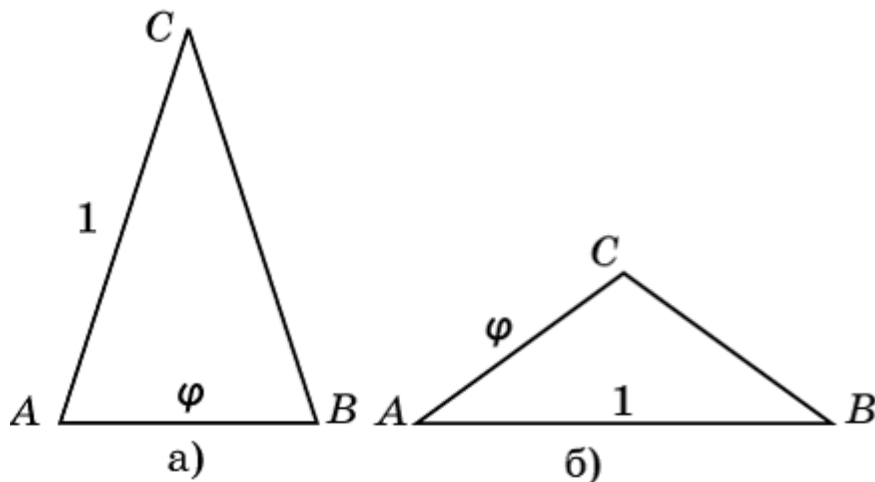
В полукруг с диаметром AB вписан квадрат $CDEF$. Найдите отношение отрезков AE и ED .



Ответ: $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Упражнение

Найдите: а) $\sin 18^\circ$; б) $\sin 54^\circ$; в) $\cos 36^\circ$; г) $\cos 52^\circ$.



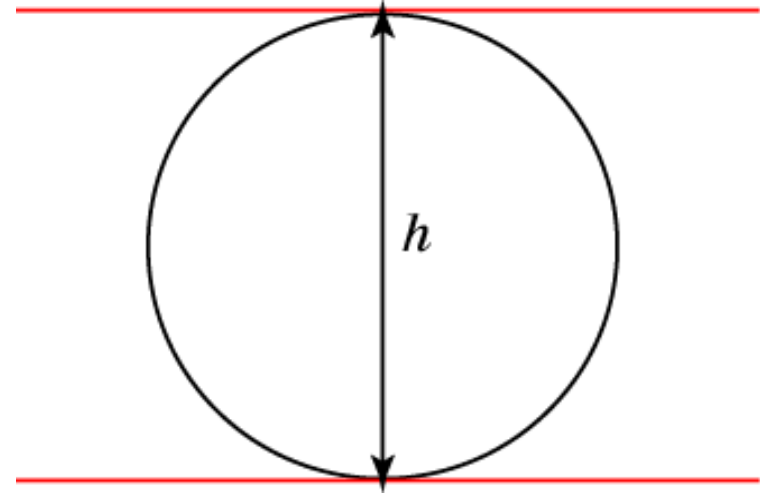
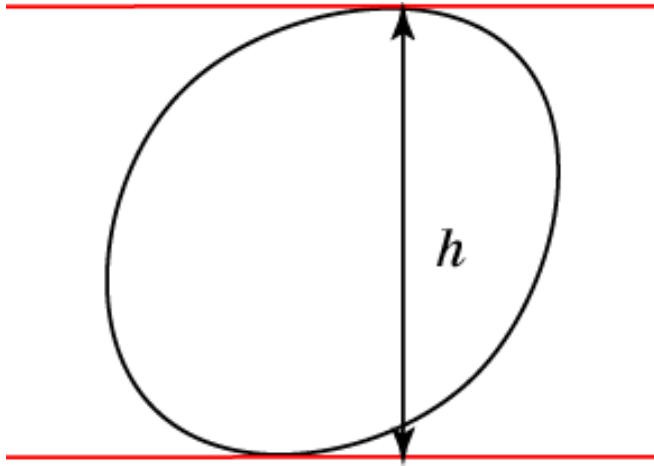
Ответ: а) $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$; б) $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$; в) $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$; г) $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Литература

1. Азевич А.И. От золотой пропорции к ее "производным". // Квант – 1995. - № 3. – С. 55.
2. Бендукидзе А.Д. Золотое сечение. // Квант. – 1973. - № 8. – С. 22.
3. Васютинский Н.А. Золотая пропорция. – М.: Молодая гвардия, 1990.
4. Виленкин Н.Я. и др. За страницами учебника математики, 10-11. – М.: Просвещение, 1996.
5. Волошинов А.В. Математика и искусство. – М.: Просвещение, 1992.
6. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – 6-ое изд., доп. – М.: Наука, 1992.
7. Гарднер М. Число - золотое сечение / В кн. Математические головоломки и развлечения. – М.: Мир, 1971.
8. Еще раз о золотом сечении. // Квант. – 1989. - № 8. – С. 75.
9. Жуков А., Савин А. Числа Фидия и золотое сечение // Энциклопедия для детей. – т. 11. – М.: Аванта, 1998.
10. Избранные вопросы математики. 10 класс. – М.: Просвещение, 1980.
11. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966.
12. Левитин К. Геометрическая рапсодия. – 2-ое изд. – М.: Знание. – 1984.
13. Пидоу Д. Геометрия и искусство. – М.: Мир. – 1979.
14. Прохоров А.И. Золотая спираль // Квант. – 1984. - № 9. – С. 15.
15. Смирнова И.М. В мире многогранников. – М.: Просвещение. – 1995.
16. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия: Учебник для 7-9 классов. – М.: Мнемозина, 2005.
17. Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П. Золотое сечение. – М.: Стройиздат. – 1990.

КРИВЫЕ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

Для определения ширины h замкнутой кривой рассмотрим две параллельные прямые, между которыми расположена данная кривая. Будем сдвигать друг к другу эти прямые до тех пор, пока они не коснутся кривой. Расстояние между полученными параллельными прямыми и будет шириной кривой в направлении перпендикулярном этим прямым.



Для разных направлений ширина кривой может быть разной. Примером кривой одинаковой (постоянной) ширины по всем направлениям является окружность. Ее ширина равна диаметру.

О кривых постоянной ширины рекомендуем посмотреть фильм на сайте

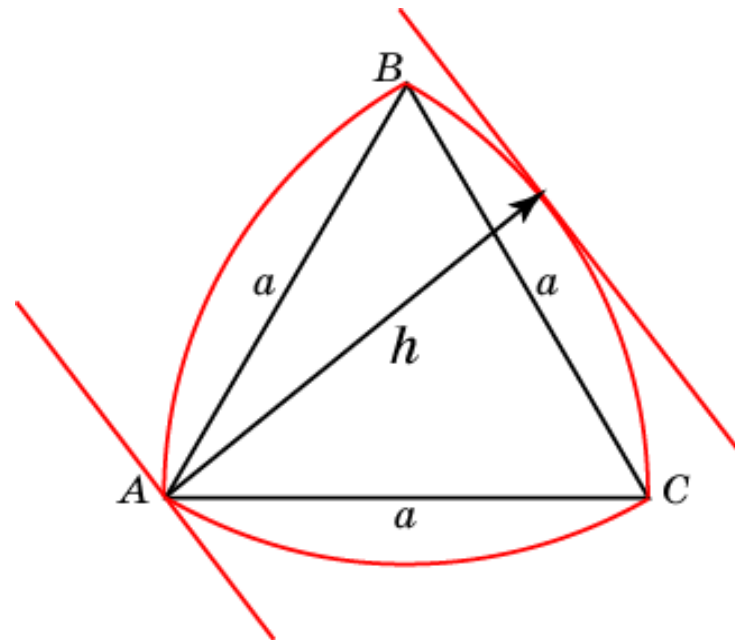
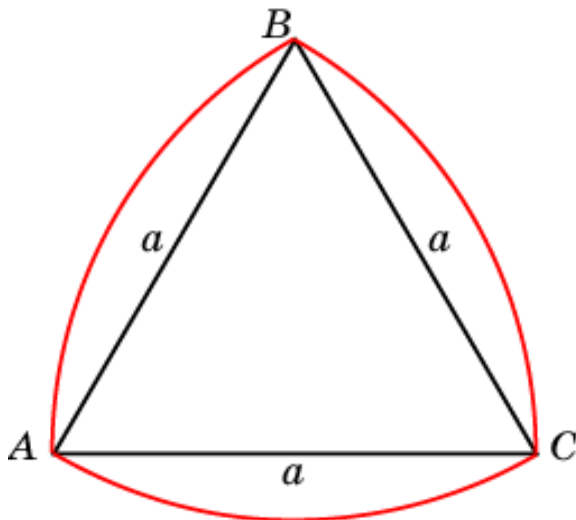
www.etudes.ru

Треугольник Рело

Бывают ли кривые, отличные от окружности и имеющие постоянную ширину?

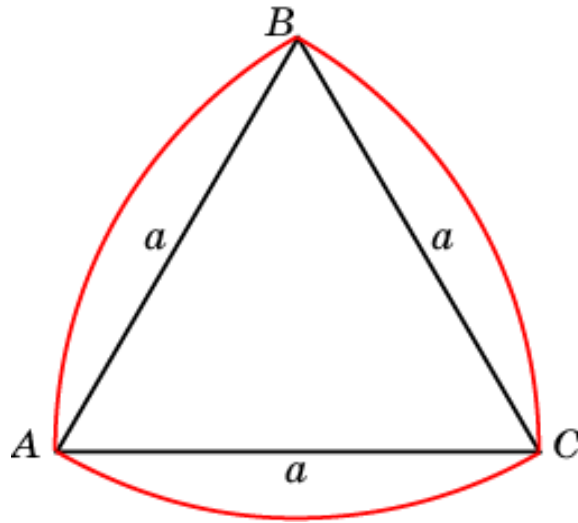
Оказывается, бывают. Примером такой кривой является кривая, придуманная французским ученым Ф. Рело (1829 – 1905), называемая «треугольник Рело».

Для его построения рассмотрим правильный треугольник ABC со стороной a . С центром в вершине A и радиусом a проведем дугу BC окружности. Аналогично, с центрами в вершинах B и C и радиусом a проведем дуги окружности AC и AB . В результате получим искомую кривую, состоящую из трех дуг окружности. Ее ширина равна стороне a правильного треугольника.



Упражнение

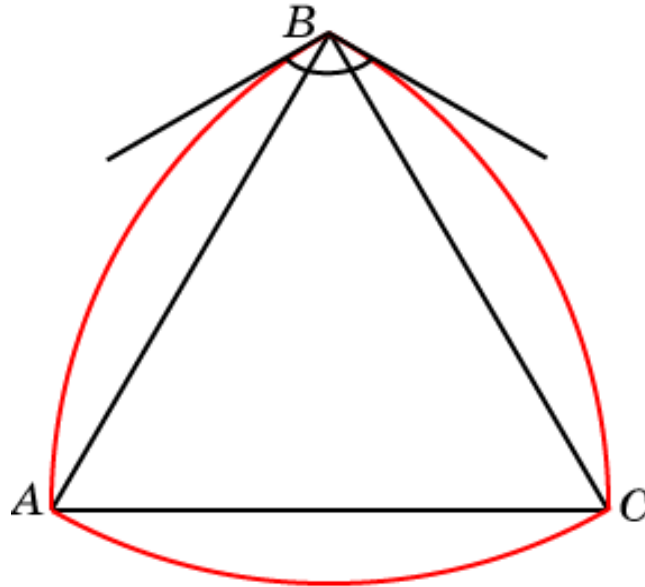
Докажите, что периметр треугольника Рело равен длине окружности, диаметр которой равен ширине треугольника Рело.



Решение. Напомним, что длина дуги окружности с центральным углом φ и радиусом r равна φr . Так как треугольник Рело состоит из трех дуг окружностей, для которых $r = a$, $\varphi = \pi/3$, то их общая длина равна πr , т.е. равна длине окружности, диаметр которой равен ширине треугольника Рело.

Упражнение

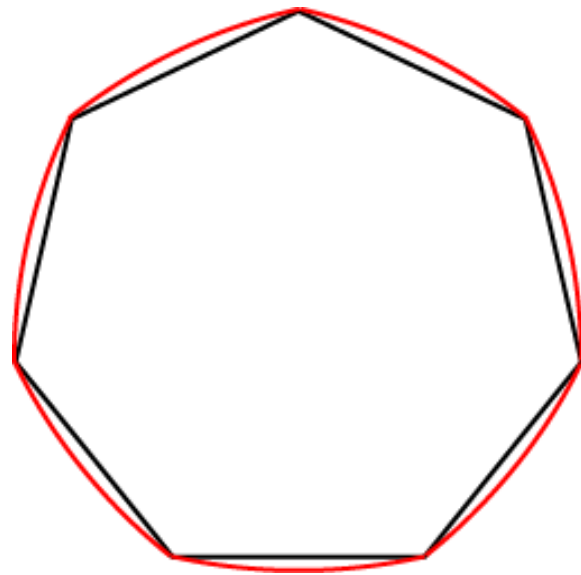
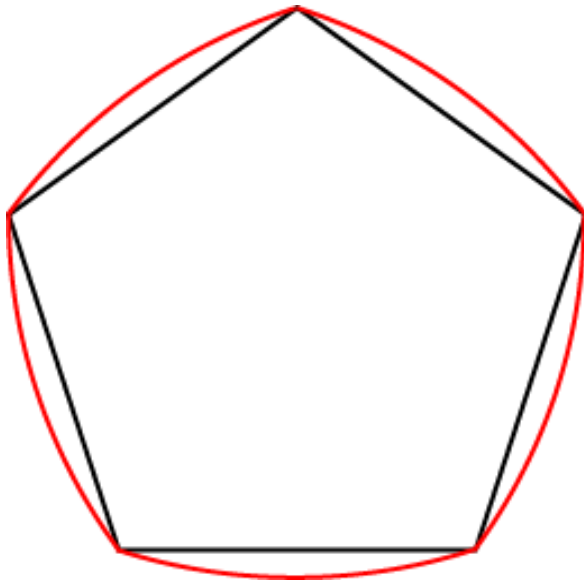
Найдите углы треугольника Рело, образованные касательными к дугам окружностей в его вершинах.



Ответ. 120° .

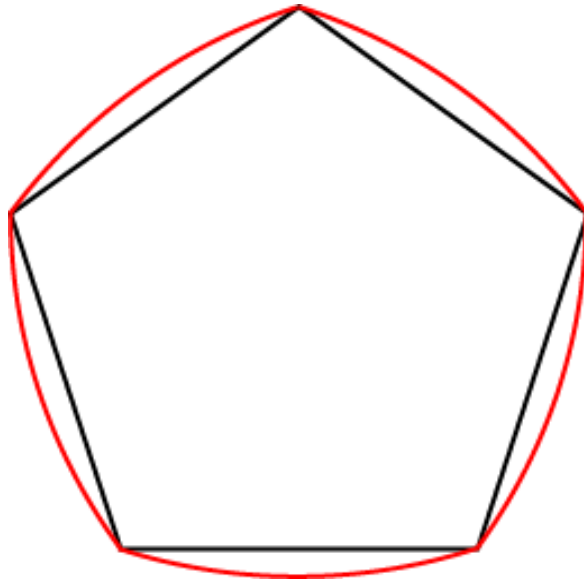
Правильные многоугольники Рело

Кривые постоянной ширины можно получать не только из правильного треугольника, но и из правильных многоугольников с нечетным числом сторон. На рисунке показаны такие кривые для правильных пятиугольника и семиугольника.



Упражнение

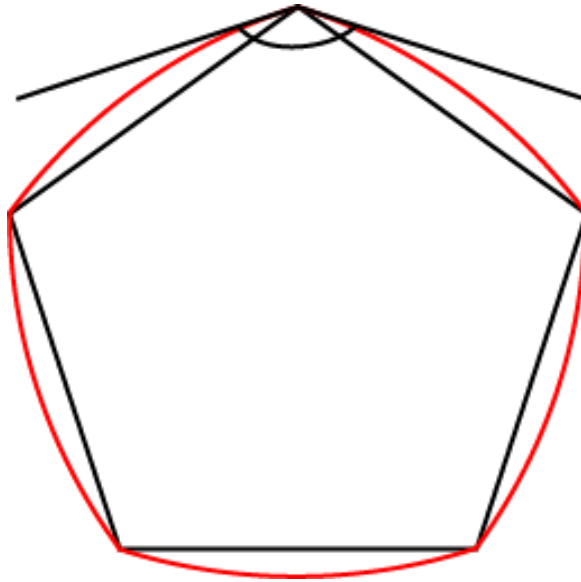
Сторона правильного пятиугольника равна 1. Найдите ширину соответствующего пятиугольника Рело.



Ответ. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Упражнение

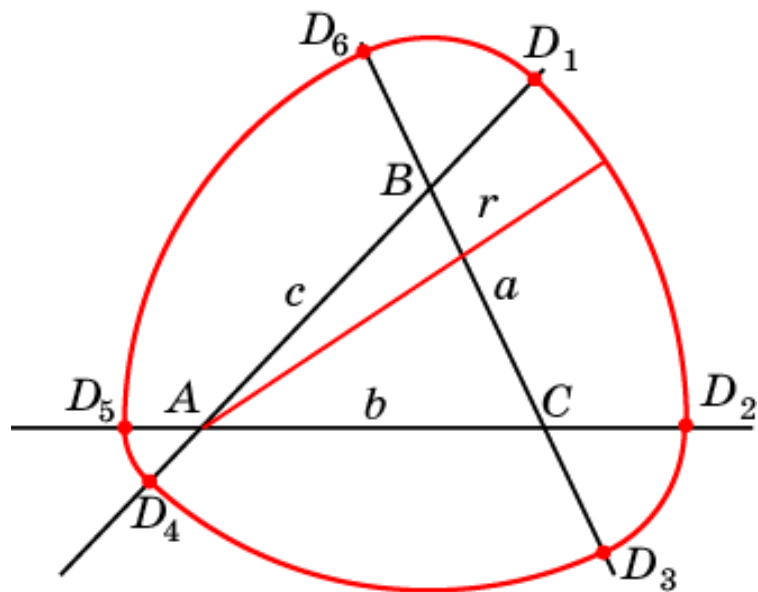
Найдите углы пятиугольника Рело, образованные касательными к дугам окружностей в его вершинах.



Ответ. 144° .

Неравносторонний треугольник

Рассмотрим три прямые, попарно пересекающиеся в точках A , B , C . Обозначим стороны треугольника ABC соответственно a , b , c .



На продолжении отрезка AB возьмем точку D_1 . С центром в точке A и радиусом $r = AD_1$ проведем дугу окружности, соединяющую точку D_1 и точку D_2 на луче AC .

Далее, с центром в точке C и радиусом $CD_2 = r - b$ проведем дугу окружности, соединяющую точку D_2 и точку D_3 на луче BC .

Затем, с центром в точке B и радиусом $BD_3 = a + r - b$ проведем дугу окружности, соединяющую точку D_3 и точку D_4 на луче BA .

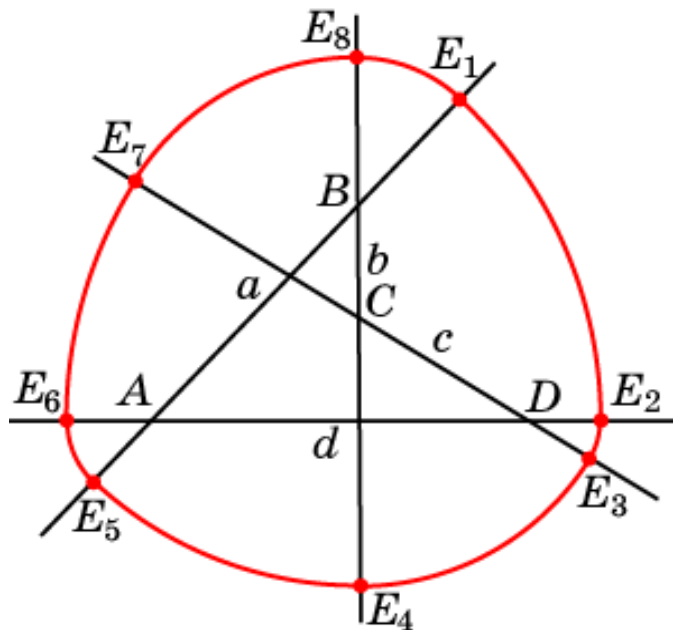
С центром в точке A и радиусом $AD_4 = a + r - b - c$ проведем дугу окружности, соединяющую точку D_4 и точку D_5 на луче CA .

С центром в точке C и радиусом $CD_5 = a + r - c$ проведем дугу окружности, соединяющую точку D_5 и точку D_6 на луче CB .

С центром в точке B и радиусом $BD_6 = r - c$ проведем дугу окружности, соединяющую точку D_6 и точку D_1 на луче AB . Получим замкнутую кривую.

Невыпуклый четырехугольник

Рассмотрим четыре прямые, попарно пересекающиеся в точках A, B, C, D . Обозначим стороны четырехугольника $ABCD$ соответственно a, b, c, d .



На продолжении отрезка AB возьмем точку E_1 . С центром в точке A и радиусом $r = AE_1$ проведем дугу окружности, соединяющую точку E_1 и точку E_2 на луче AD .

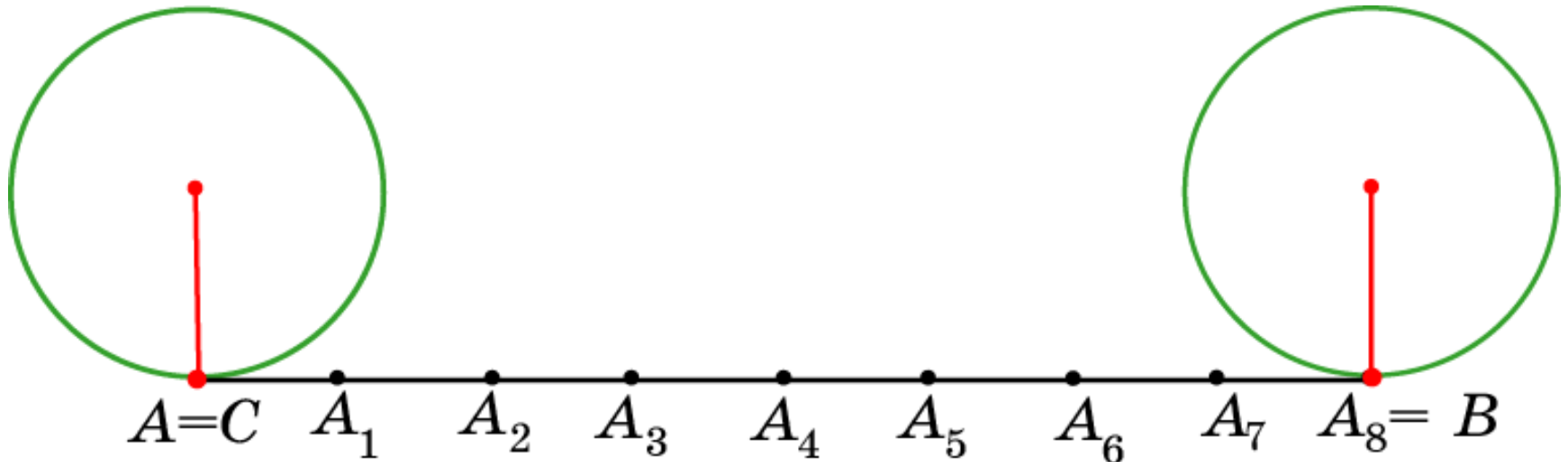
Проведите дальнейшее построение кривой постоянной ширины самостоятельно, найдите ее ширину. Докажите, что ее длина равна длине окружности с диаметром, равным ширине h кривой.

Ответ. Искомая кривая изображена на рисунке, где E_2E_3 – дуга окружности с центром D и радиусом $r - d$, E_3E_4 – дуга окружности с центром C и радиусом $c + r - d$, E_4E_5 – дуга окружности с центром B и радиусом $b + c + r - d$, E_5E_6 – дуга окружности с центром A и радиусом $b + c + r - d - a$, E_6E_7 – дуга окружности с центром D и радиусом $b + c + r - a$, E_7E_8 – дуга окружности с центром C и радиусом $b + r - a$, E_8E_1 – дуга окружности с центром B и радиусом $r - a$. Ширина h кривой равна $2r + b + c - a - d$.

КРИВЫЕ, КАК ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧЕК

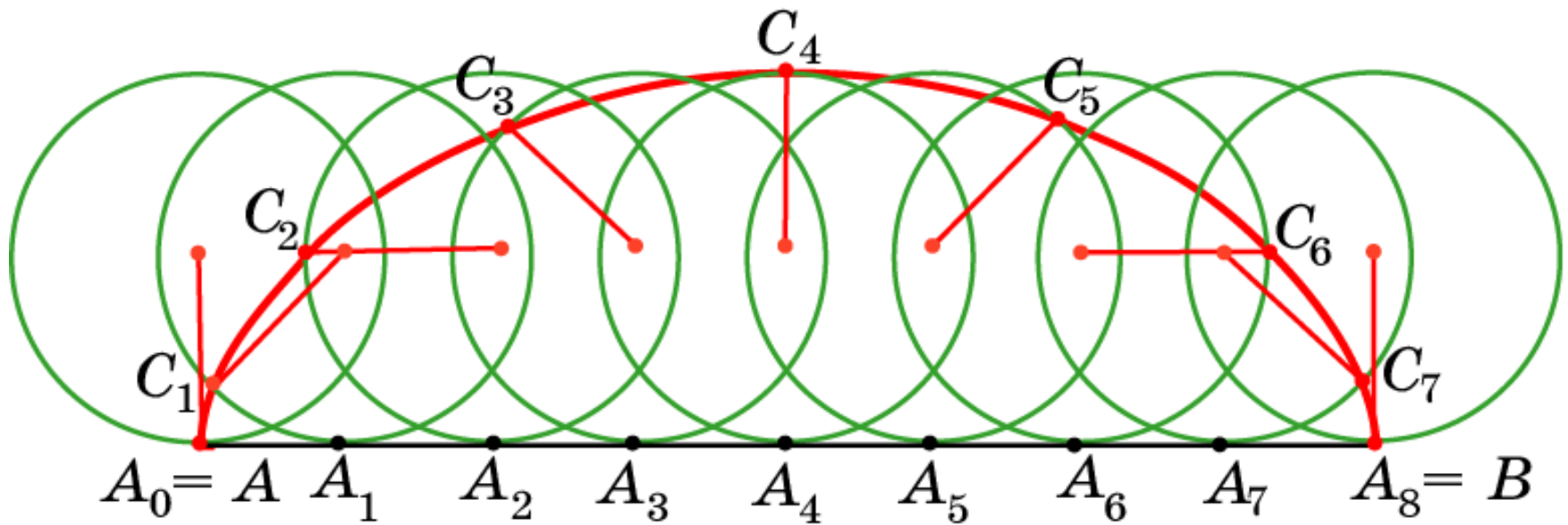
Кривая, которую описывает точка, закрепленная на окружности, катящейся по прямой, называется **циклоидой**.

Для изображения циклоиды отложим на прямой отрезок AB , равный длине окружности, т.е. $AB = 2\pi R$. Разделим этот отрезок на 8 равных частей точками $A_1, \dots, A_8=B$. Выясните, где будет находиться отмеченная точка A , когда окружность, катящаяся по прямой, достигнет точки B ?



Циклоида

Соединяя плавной кривой построенные точки, получим **ЦИКЛОИДУ**.



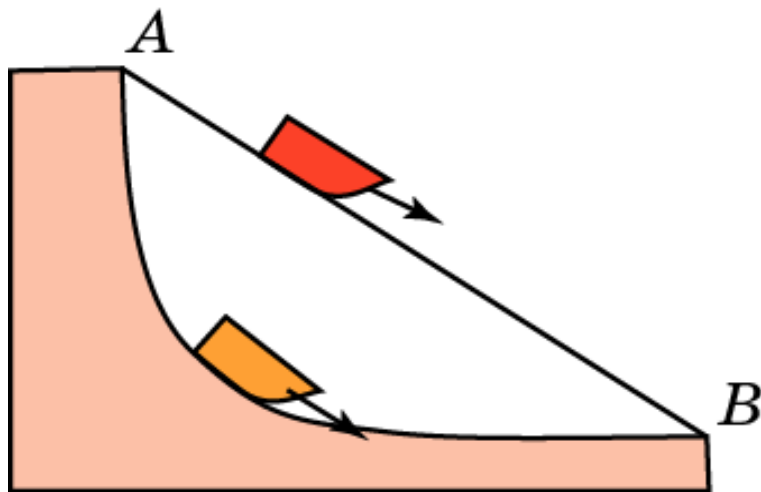
Первым, кто стал изучать циклоиду, был Галилео Галилей (1564 – 1642). Он же придумал и ее название.



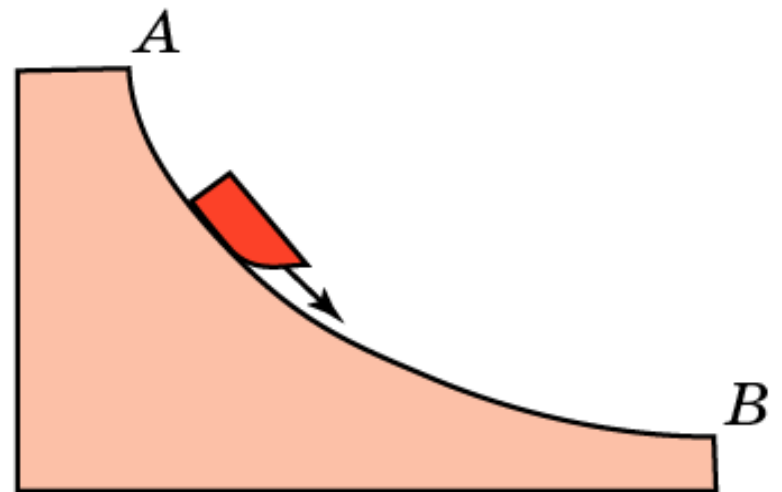
Свойство 1

Ледяная гора. В 1696 году И.Бернулли поставил задачу о нахождении кривой наискорейшего спуска, или, иначе говоря, задачу о том, какова должна быть форма ледяной горки (рис. а), чтобы, скатываясь по ней, совершить путь из начальной точки A в конечную точку B за кратчайшее время. Искомую кривую называли "брахистохроной", т.е. кривой кратчайшего времени.

Среди математиков, решавших эту задачу, были: Г.Лейбниц, И.Ньютон, Г.Лопиталь и Я.Бернулли. Они доказали, что искомой кривой является перевернутая циклоида (рис. б).



а)



б)

Свойство 2

Часы с маятником. Часы с обычным маятником не могут идти точно, поскольку период колебаний маятника зависит от его амплитуды. Голландский ученый Христиан Гюйгенс (1629 – 1695) задался вопросом, по какой кривой должен двигаться шарик на нитке маятника, чтобы период его колебаний не зависел от амплитуды. Искомой кривой оказалась перевернутая циклоида (рис. 1, 2). За это свойство циклоиду называют также "таутохрона" – кривая равных времен. Если, например, в форме перевернутой циклоиды изготовить желоб (рис. 1) и пустить по нему шарик, то период движения шарика под действием силы тяжести не будет зависеть от начального его положения и от амплитуды.

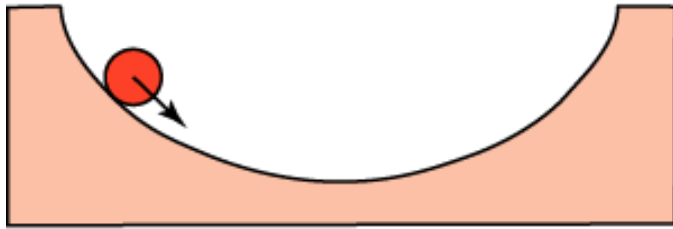


Рис. 1

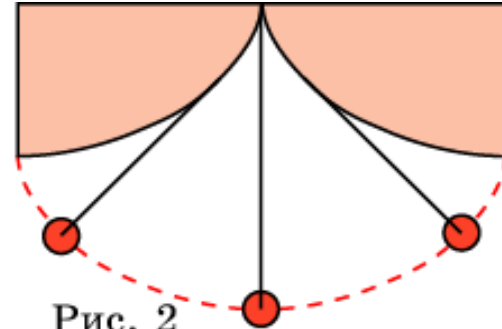
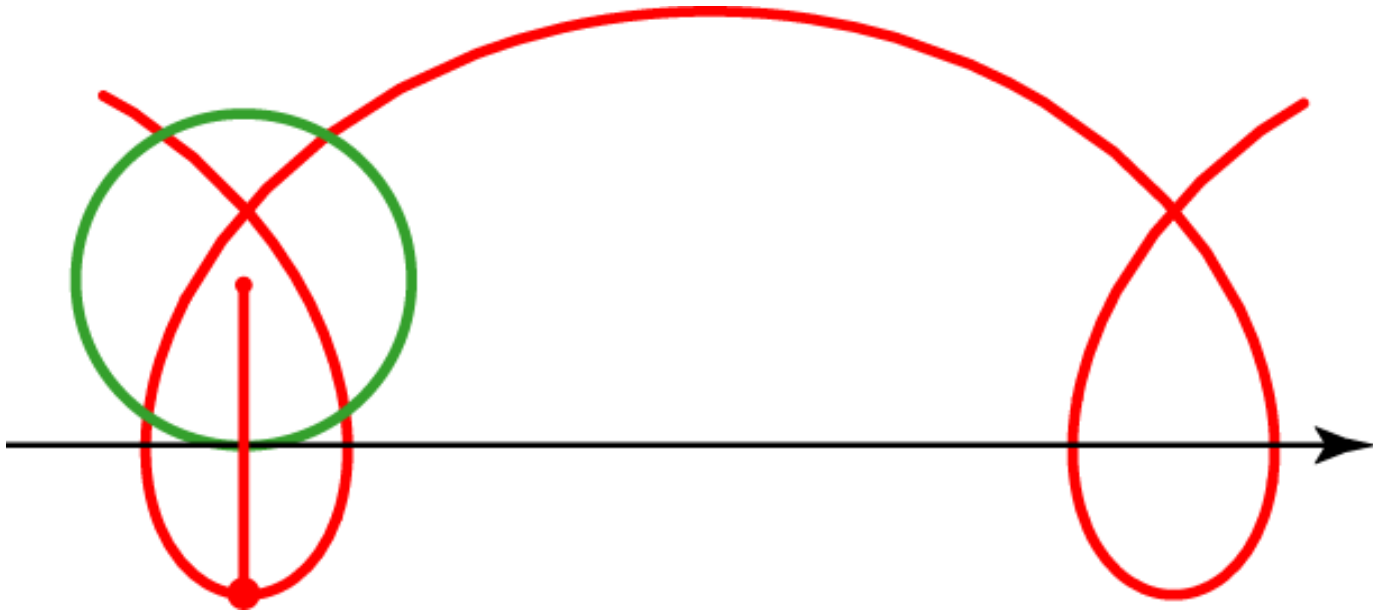


Рис. 2

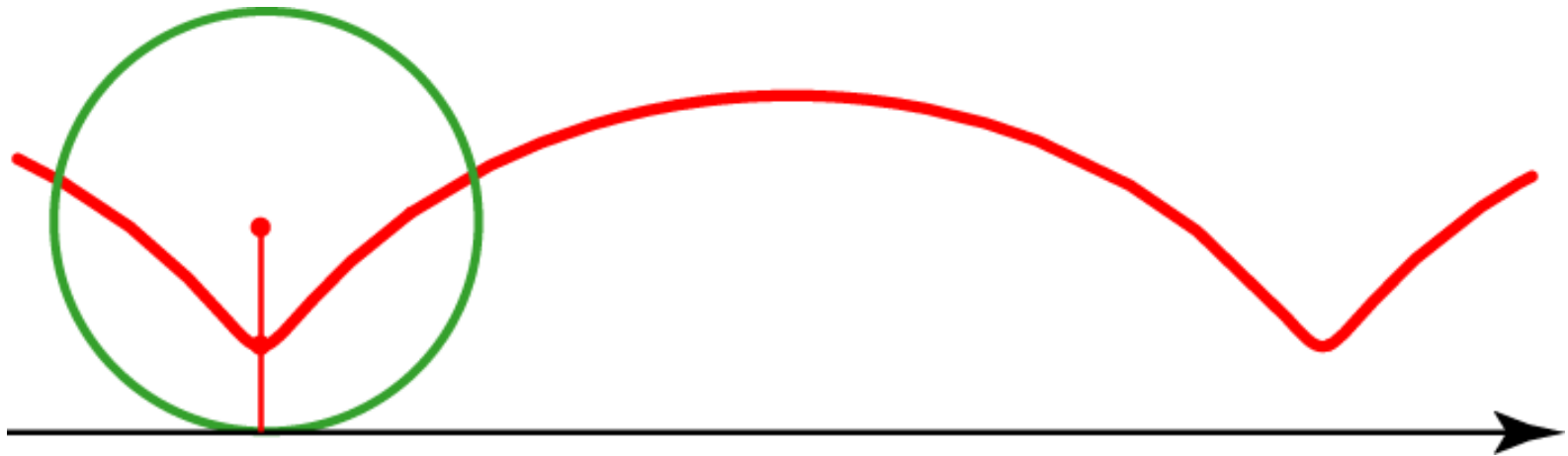
Удлиненная циклоида

Кривая, которую описывает точка, закрепленная на продолжении радиуса окружности, катящейся по прямой, называется **удлиненной циклоидой**.



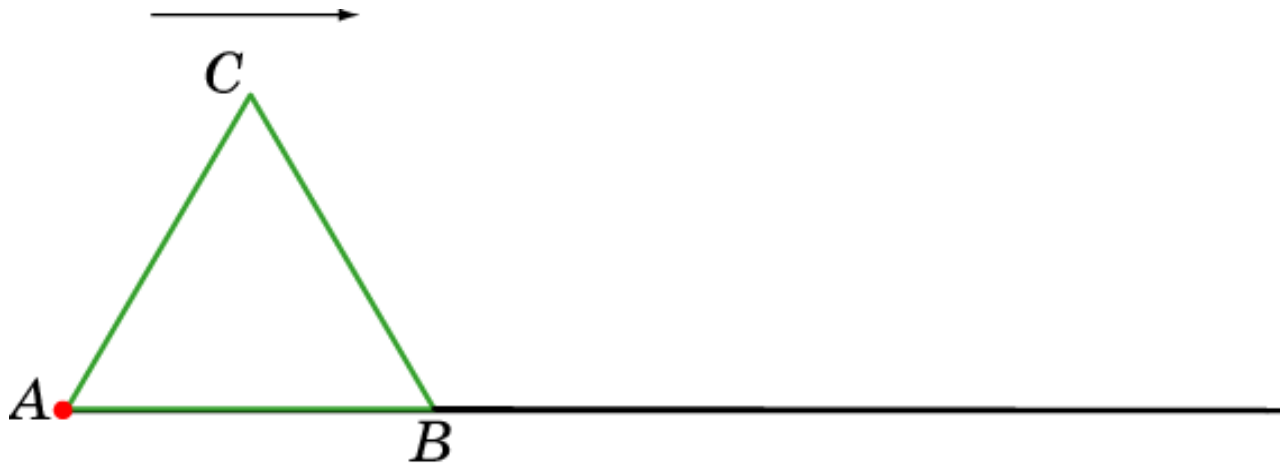
Укороченная циклоида

Кривая, которую описывает точка, закрепленная на радиусе внутри окружности, катящейся по прямой, называется **укороченной циклоидой**.

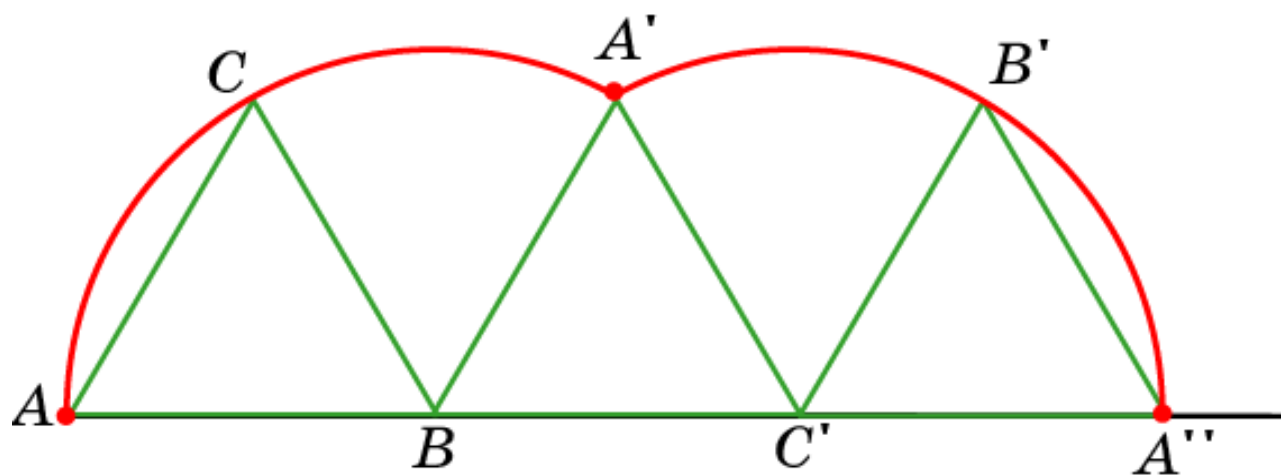


Упражнение

Нарисуйте траекторию движения вершины правильного треугольника, катящегося по прямой.



Ответ

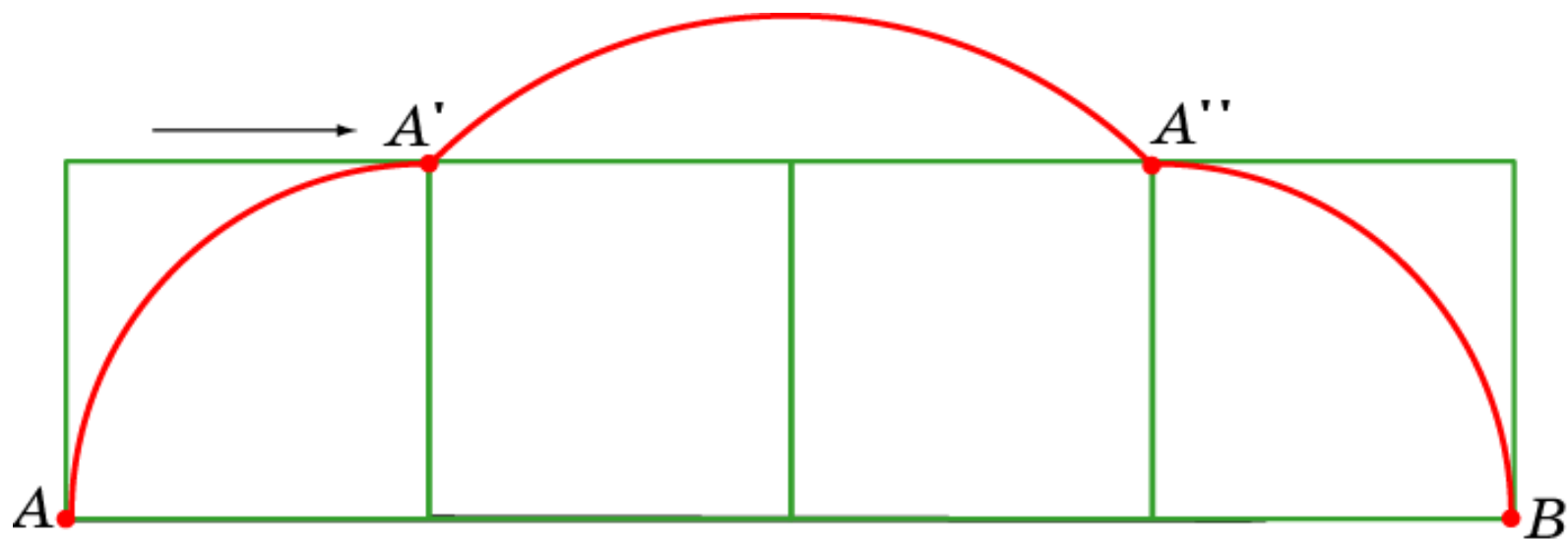


Упражнение

Нарисуйте траекторию движения вершины квадрата, катящегося по прямой.



Ответ

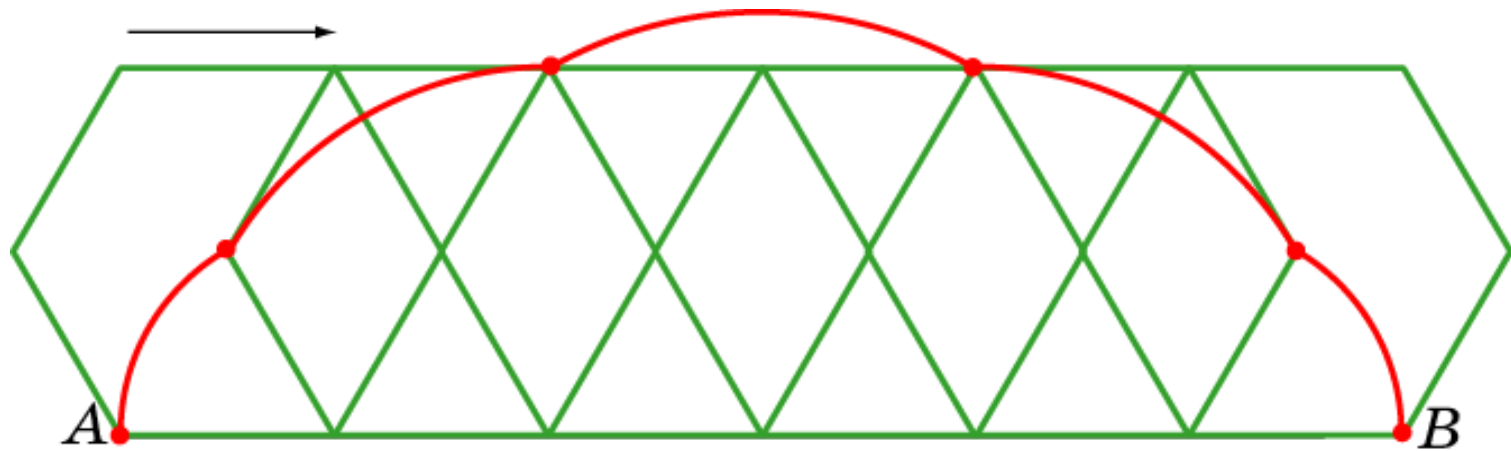


Упражнение

Нарисуйте траекторию движения вершины правильного шестиугольника, катящегося по прямой.



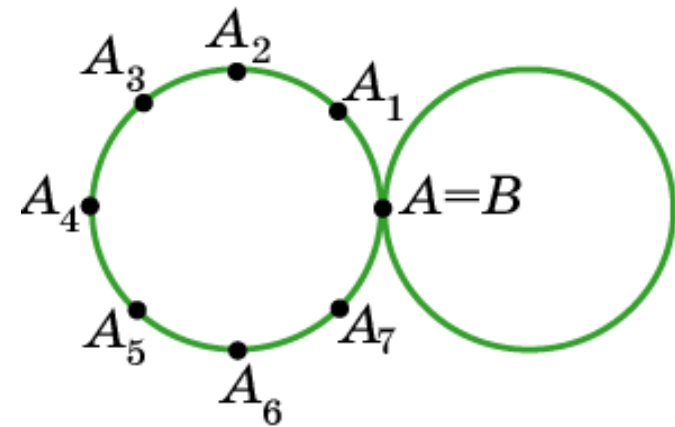
Ответ



Кардиоиды

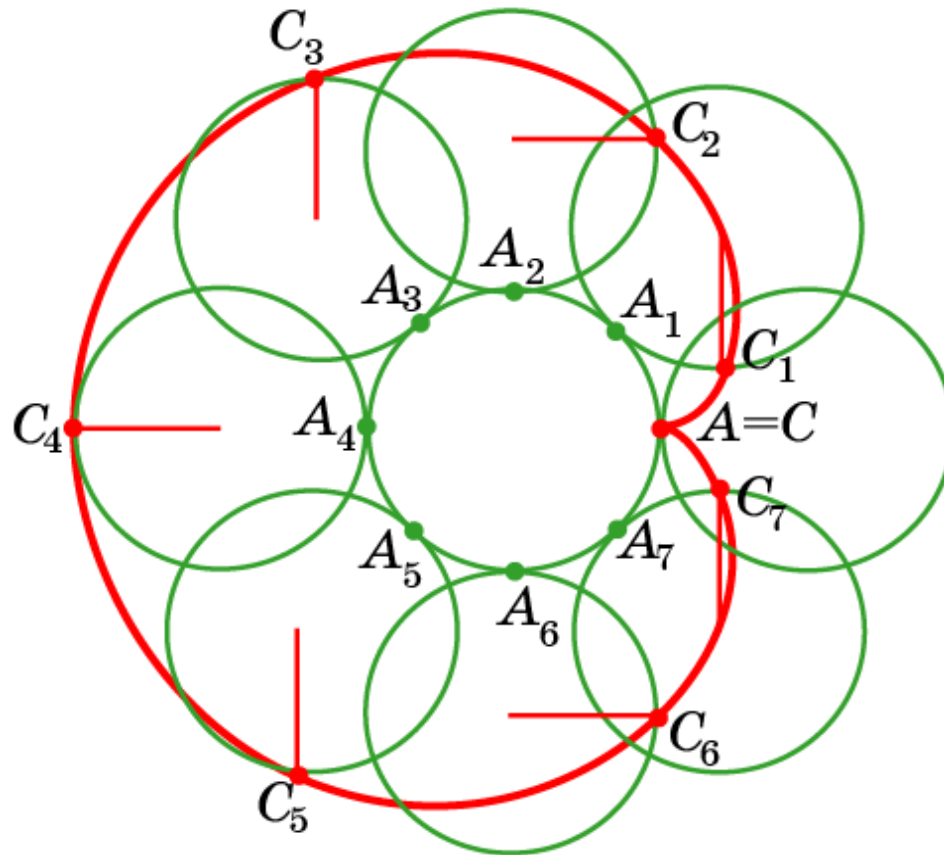
Траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности того же радиуса, называется **кардиоидой**.

Для изображения кардиоиды разделим окружность на 8 равных частей точками $A_1, \dots, A_8 = B$. Выясните, где будет находиться отмеченная точка A , когда окружность, катящаяся по прямой, достигнет точки: а) A_4 ; б) A_2 ; в) A_6 ; г) A_1 ; д) A_3 ; е) A_5 ; ж) A_7 .



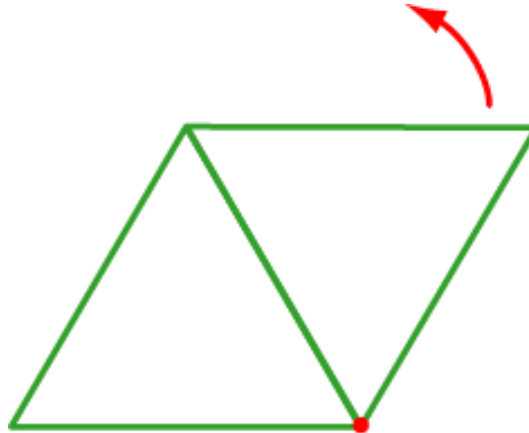
Кардиоида

Соединяя плавной кривой построенные точки, получим кардиоиду.

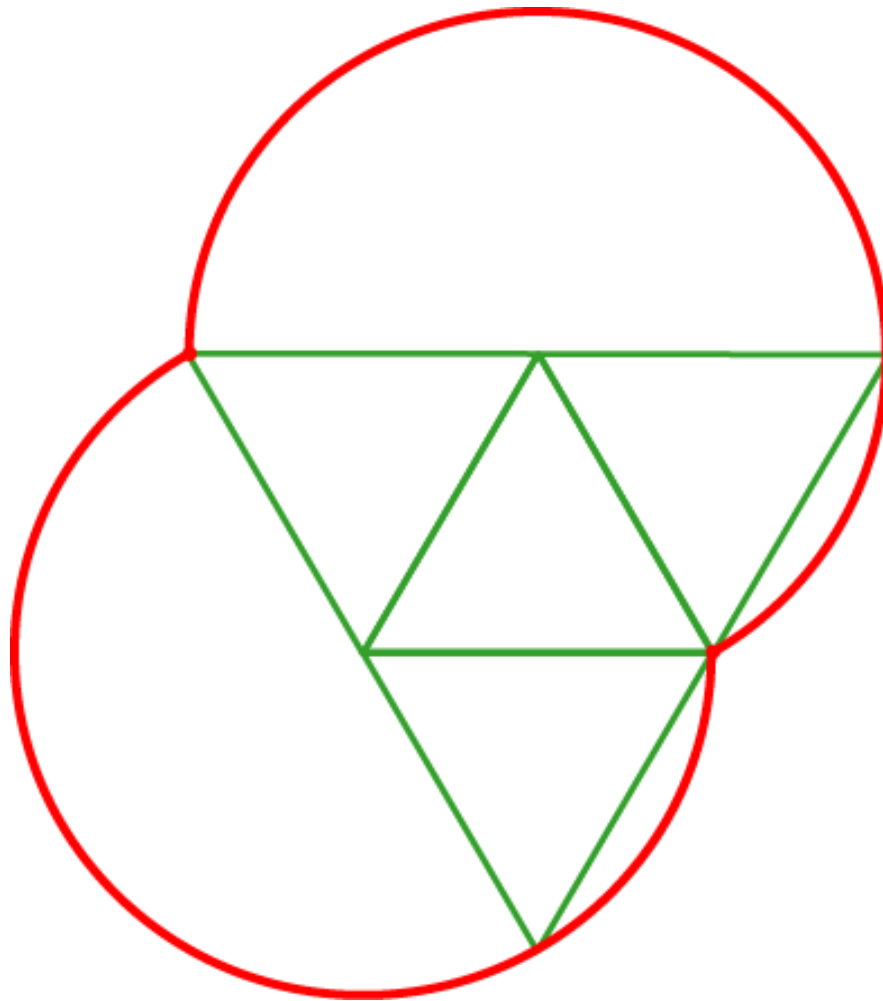


Упражнение

Нарисуйте траекторию движения вершины правильного треугольника, катящегося с внешней стороны по другому правильному треугольнику.

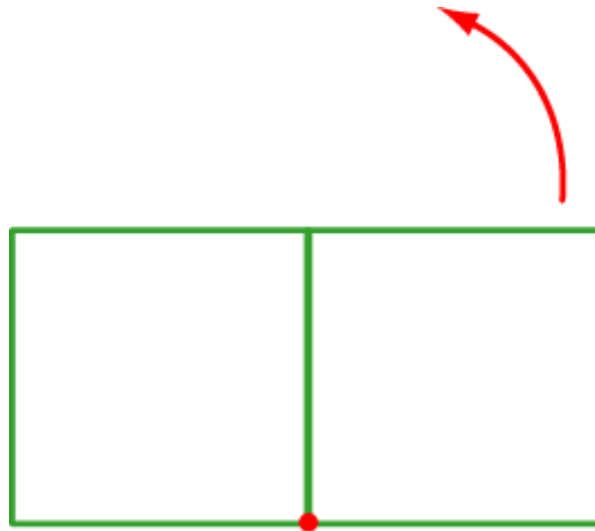


Ответ

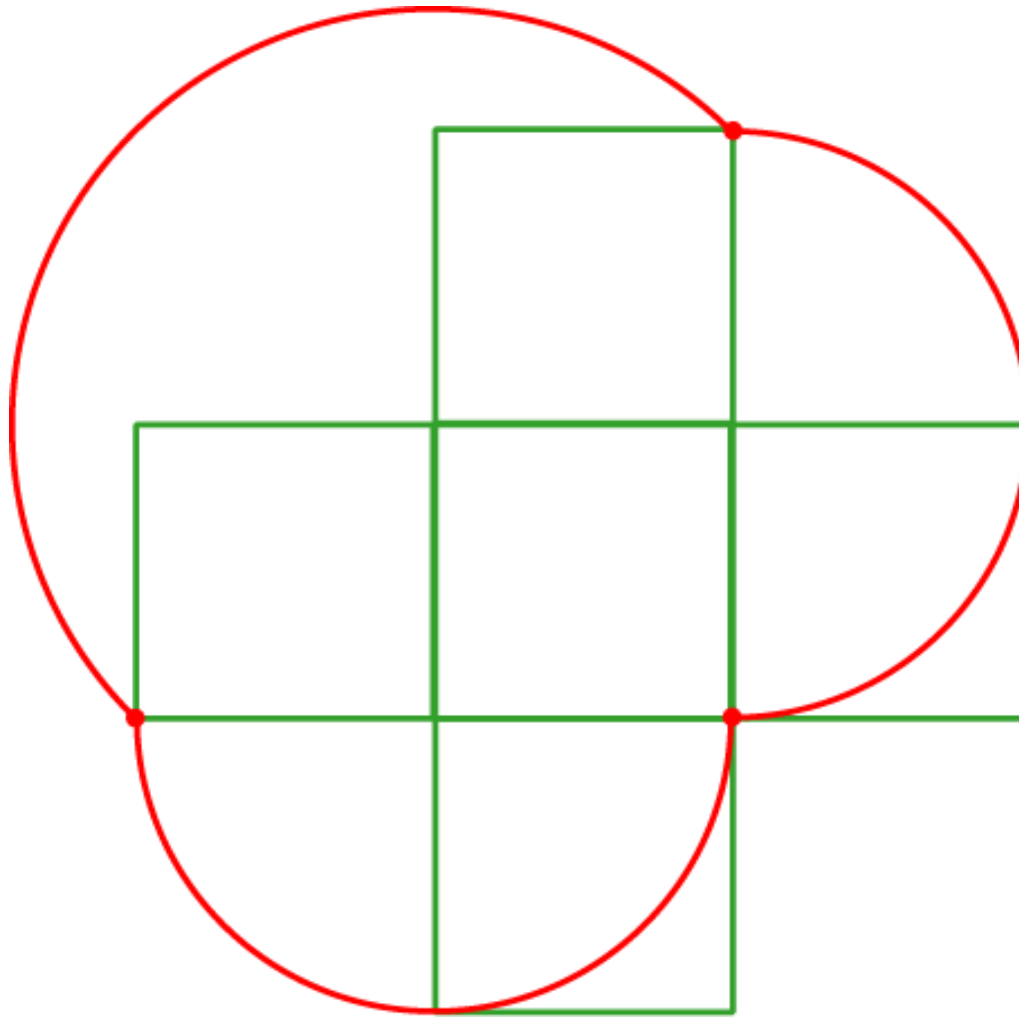


Упражнение

Нарисуйте траекторию движения вершины квадрата, катящегося с внешней стороны по другому квадрату.

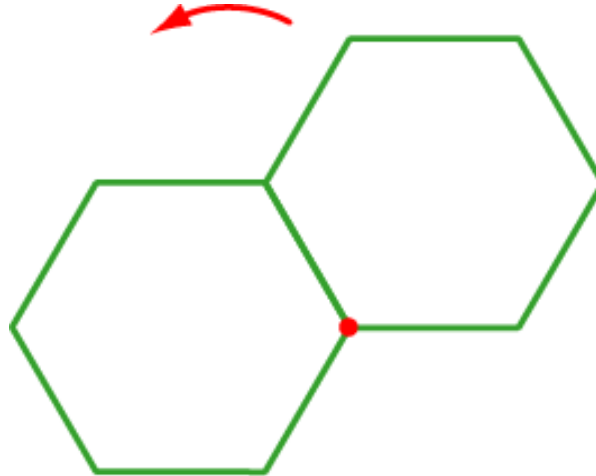


Ответ

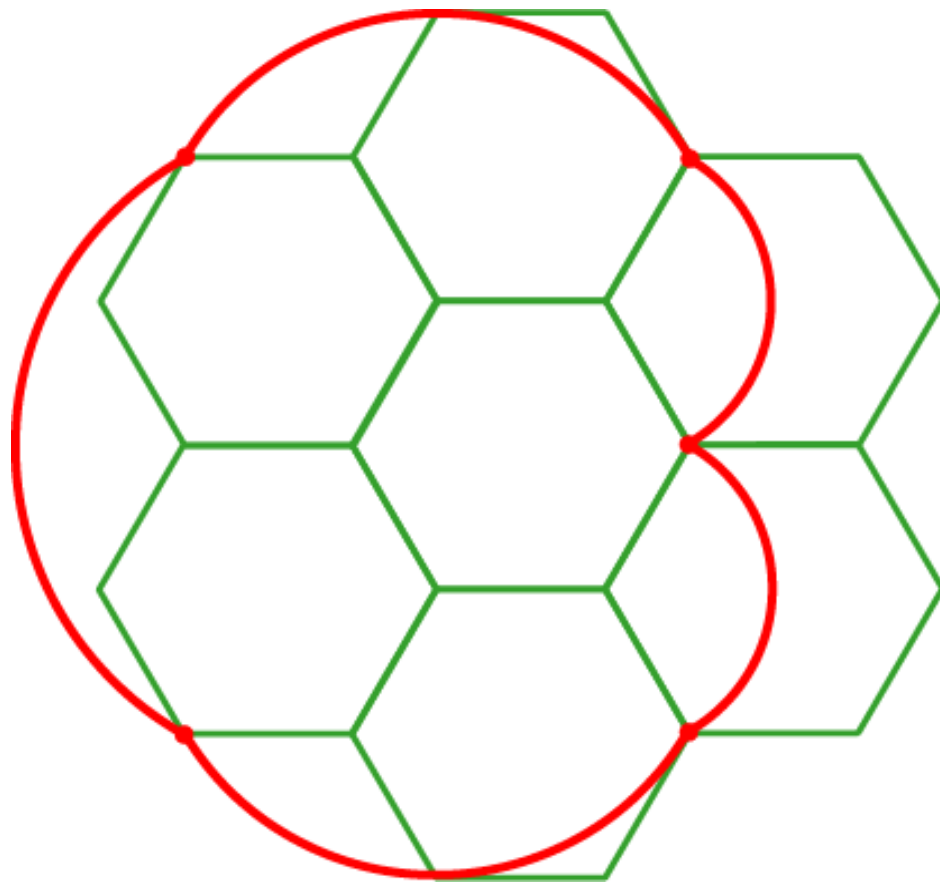


Упражнение

Нарисуйте траекторию движения вершины правильного шестиугольника, катящегося с внешней стороны по другому правильному шестиугольнику.

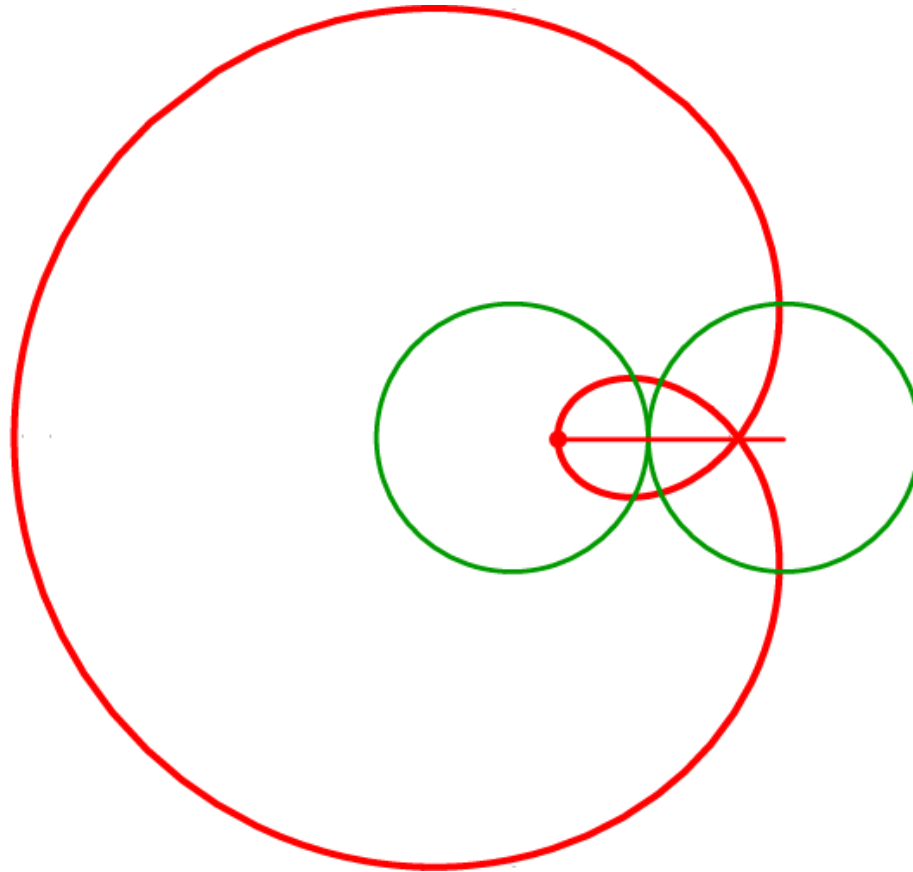


Ответ



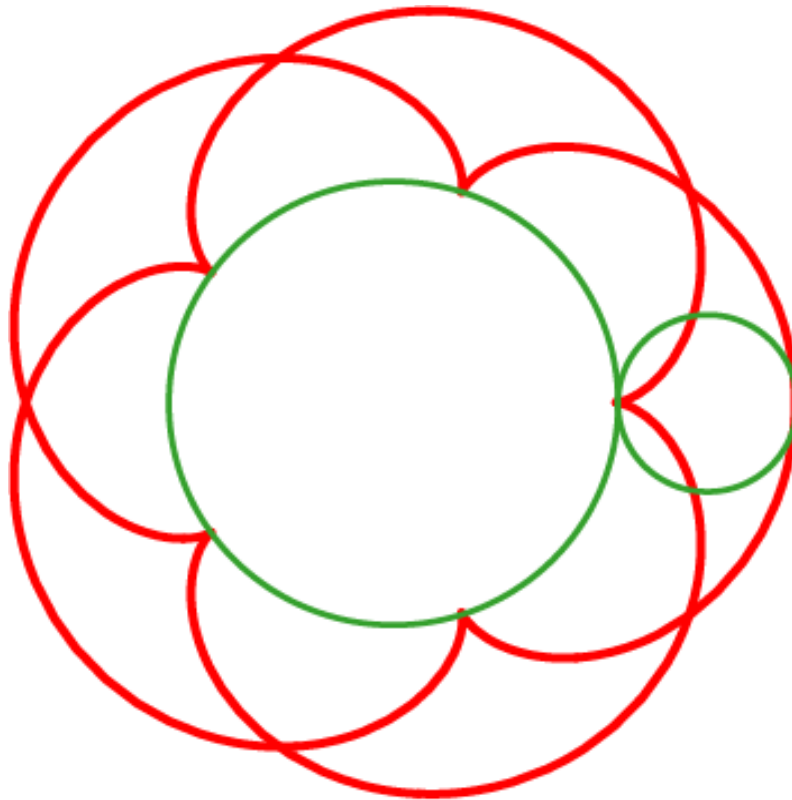
Удлиненная кардиоида

Траектория движения точки, закрепленной на продолжении радиуса окружности, катящейся по другой окружности того же радиуса, называется **удлиненной кардиоидой**. Нарисуйте эту кривую.



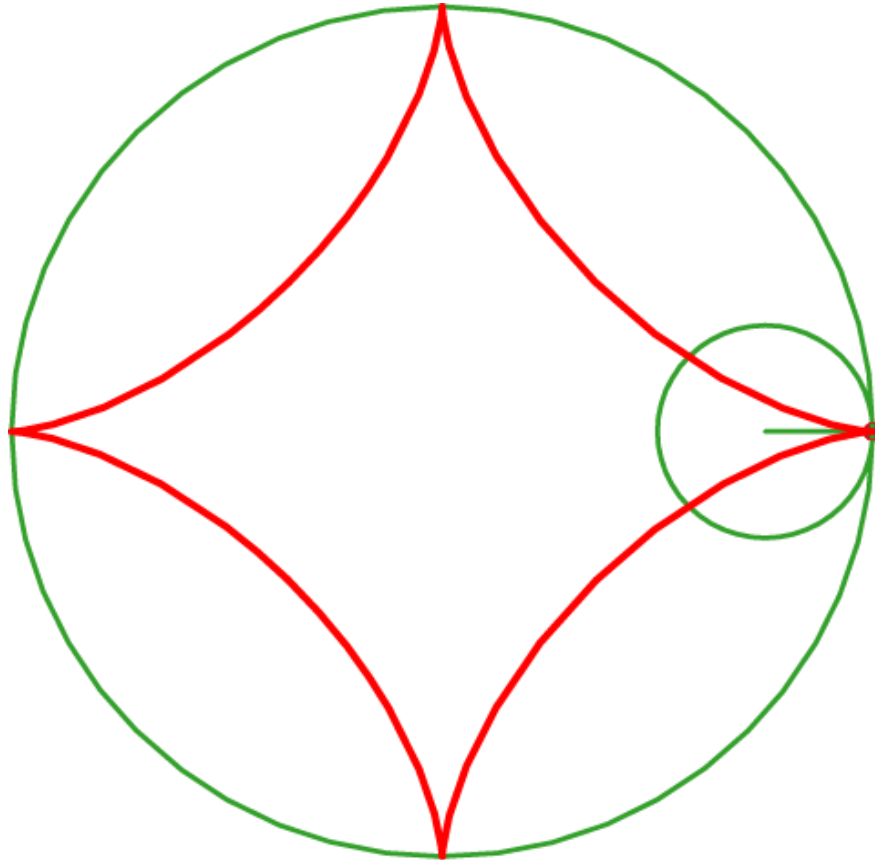
Упражнение

Нарисуйте траекторию движения точки, закрепленной на окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности, если отношение радиусов равно 2:5.



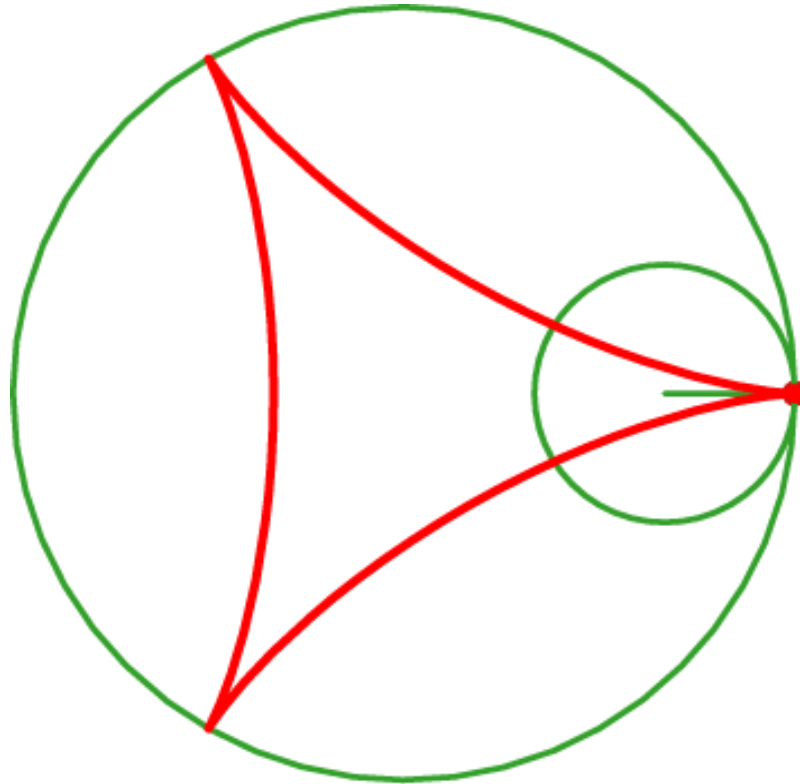
Астроида

Траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся внутри другой окружности в 4 раза большего радиуса, называется **астроидой**. Нарисуйте эту кривую.



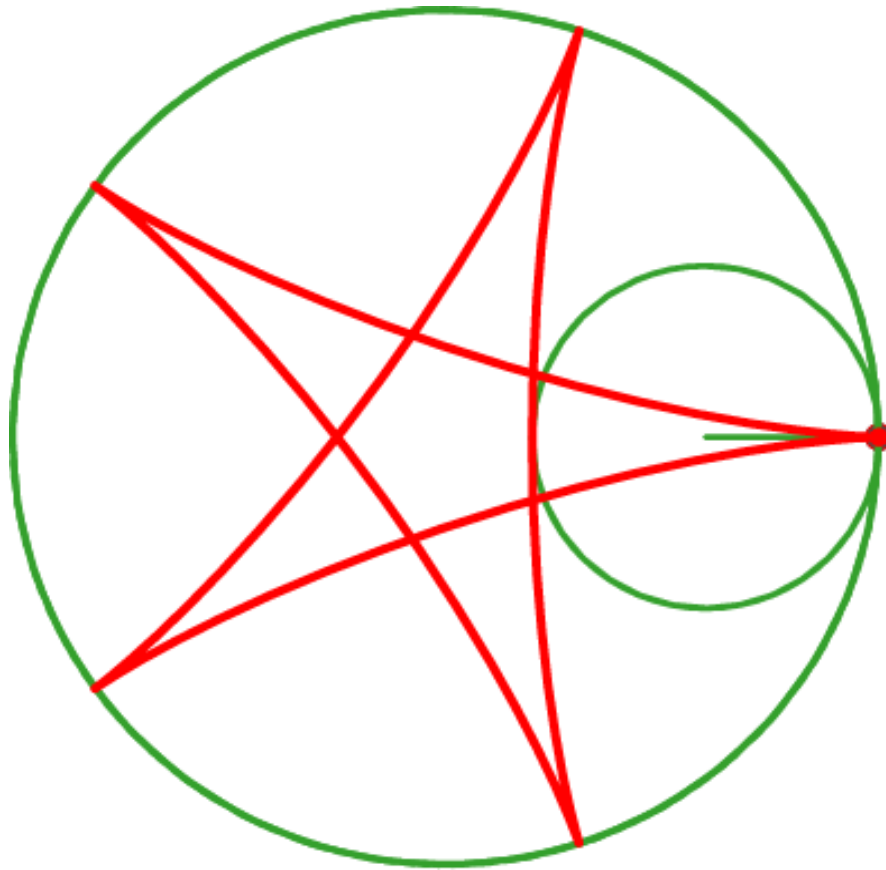
Кривая Штейнера

Траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся внутри другой окружности в 3 раза большего радиуса, называется **кривой Штейнера**. Нарисуйте эту кивую.



Гипоциклоида

Кривая, которую описывает точка, закрепленная на окружности, катящейся с внутренней стороны по другой окружности, называется **гипоциклоидой**. При этом отношение радиусов может быть различным. Нарисуйте гипоциклоиду, когда отношение радиусов равно 2:5.



Литература

1. Берман Г.Н. Циклоида. – М.: Наука, 1980.
2. Веров С. Касательные к рулеттам. – Квант, 1975, № 5, с. 22-30.
3. Веров С. Тайны циклоиды. – Квант, 1975, № 8, с. 19-27.
4. Веров С. Брахистохрона, или Еще одна тайна циклоиды. – Квант, 1975, № 12, с. 29-35.
5. Савелов А.А. Плоские кривые. – М.: Физматлит, 1960.

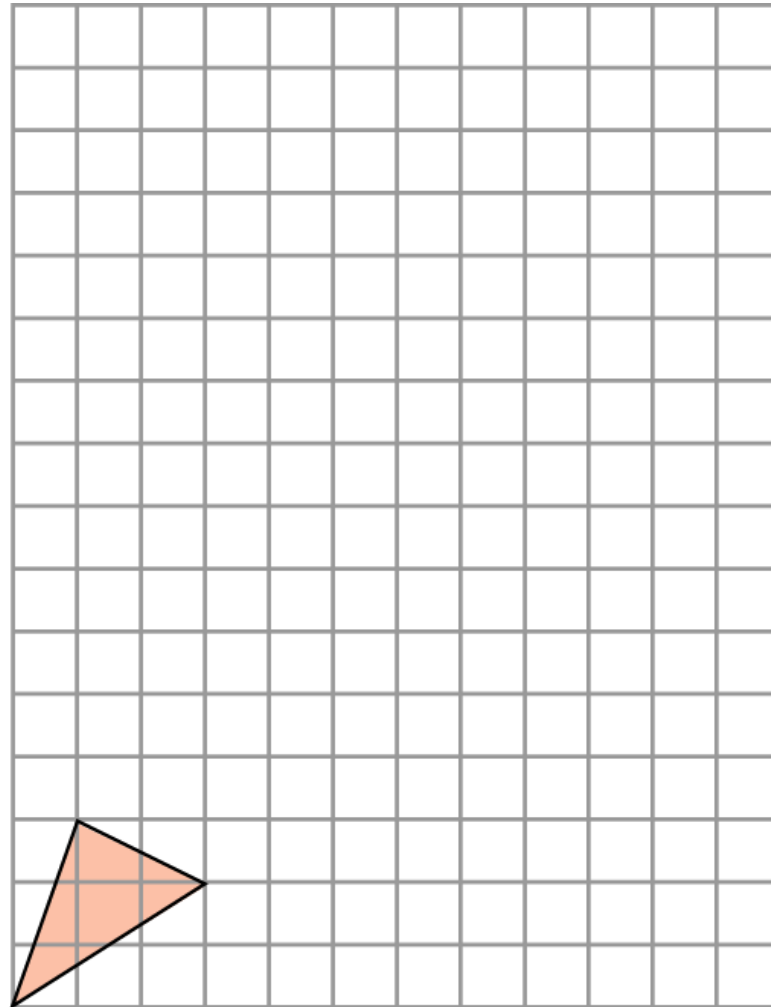
ПАРКЕТЫ

Паркетом называется такое заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек.

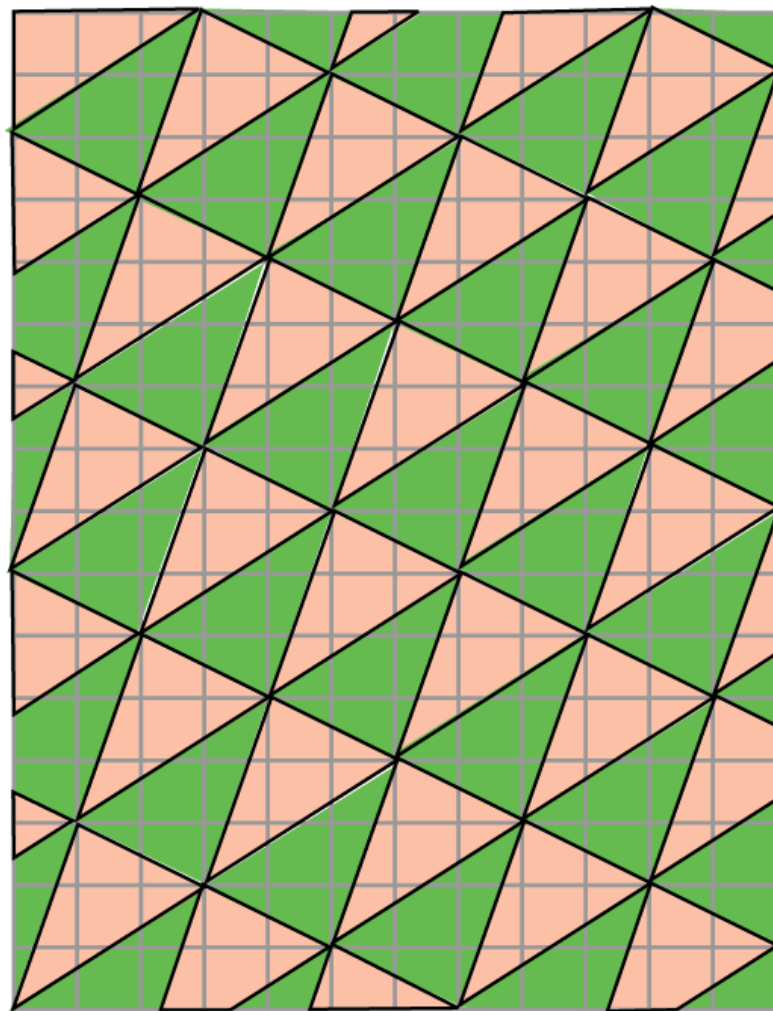
Паркет называется **правильным**, если он состоит из правильных многоугольников, и вокруг каждой вершины правильные многоугольники расположены одним и тем же способом.

Упражнение

Изобразите паркет, составленный из треугольников, равных данному. Раскрасьте треугольники в два цвета так, чтобы соседние треугольники были окрашены разными цветами.

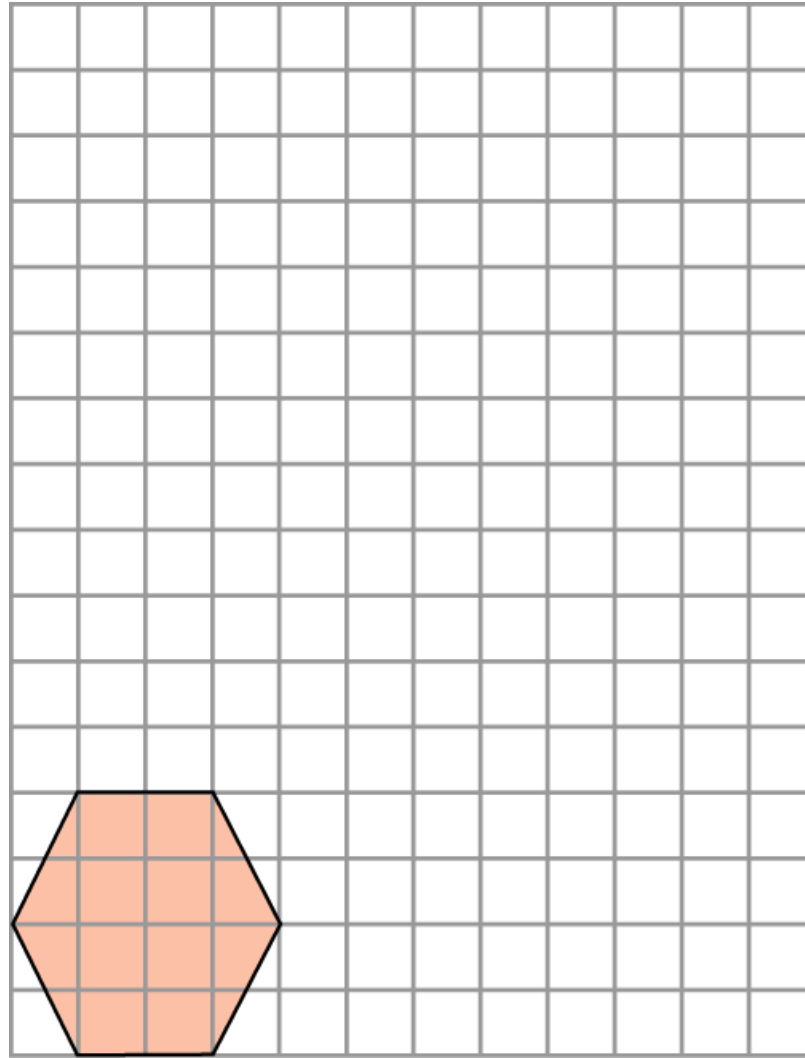


Ответ

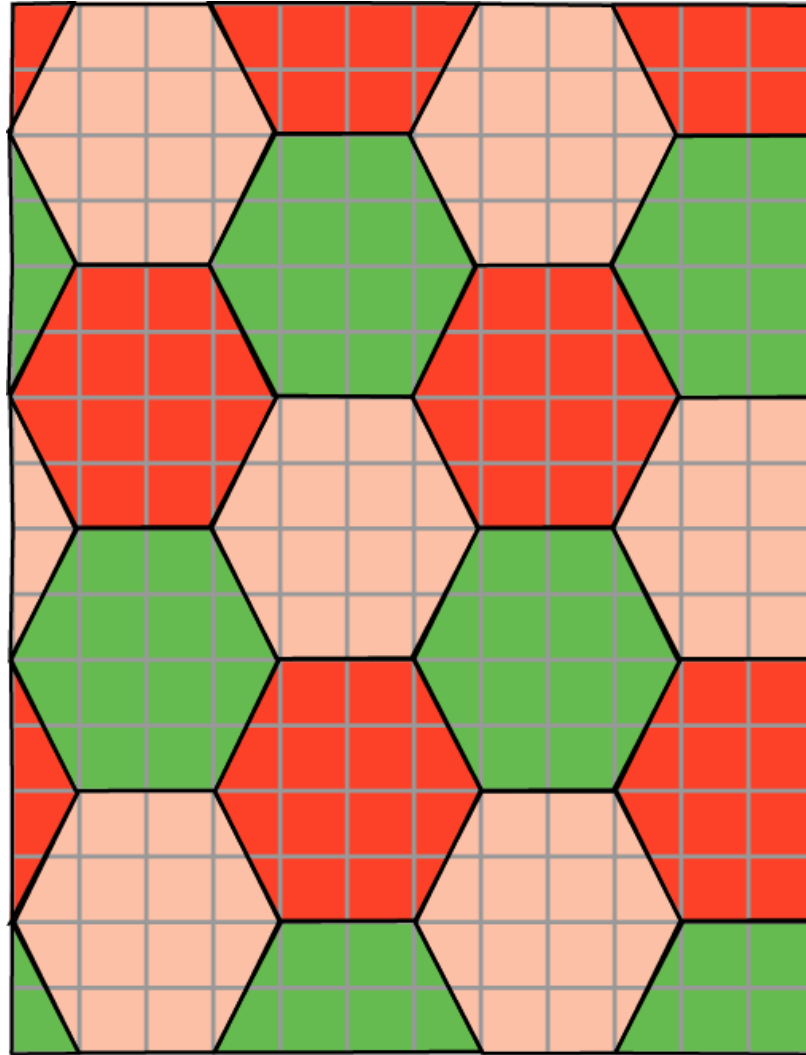


Упражнение

Изобразите паркет, составленный из шестиугольников, равных данному. Раскрасьте шестиугольники в три цвета так, чтобы соседние шестиугольники были окрашены разными цветами.

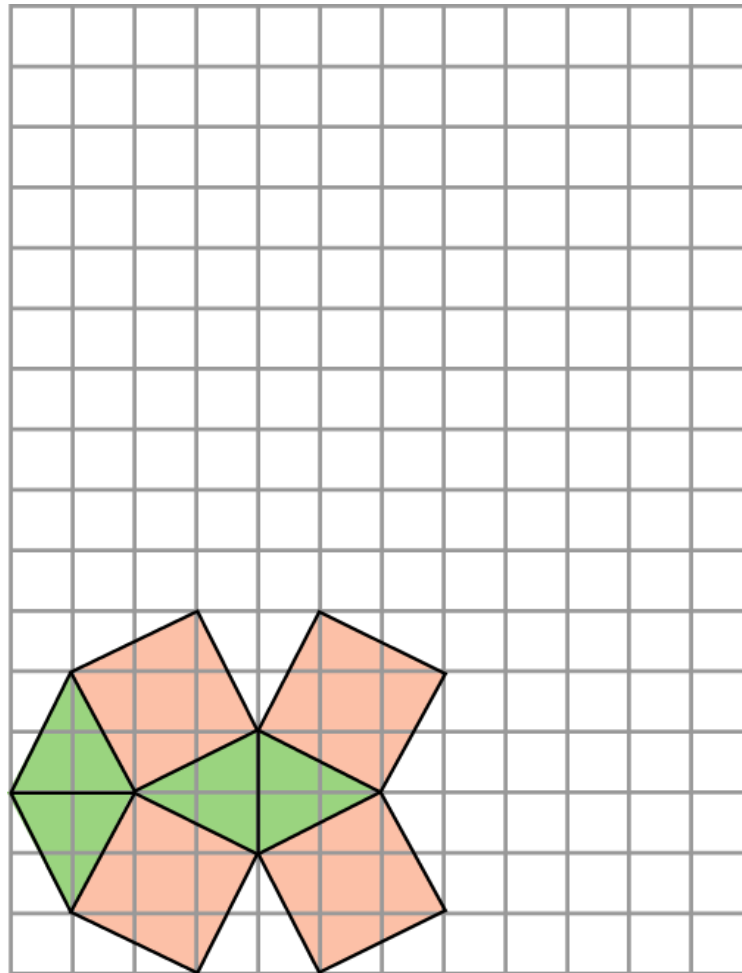


Ответ

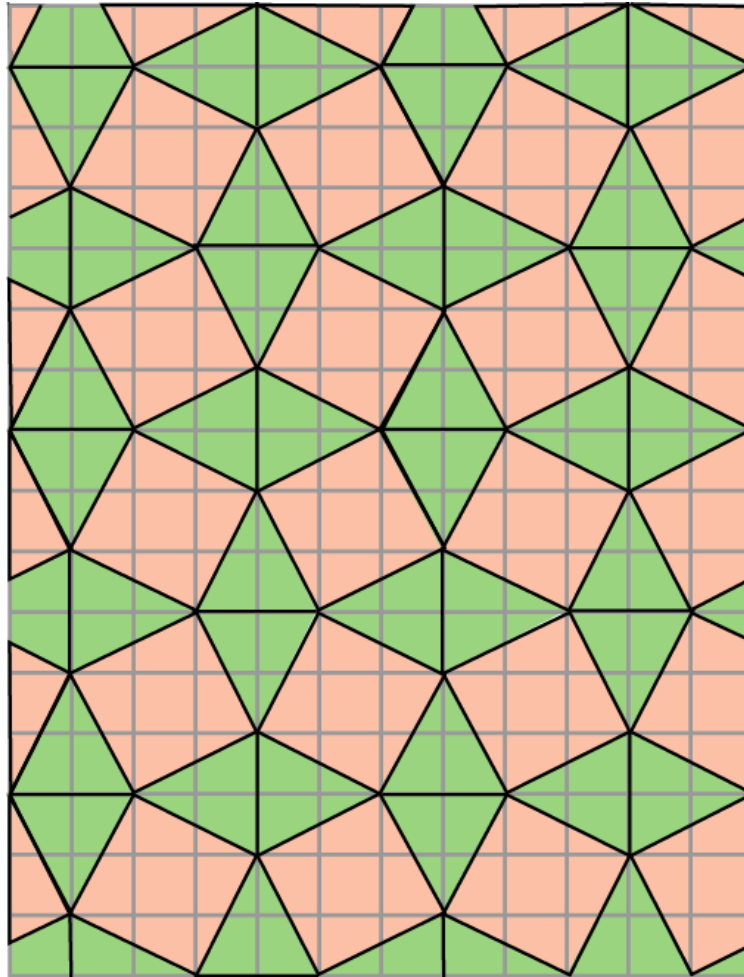


Упражнение

Продолжите составление паркета из квадратов и треугольников, равных данным, так, чтобы в каждой вершине сходилось два квадрата и три треугольника. Раскрасьте квадраты одним цветом, а треугольники – другим.

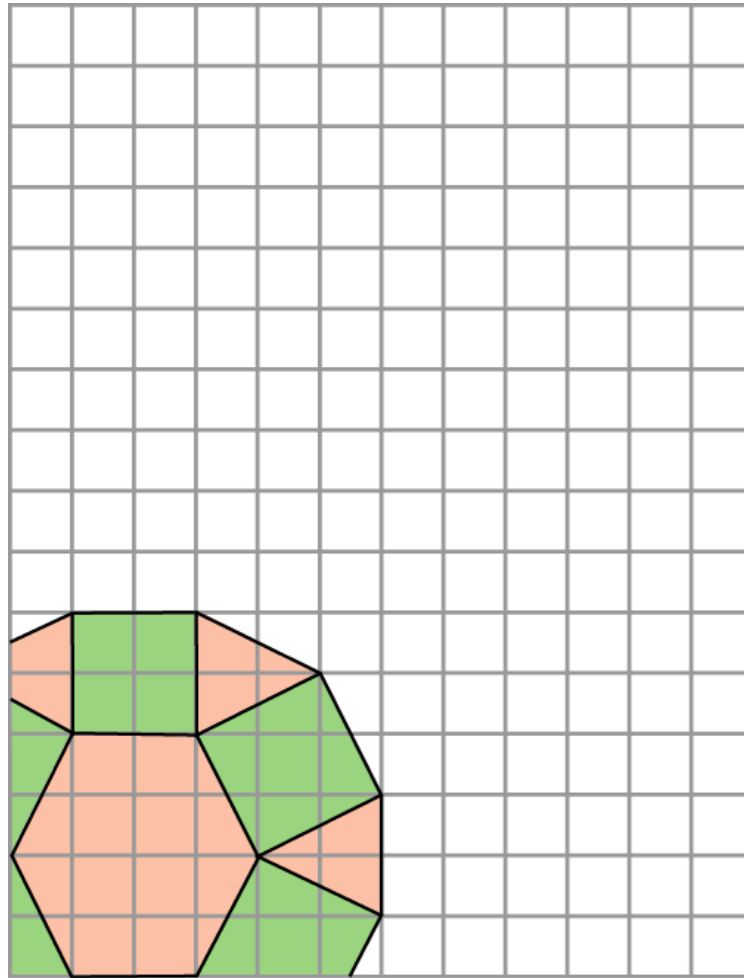


Ответ

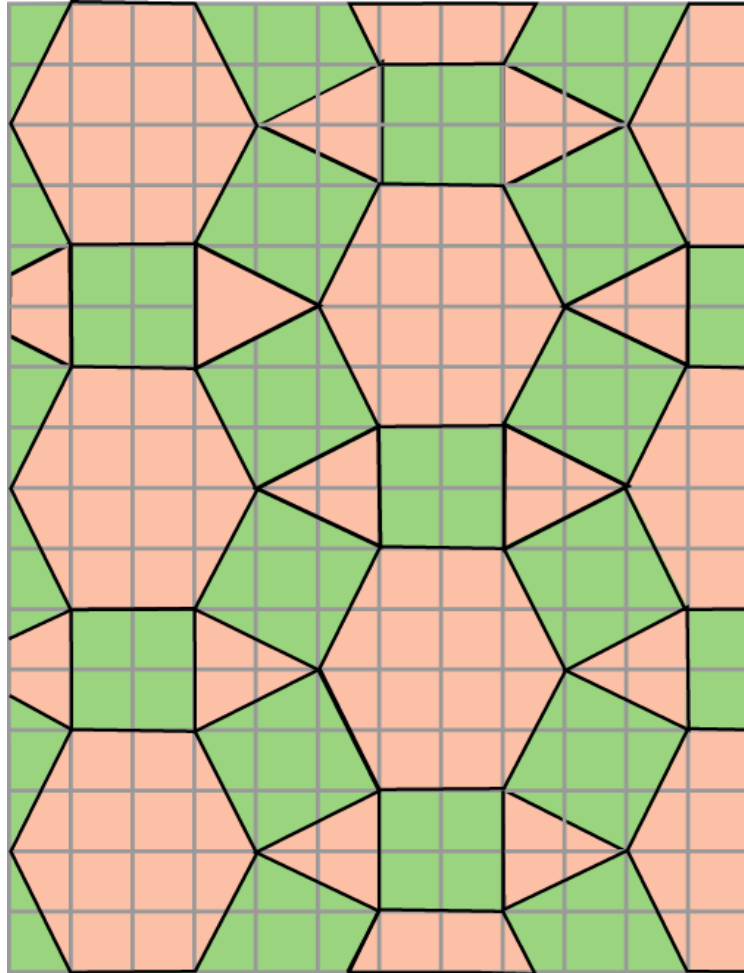


Упражнение

Продолжите составление паркета из шестиугольников, квадратов и треугольников, равных данным, так, чтобы в каждой вершине сходились шестиугольник, два квадрата и треугольник. Раскрасьте шестиугольники и треугольники одним цветом, а квадраты — другим.

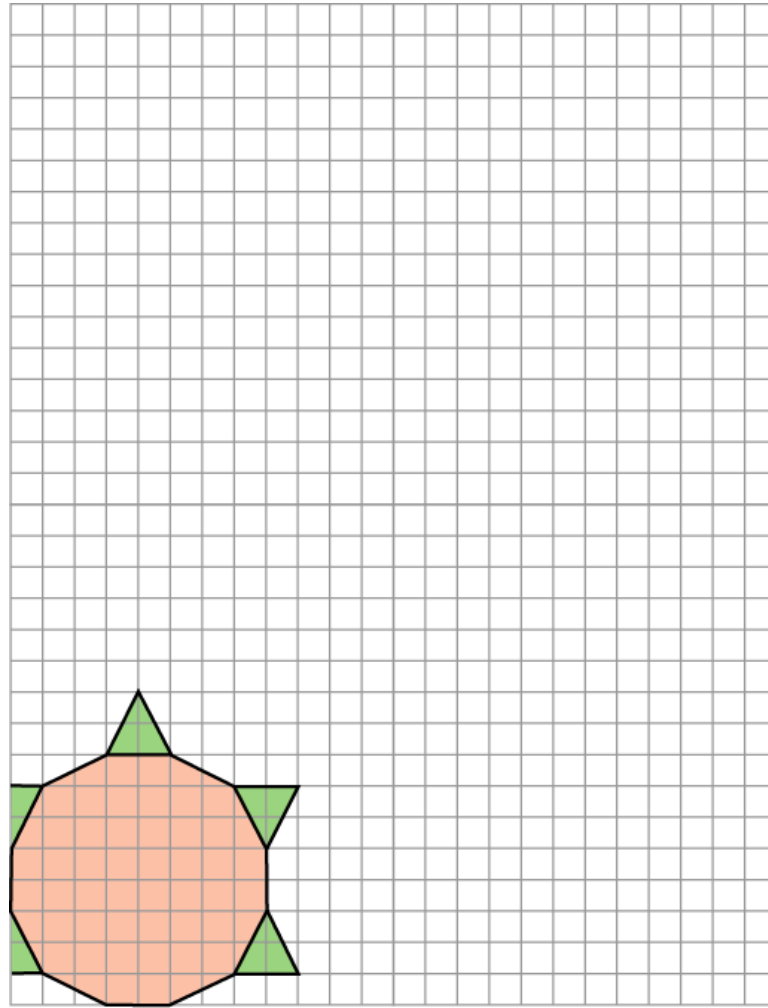


Ответ

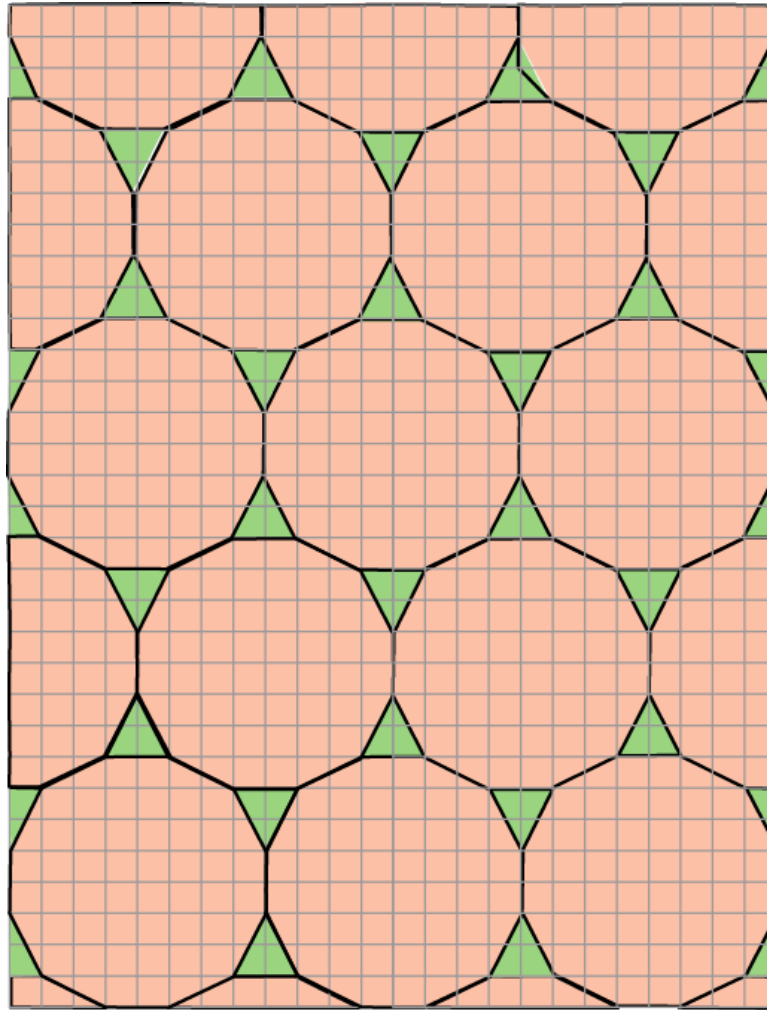


Упражнение

Продолжите составление паркета из двенадцатиугольников и треугольников, равных данным, так, чтобы в каждой вершине сходилось два двенадцатиугольника и один треугольник. Раскрасьте двенадцатиугольники одним цветом, а треугольники – другим.

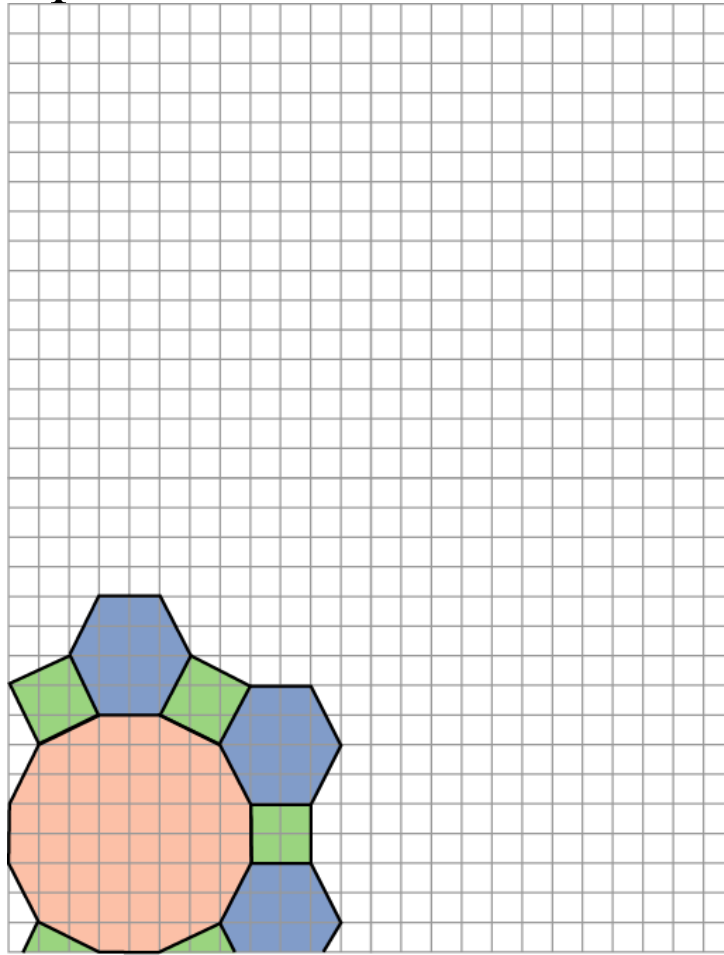


Ответ

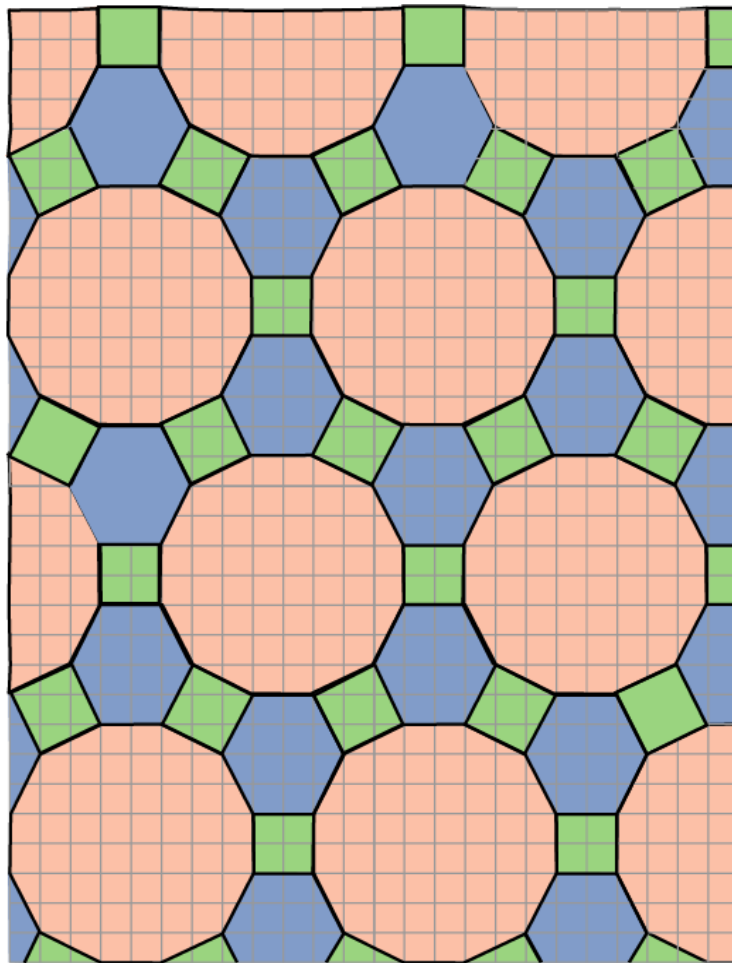


Упражнение

Продолжите составление паркета из двенадцатиугольников, шестиугольников и квадратов, равных данным, так, чтобы в каждой вершине сходилось двенадцатиугольник, шестиугольник и квадрат. Раскрасьте двенадцатиугольники одним цветом, шестиугольники — другим, а квадраты — третьим.

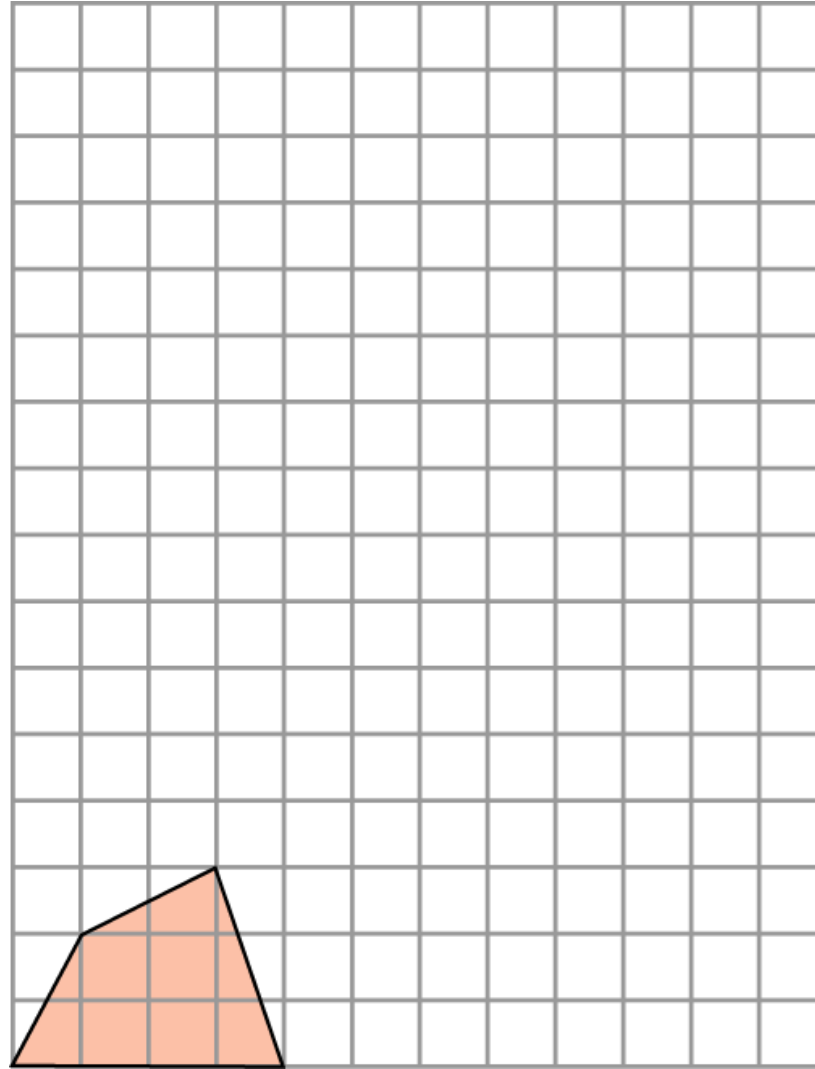


Ответ

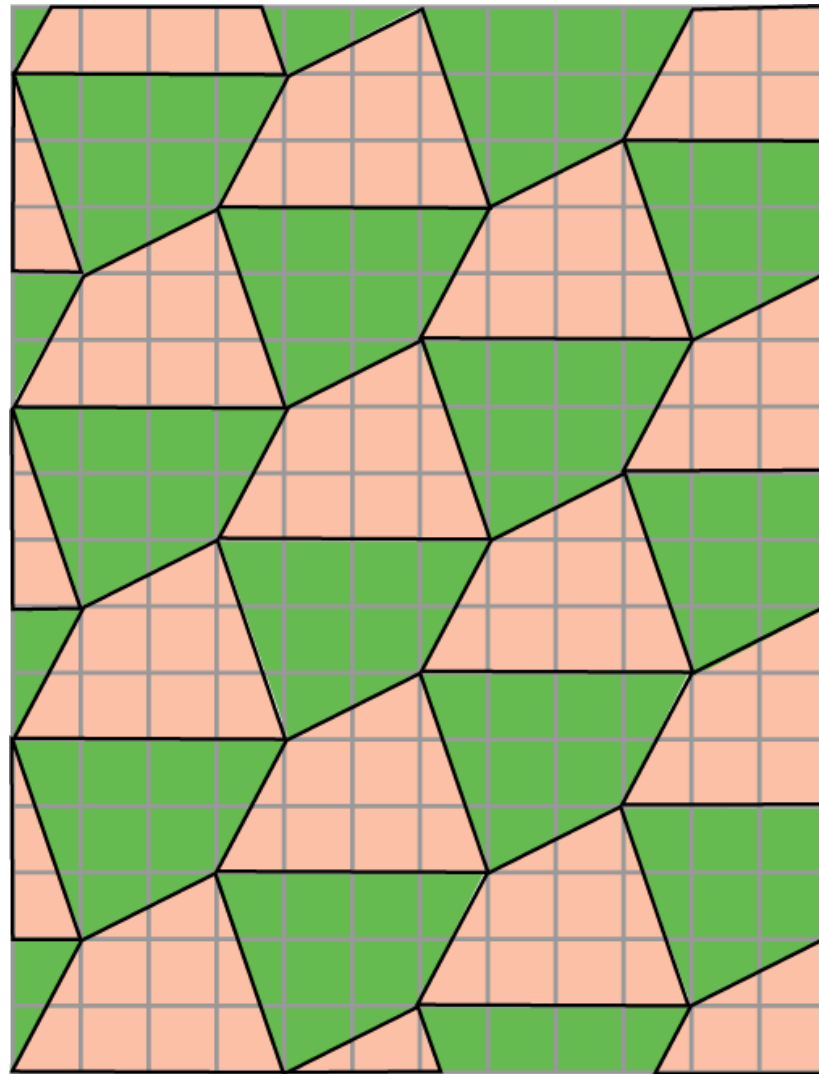


Упражнение

Изобразите паркет, составленный из четырехугольников, равных данному. Раскрасьте четырехугольники в два цвета так, чтобы соседние четырехугольники были окрашены разными цветами.

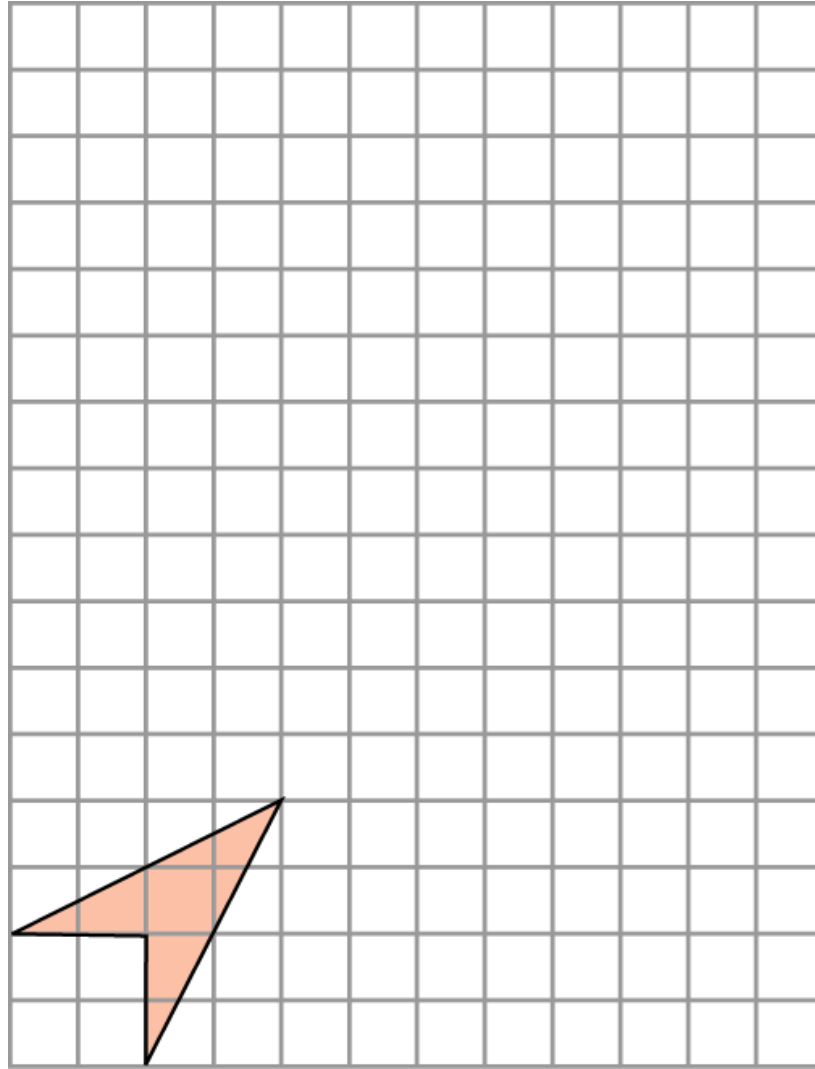


Ответ

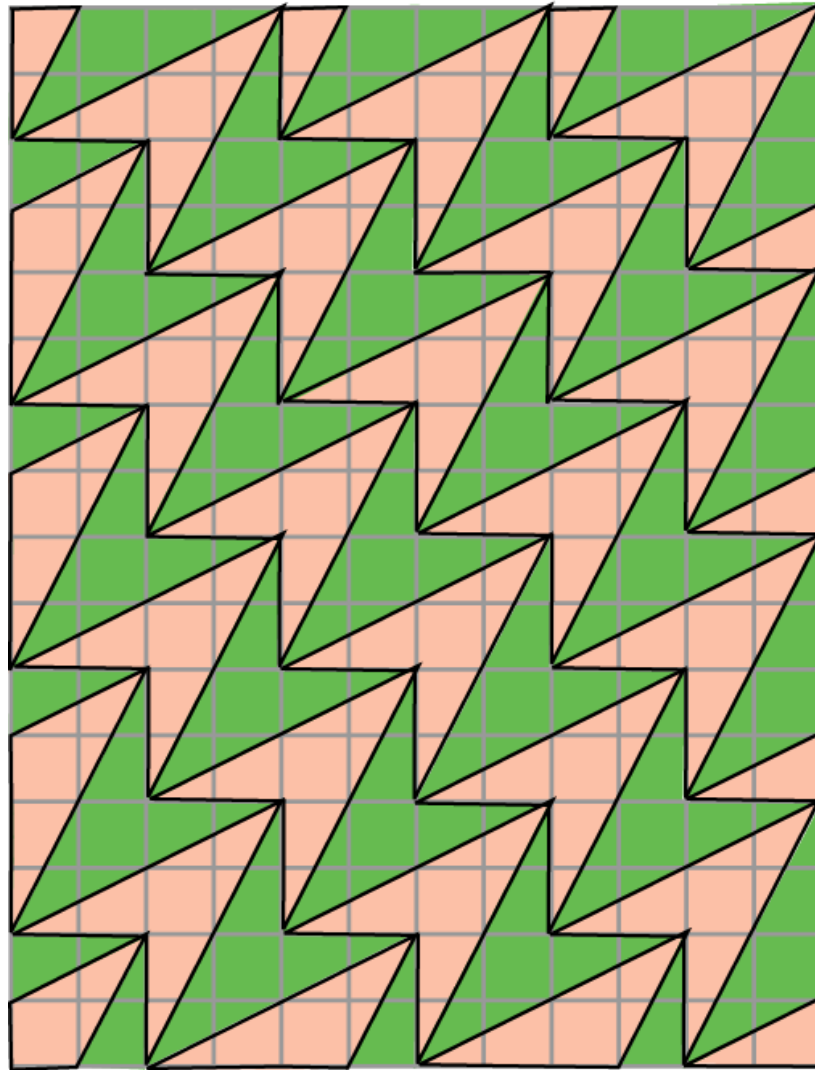


Упражнение

Изобразите паркет, составленный из четырехугольников, равных данному. Раскрасьте четырехугольники в два цвета так, чтобы соседние четырехугольники были окрашены разными цветами.

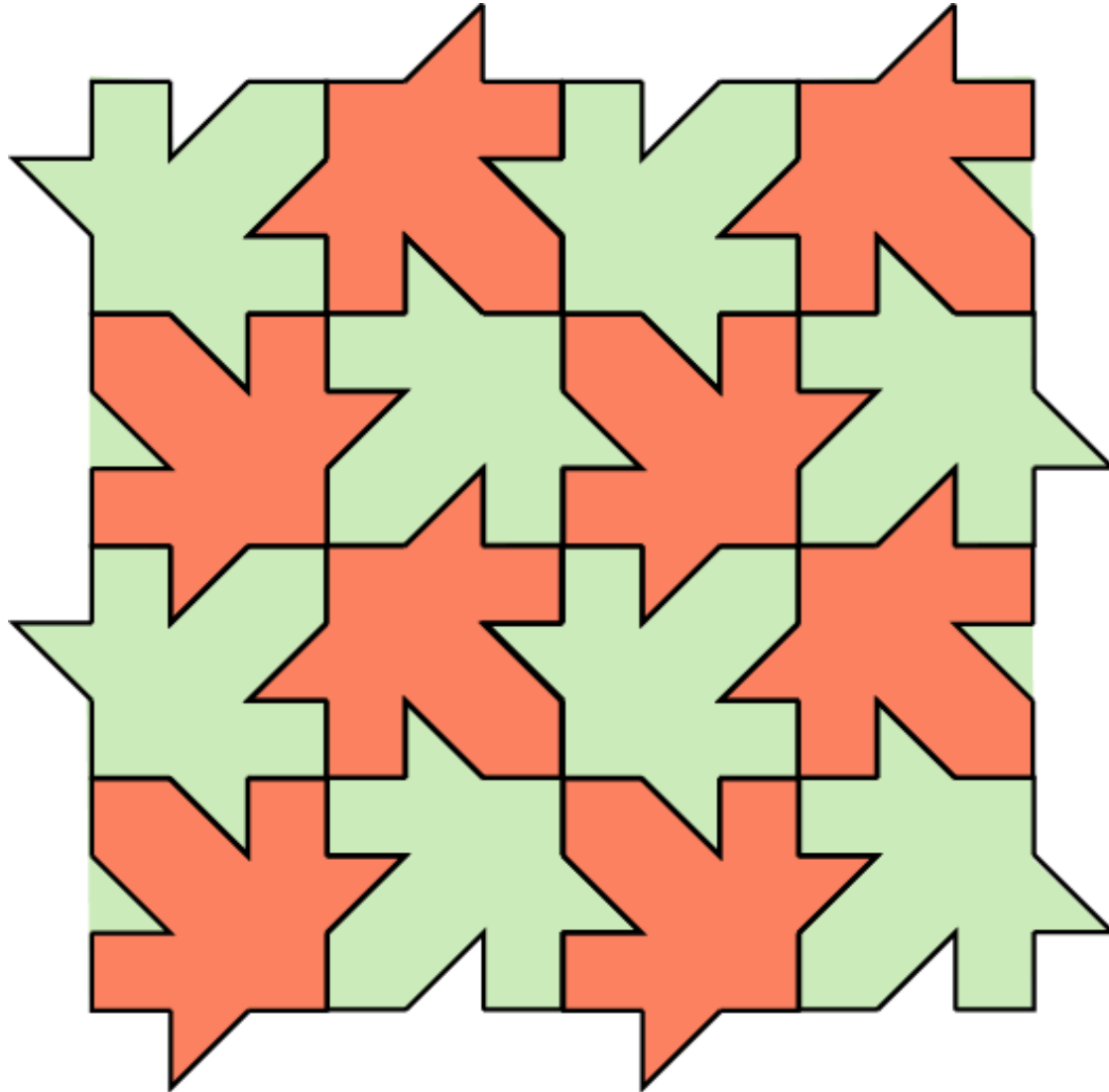


Упражнение 17

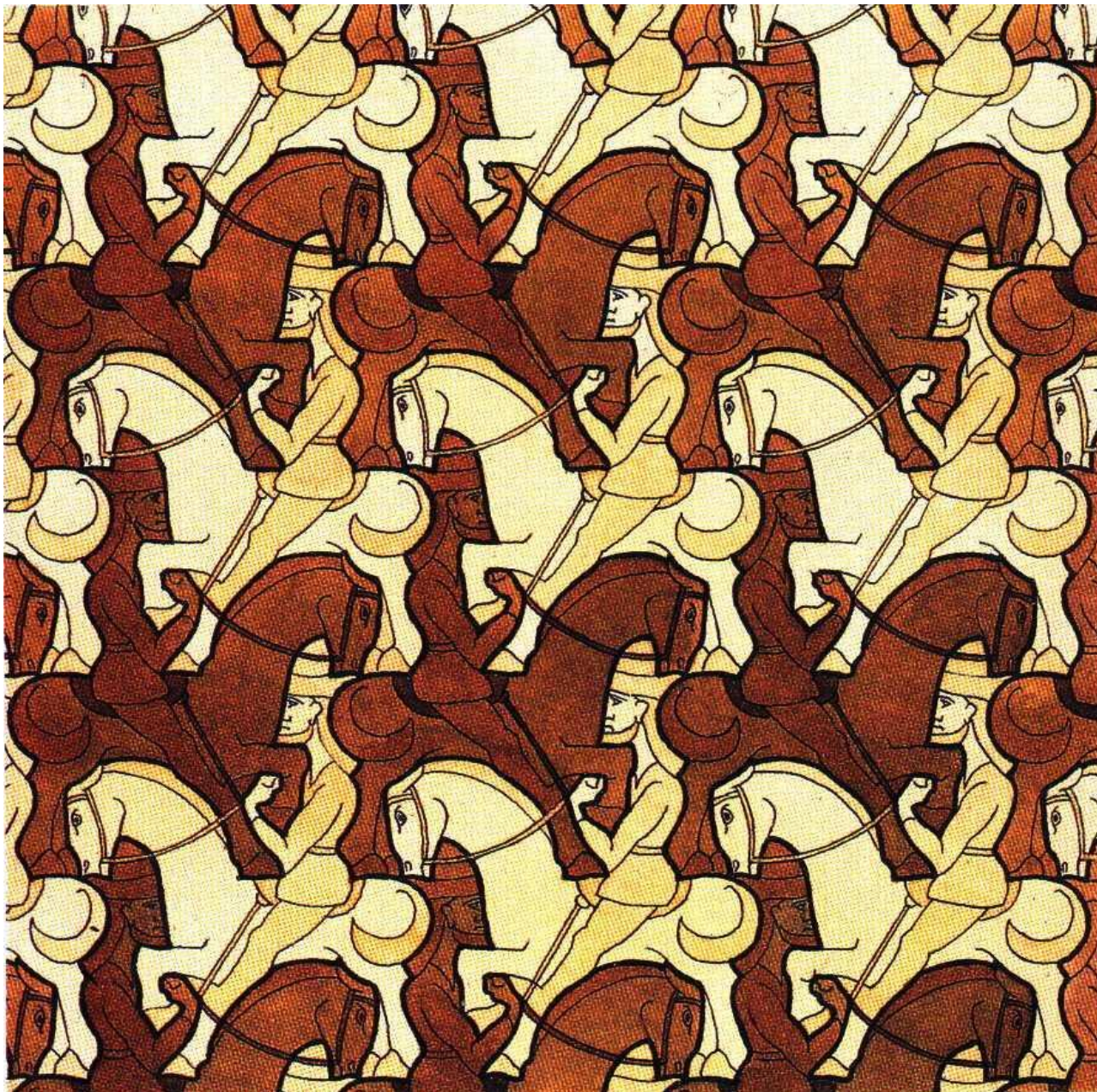


Заполнение плоскости

Заполнение плоскости может быть произведено и многоугольниками более сложной формы.



Картины М. Эшера (Всадники)



Картины М. Эшера (Птицы)



Картины М. Эшера (Ящерицы)



ФРАКТАЛЫ

Многие природные объекты и явления имеют не гладкий, а изломанный характер. Среди них листья деревьев, береговая линия, молния и др. Для описания этих объектов не подходят обычные дифференцируемые функции, с которыми имеет дело классический математический анализ.

В последние десятилетия возникло и развивается новое направление в математике – фрактальная геометрия. Слово "фрактал" ввел в 1975 г. Б. Мандельброт (от латинского слова "fractus", означающего изломанный, дробный).

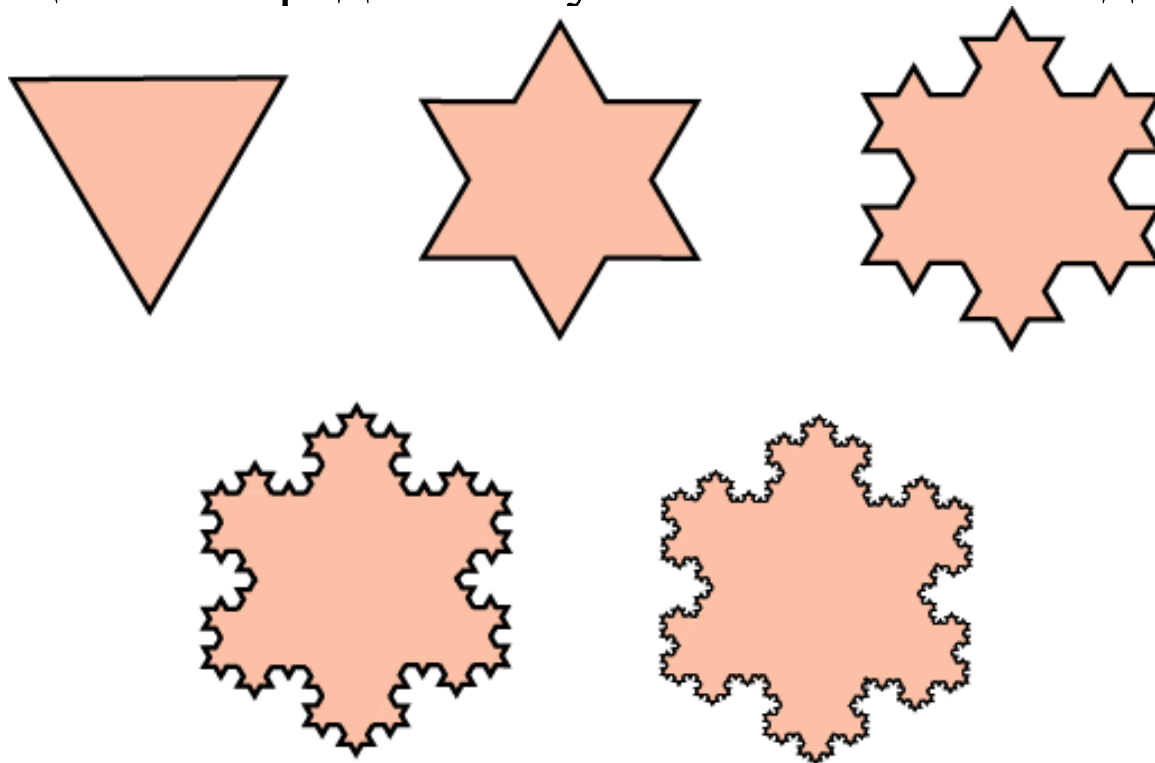
Особенностью фракталов является не только их изломанность, но и самоподобность, означающая, что каждая часть фрактала подобна целому. Свойство самоподобности также отражает особенность природных объектов, когда отдельная клетка растения или животного несет в себе полную информацию обо всем организме.

Литература

1. Вишик М.И. Фрактальная размерность множеств. Соросовский образовательный журнал. № 1, 1998.
2. Жиков В.И. Фракталы. Соросовский образовательный журнал. № 12, 1996.
3. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. – М. 2004.
4. Федер Е. Фракталы. Пер. с англ. - М.: Мир, 1991.

Звезда Коха

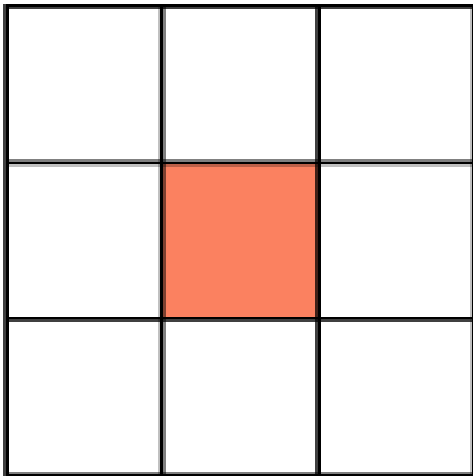
Один из первых примеров фракталов был придуман еще в начале 20-го века немецким математиком Х. фон Кох (1870-1924) и называется звезда Коха (снежинка Коха). Для ее построения берется равносторонний треугольник и последовательно добавляются к нему новые, подобные ему, треугольники. В результате получаются все более сложные многоугольники, приближающиеся к предельному положению – звезде Коха.



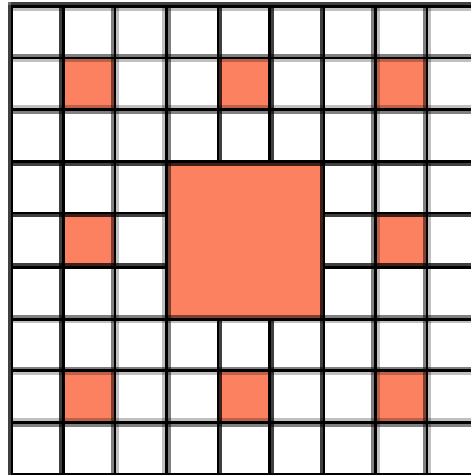
Ковер Серпинского

Еще один пример самоподобной фигуры, придумал польский математик В. Серпинский (1882-1969). Она называется ковром Серпинского и получается из квадрата последовательным вырезанием срединных квадратов. То, что остается после всех вырезаний, и будет искомым ковром Серпинского.

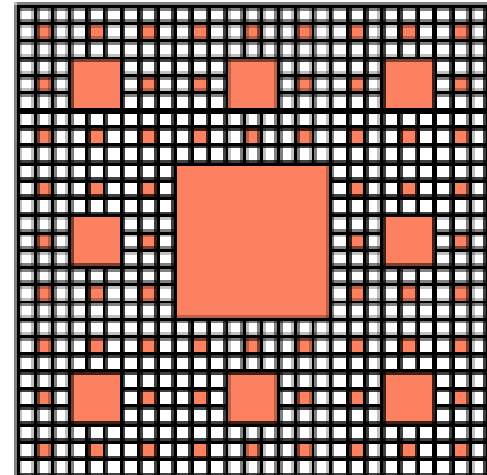
Отметим, что поскольку вырезаемые квадраты располагаются все более часто, то в результате на ковре Серпинского не будет ни одного, даже самого маленького, квадрата без дырки.



а)



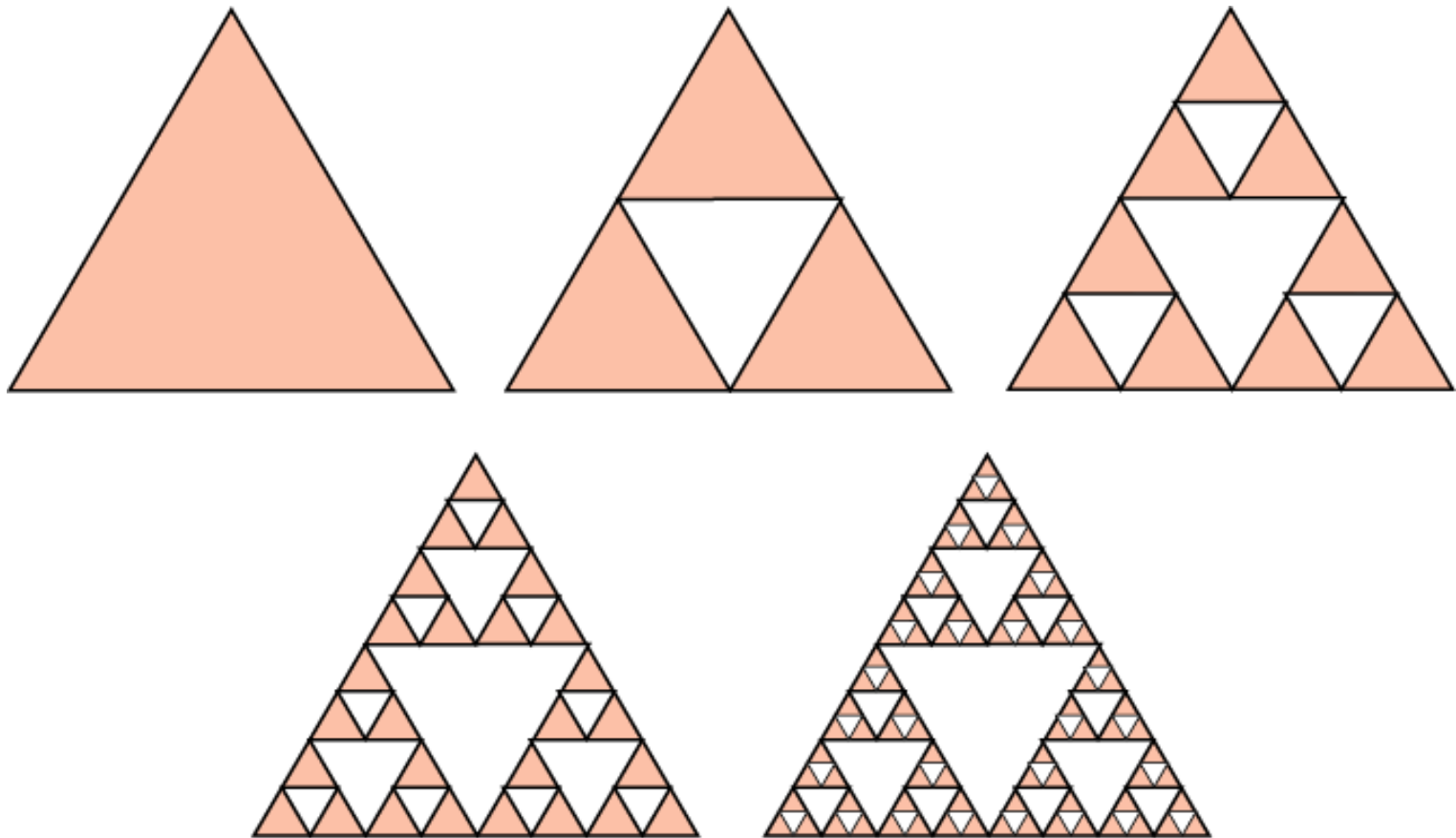
б)



в)

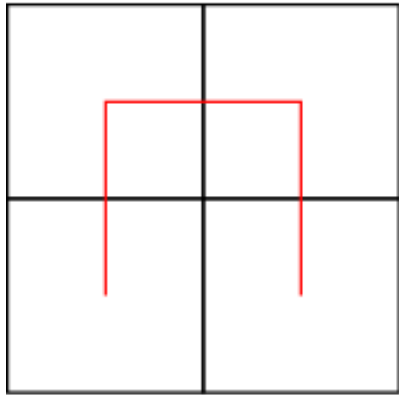
Салфетка Серпинского

Начиная не с квадрата, а с правильного треугольника, и вырезая центральные треугольники, получим самоподобную фигуру, аналогичную ковру Серпинского и называемую салфеткой Серпинского.

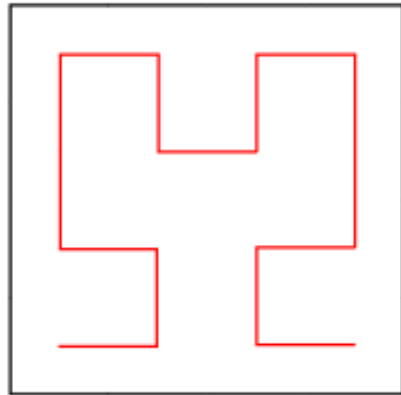


Кривая Пеано

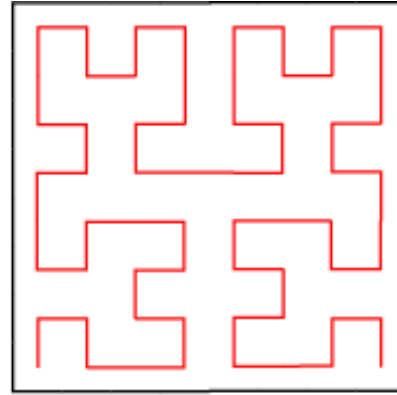
Пример кривой, имеющий фрактальный характер, был получен Д. Пеано (1858-1932) и называется кривой Пеано. Для ее построения разобьем данный квадрат на четыре равные квадрата и соединим их центры тремя отрезками, как показано на рисунке а). Повторяя описанную процедуру, будем получать все более сложные ломаные, приближающиеся к кривой Пеано.



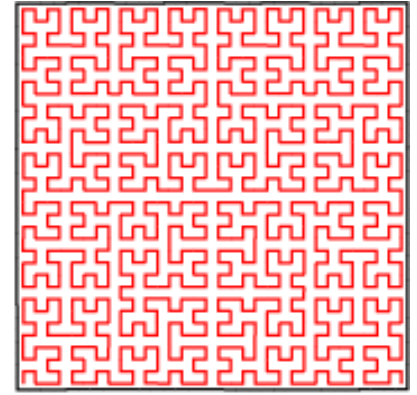
а)



б)



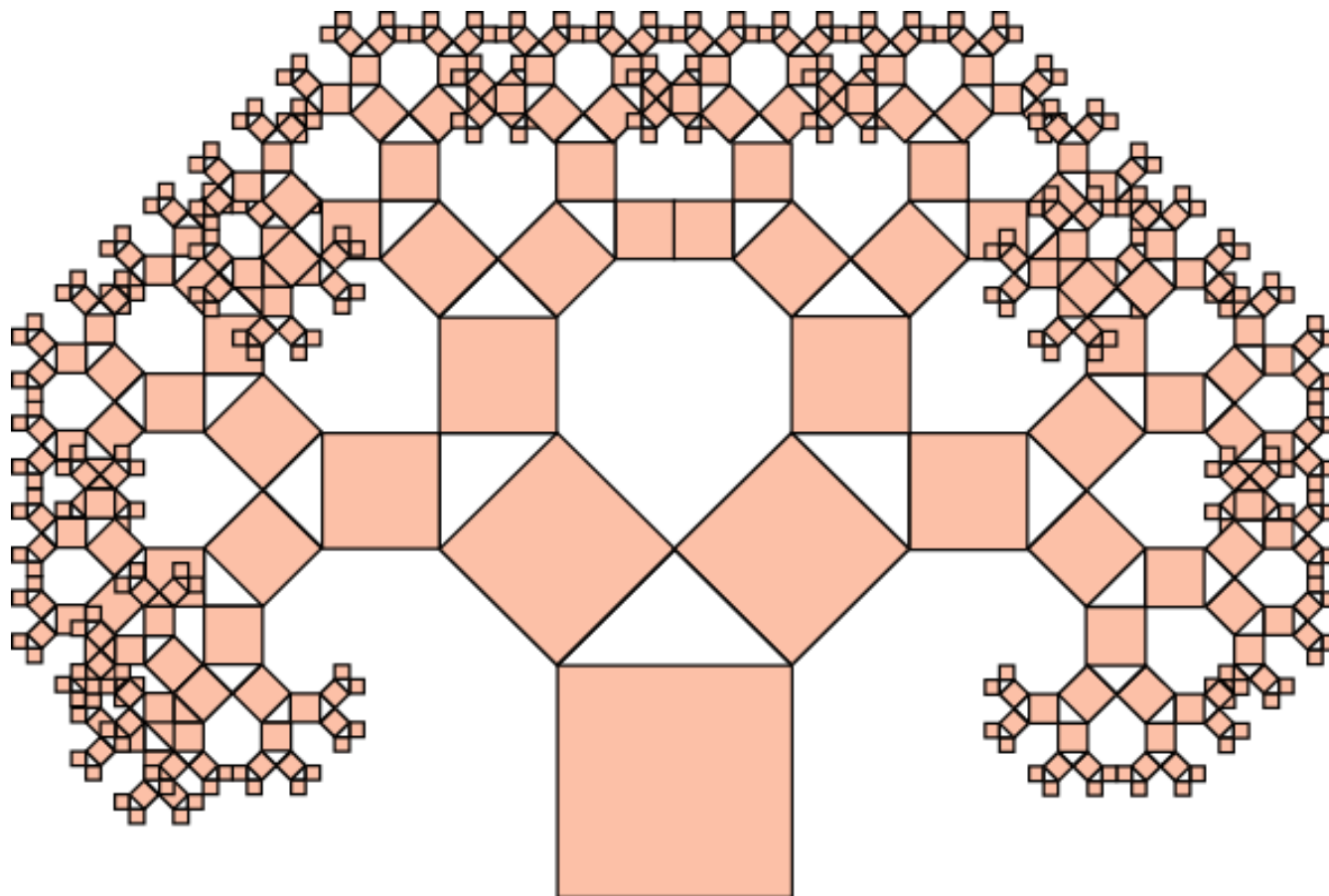
в)



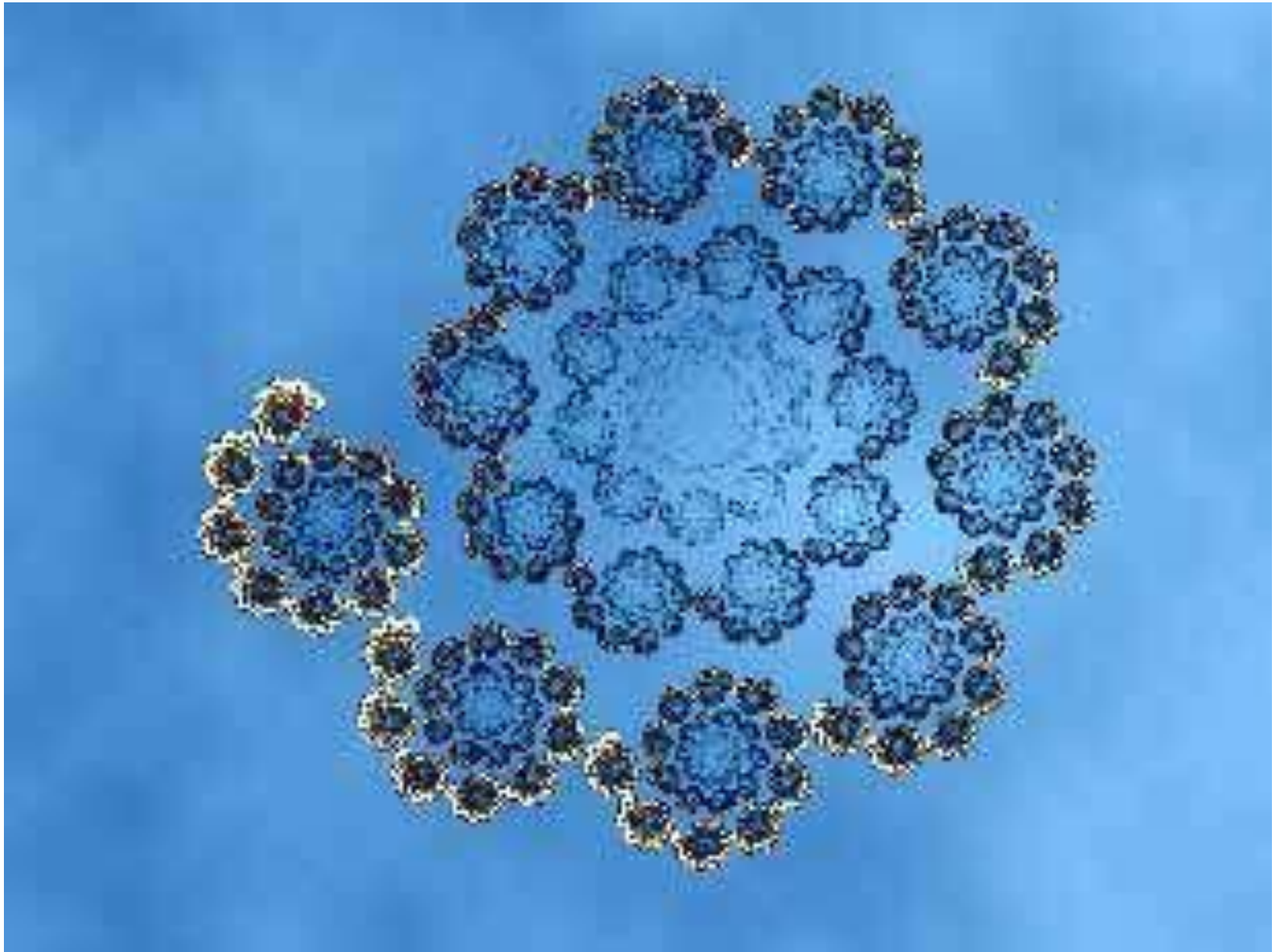
г)

Отметим, что ломаные, участвующие в построении кривой Пеано, на каждом этапе проходят через все квадраты, а сами квадраты уменьшаются, стягиваясь к точкам исходного квадрата. Поэтому кривая Пеано будет проходить через все точки исходного квадрата. Конечно, она будет иметь бесконечную длину.

Дерево Пифагора



Фрактал



Фрактал

