

**Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
Семлёвская средняя общеобразовательная школа № 2
Вяземского района Смоленской области**

Согласовано на заседании ШМО учителей математики, информатики и физики Протокол № 1 от « 30 » 08 2013г	Принято на педагогическом совете МБОУ Семлёвской СОШ № 2 Протокол № 10 от « 30 » 08 2013г	Утверждено приказом директора МБОУ Семлёвской СОШ №2 от 31.08.2013 № 182-01/08
---	---	---

**ПРОГРАММА
элективного курса**

ФУНКЦИИ

9 класс

Разработал учитель математики
Шустров Валерий Фёдорович

ст. Семлёво

Пояснительная записка

Элективный курс «Функции» предназначен для обучающихся 9 класса. Данный элективный курс направлен на расширение знаний обучающихся, повышение уровня математической подготовки через решение большого класса задач. Навыки в решении задач на применение свойств функций необходимы любому ученику, желающему хорошо закончить обучение в школе и подготовиться к поступлению в дальнейшем в другие учебные заведения.

Функции и их графики представлены в школьном курсе математики, но количество часов, выделяемых на изучение темы «Функции», не позволяет показать в полном объеме все многообразие задач, требующих для решения функционального подхода. Из – за недостатка времени не всегда удастся научить обучающихся глубоко понимать и использовать свойства функций. Поэтому очень часто задачи на применение свойств функций ставят обучающихся в тупик. Так же нет времени на историю возникновения этого раздела. Между тем подобные задачи широко представлены на выпускных экзаменах в 9 и 11 классах. Решение задач, требующих функционального подхода, не предполагает обладание знаниями, выходящими за рамки школьной программы.

Изучение функций полезно не только для поступления в вуз, но и само по себе. Ведь задачи на применение свойств функций предполагают умение использовать различные знания и навыки (решение уравнений и неравенств, построение графиков, умение читать по графику свойства функции). Часто задачи на применение свойств функций требуют тонких логических рассуждений.

Данный элективный курс позволит углубить знания обучающихся по теме «Функции», а также познакомит с взаимно обратными функциями и геометрическими преобразованиями графиков, выходящие за рамки школьной программы.

Цели предмета:

- помочь повысить уровень понимания и практической подготовки в вопросе решения задач на применение свойств функций;
- создать в совокупности с основными разделами курса базу для развития способностей обучающихся;
- помочь осознать степень своего интереса к предмету и оценить возможности овладения им с точки зрения дальнейшей перспективы.

Задачи предмета:

- способствовать обеспечению прочного и сознательного овладения обучающимися системой математических знаний и умений;
- формирование знаний о простейших преобразованиях графиков функций;
- Формировать устойчивый интерес к предмету;
- выявлять и формировать математические способности;
- научить решать задания с функциями;

Содержание

Пояснительная записка	2
Программа элективного курса	5
Тематическое планирование	6
Литература	7
Методические рекомендации	8
Приложения	42
1) О функциях (исторические сведения)	42
2) О методе координат (исторические сведения)	43
3) Задачник	44

Программа элективного курса

Содержание программы

Тема 1. Функция. Область определения и область значения функции. (1 час)

Понятие функции, области определения и области значений функции, графика функции.

Тема 2. Четные и нечетные функции. (2 часа)

Определение четной и нечетной функций, график четной и нечетной функций. Тестирование.

Тема 3. Монотонность функции. (2 часа)

Определение возрастающей и убывающей функций, понятие монотонной функции, свойства монотонности функций, определение взаимно обратных функций.

Тема 4. Построение графиков функций. (2 часа)

Построение графиков функций при помощи исследования функции.

Тема 5. Преобразования графиков функций. (2 часа)

Рассмотрение простейших преобразований графиков функций, построение графиков функций при помощи преобразований.

Тема 6. Функции, задаваемые несколькими формулами. (3 часа)

Построение графиков функций, ввести понятие кусочно – задаваемых функций.

Контрольная работа по теме «Исследование функций, график функции»

Тема 7. Графический метод решения уравнений и неравенств. (3 часа)

Решение различных уравнений и неравенств графическим методом. Самостоятельная работа.

Тема 8. Конференция по теме «Мир функций» (1 час)

Итоговое занятие. (1 час)

Тематическое планирование учебного материала

№ урока	Тема	Часы	Виды деятельности
1	Функция. Область определения и область значения функции.	1	Лекция с элементами беседы, самостоятельная работа.
2,3	Четные и нечетные функции.	2	Лекция с элементами беседы, практическая работа, тестирование.
4,5	Монотонность функции	2	Лекция с элементами беседы, практическая работа.
6,7	Построение графиков функций	2	Практическая работа.
8,9	Преобразования графиков функций	2	Лекция с элементами беседы, практическая работа, <i>презентация</i>
10-12	Функции, задаваемые несколькими формулами	3	Лекция с элементами беседы, практическая работа, контрольная работа. <i>(презентация)</i>
13-15	Графический метод решения уравнений и неравенств	3	Лекция с элементами беседы, практическая работа, самостоятельная работа.
16	Зачет по теме «Функции»	1	Зачет.
17	Итоговое занятие	1	Подведение итогов, анкетирование.
	Итого	17	

ЛИТЕРАТУРА

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ.

1. Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г. и др. Функции и графики. – М.: Наука, 1973.
2. Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С. Алгебра и элементарные функции. Учеб. пособие для учащихся 9 класса сред. шк.; Под редакцией О.Н. Головина. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1967.
3. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – М.: Просвещение, 1990.
4. Макарычев Ю.Н. и др. дидактические материалы по алгебре для 9 класса / Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк, Л.М.Короткова. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2002.
5. Математика. 8-9 классы: сборник элективных курсов / авт.-сост. М.Е.Козина. – Волгоград: Учитель, 2006.
6. Мордкович А.Г., Тульчинская Е.Е. Алгебра: Тесты для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений. – 4-е изд. – М.: Мнемозина, 2004.
7. Мышкис А.Д., Сатьянов П.Т. Функции и графики. – М.: Просвещение, 1991.
8. Никольский С.М., Потапов М.К. Алгебра: Пособие для самообразования. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.
9. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ: 2009: Математика / авт.-сост. В.И.Ишина, В.В.Кочагин, Л.О.Денищева и др. – М.: АСТ: Астрель, 2009. – (Федеральный институт педагогических измерений).
10. Учебно-методическая газета «Математика – Первое сентября». Издательский дом «Первое сентября», № 1 за 2009.

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ.

1. Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова. Алгебра 7 класс. Учебник. М. «Просвещение», 2007.
2. Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова. Алгебра 8 класс. Учебник. М. «Просвещение», 2007.
3. Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова. Алгебра 9 класс. Учебник. М. «Просвещение», 2007.
4. Виленкин Н.Я. Функции в природе и технике. Книга для внеклассного чтения 9-10 кл. – М.: Просвещение, 1985.
5. Галицкий М.Л. и др. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов. Учеб. пособие для учащихся шк. И классов с углуб. изуч. курса математики / М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, М.И. Звавич. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1994.

6. Доброва О.Н. задания по алгебре и математическому анализу: Пособие для учащихся 9-11 кл. общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 1996.

Методические рекомендации к занятиям

Занятие 1

Тема: «Функция. Область определения и область значения функции»

Цели: сообщить цели и задачи курса; повторить определение области определения и области значений функции, графика функции.

Формы работы: лекция с элементами беседы, практическая работа.

Формы контроля: фронтальный опрос.

Ход урока.

1. Сообщение целей и задач курса.

Начиная с первого урока обучающиеся готовят свои проекты для презентации на предпоследнем уроке.

2. Повторение материала.

Фронтальная беседа.

Вопросы.

1. Дать определение функции.

Зависимость переменной y от переменной x называется функцией, если каждому значению x соответствует единственное значение y . Переменную x называют независимой переменной или аргументом. Переменную y называют зависимой переменной или функцией от переменной x .

2. Что называется областью определения и областью значений функции?

Все значения независимой переменной образуют область определения функции. Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют область значений функции.

3. Дать определение графика функции.

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

3. Самостоятельная работа.

Вариант 1	Вариант 2
Задачник	Задачник

1. №1	1. №2
2. №4(в)	2. №4(г)
3. №5	3. №7

4. Итог урока.

5. Домашнее задание

Задачник № 3, № 4(а, б), № 6.

Занятие 2

Тема: «Четные и нечетные функции»

Цели: сформировать понятие четности и нечетности функций, научить определять и использовать эти свойства.

Формы работы: объяснение, практическая работа.

Формы контроля: проверка самостоятельно решенных упражнений.

Ход урока

1. Проверка домашнего задания.

1) Решение задания № 3

Ответ: а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$.

2) Решение задания № 4(а, б)

Ответ: а) $(-\infty; +\infty)$; б) $\{41\}$.

3) Решение задания № 6

Ответ: а) велосипедист, на 3 ч; б) 6,5 ч; 2,5 ч; в) 5 км/ч; 13 км/ч;
г) велосипедист, на 1 ч; д) через 2 ч; е) 7,5 км.

4) Фронтальный опрос.

Вопросы.

а) Дать определение функции.

б) Что называется областью определения и областью значений функции?

в) Дать определение графика функции.

2. Изучение нового материала.

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2$. Эта функция определена на множестве действительных чисел и обладает следующим свойством $f(-4)=f(4)$, $f(-12)=f(12)$, то есть $f(-x)=f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Такие функции называются четными.

Функция f , заданная на множестве X , называется четной, если для любого $x \in X$ верно равенство $f(-x)=f(x)$.

2. Выяснить, симметрична ли $D(g)$ относительно нуля.

3. Выяснить, выполняется ли равенство $g(-x) = -g(x)$.

Пример. Исследуйте функцию на нечетность $f(x) = x^3 - x$.

1. $D(f): \mathbb{R}$.

2. $D(f)$ симметрична относительно O .

3. $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$ – нечетная функция.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

1. Построить график функции $y=g(x)$, если известно, что функция g – нечетная и задана часть графика для $x \leq 0$

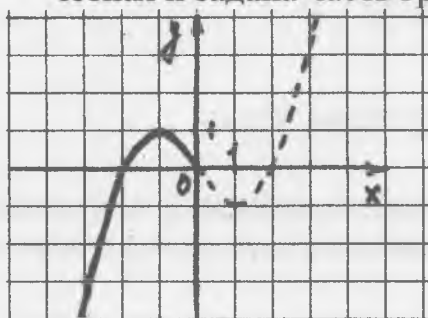


Рис. 3

2. . На одном из рисунков изображен график нечетной функции. Укажите этот рисунок.

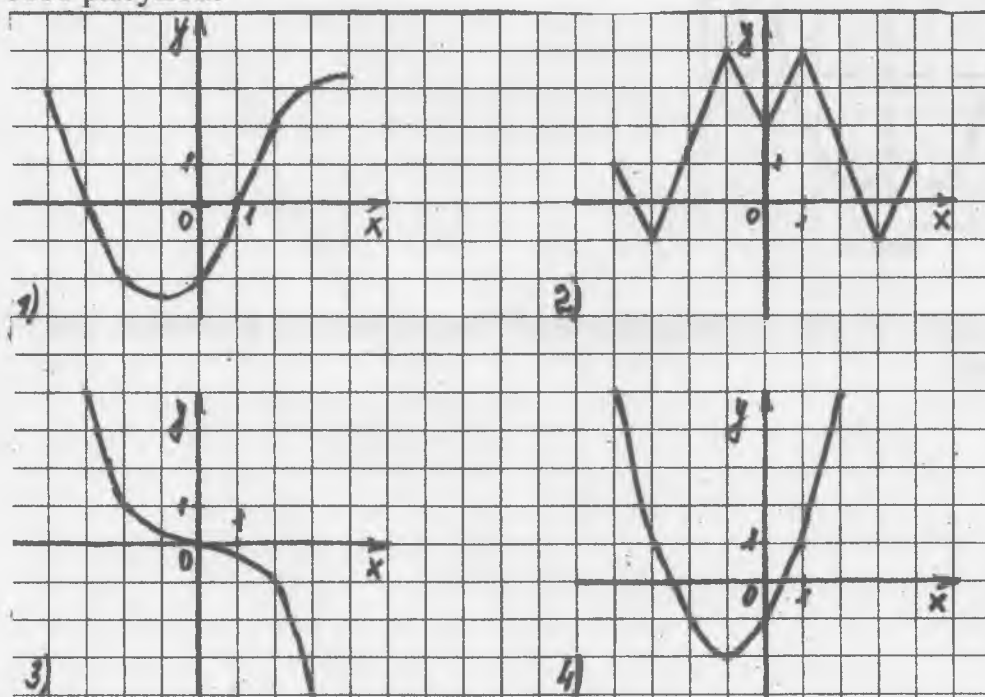


Рис. 4

3. Закрепление материала.

Задачник: № 8(а, б, г, е), № 9(г – е), № 11.

4. Итог урока.

5. Домашнее задание.

Задачник: № 8(в, д), № 9(а – в), № 10.

Занятие 3

Тема: «Четные и нечетные функции»

Цели: повторить понятия четной и нечетной функций, закрепить умение определять и использовать эти свойства, повторить понятия области определения и области значений функции

Формы работы: тестирование, практическая работа.

Формы контроля: фронтальный опрос, проверка самостоятельно решенных упражнений.

Ход урока

1. Проверка домашнего задания.

1) Решение задания № 8(в, д)

Ответ: в) четная, д) нечетная;

2) Решение задания № 9(а – в)

Ответ: а) четная, б) нечетная, в) ни четная ни нечетная;

3) Решение задания № 10

Ответ: 8, 12, 3.

4) Фронтальный опрос.

Вопросы.

а) Дайте определение четной и нечетной функций;

б) Сформулируйте свойства графиков четной и нечетной функций.

2. Тестирование.

Вариант 1

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{14 - 2x}$.

А) $x > 2$. Б) $x < 2$. В) $x \geq 0,5$. Г) $x \leq 2$.

2. Среди заданных функций укажите четные:

1) $y = 2x^2$; 2) $y = \sqrt{x}$; 3) $y = 5x$; 4) $y = |x|$.

А) 1 и 3. Б) 1 и 2. В) 3 и 4. Г) 1 и 4.

3. Среди заданных функций укажите нечетные:

1) $y=2x^2$; 2) $y=\frac{3}{x}$; 3) $y=5x$; 4) $y=|x|$.

А) 1 и 3. Б) 2 и 4. В) 2 и 3. Г) 3 и 4.

4. Найдите область значений функции $y = 4 - x^2$.

А) $(-\infty, 4)$. Б) $(-\infty, 4]$. В) $[0, 4]$. Г. $[4, +\infty)$.

5. Исследуйте функцию $y = \frac{|x|}{x}$ на четность.

А) Четная. Б) Нечетная. В) Ни четная ни нечетная.

Ключ к тесту

1	2	3	4	5
Г	Г	В	Б	Б

Вариант 2

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{6 - 3x}$.

А) $x > 2$. Б) $x < 2$. В) $x \geq 0,5$. Г) $x \leq 2$.

2. Среди заданных функций укажите четные:

1) $y=3x^2$; 2) $y=|x|$; 3) $y=7x$; 4) $y=\sqrt{x}$.

А) 1 и 3. Б) 1 и 2. В) 3 и 4. Г) 1 и 4.

3. Среди заданных функций укажите нечетные:

1) $y=3x^2$; 2) $y=\frac{4}{x}$; 3) $y=-7x$; 4) $y=|x|$.

А) 1 и 3. Б) 2 и 3. В) 2 и 4. Г) 3 и 4.

4. Найдите область значений функции $y=9 - x^2$.

А) $(-\infty, 9)$. Б) $(-\infty, 9]$. В) $[0, 9]$. Г) $[9, +\infty)$.

5. Исследуйте функцию $y = \frac{|x|}{x}$ на четность.

А) Нечетная. Б) Четная. В) Ни четная ни нечетная.

Ключ к тесту

1	2	3	4	5
Г	Б	Б	Б	А

3. Решение упражнений.

Задачник: № 12, № 15, № 16(в), № 17.

4. Итог урока.

5. Домашнее задание.

Задачник: № 13, № 14, № 16(а, б).

Занятие 4

Тема: «Монотонность функции».

Цели: ввести понятие «возрастание», «убывание» функции, монотонности функции, взаимно обратных функций, научить находить промежутки монотонности по графику и формулам.

Формы работы: объяснение, практическая работа.

Формы контроля: проверка самостоятельно решенных упражнений.

Ход урока.

1. Проверка домашнего задания.

1) Решение задания № 13

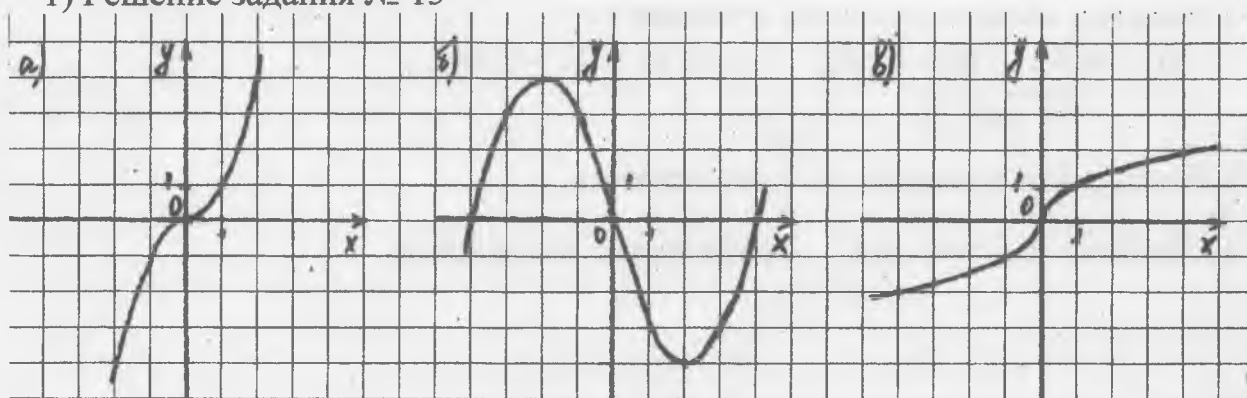


Рис. 5

2) Решение задания № 14

а), б), в), г) – четная.

3) Решение задания № 16(а, б)

а) четная; б) нечетная.

2. Изучение нового материала.

Рассмотрим график функции на рис. 6.

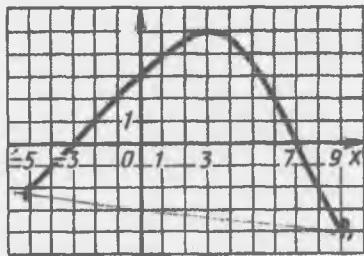


Рис. 6

По графику функции видно, что $D(f): [-5; 9]$, $E(f): [-4; 5]$.

На множестве $[-5; 3]$ с возрастанием аргумента, возрастают и значения функции.

На множестве $[3; 9]$ с возрастанием аргумента значения функции убывают.

Функция f называется возрастающей на множестве X , если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции.

Функция f называется убывающей на множестве X , если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции.

Иными словами, функцию f называют возрастающей на множестве X , если для любых x_1 и x_2 из этого множества, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$; функцию f называют убывающей на множестве X , если для любых x_1 и x_2 из этого множества, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Если функция возрастает на всей области определения, то ее называют возрастающей функцией, а если убывает, то убывающей функцией. Такие функции называют монотонными.

Свойства монотонности функций

1. Монотонная функция каждое свое значение принимает лишь при одном значении аргумента.

Доказательство: Допустим, что это утверждение неверно, то есть существует $f(x_1) = f(x_2)$. Пусть $x_1 < x_2$. Тогда из возрастания функции f следует, что $f(x_1) < f(x_2)$. А если функция f убывает, то $f(x_1) > f(x_2)$. Таким образом, равенство невозможно.

2. Если функция $y = f(x)$ монотонная на множестве Y и сохраняет на этом множестве знак, то функция $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ имеет на множестве Y обратный положительный характер монотонности.

Доказательство: Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на множестве X . Возьмем на множестве X значения x_1 и x_2 , такие, что $x_2 > x_1$ и рассмотрим разность $f(x_2) - f(x_1) > 0$; рассмотрим $g(x_2) - g(x_1) = \frac{1}{f(x_2)} - \frac{1}{f(x_1)} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_2) \cdot f(x_1)} < 0$, значит $g(x_2) < g(x_1)$, то есть функция g убывает на множестве X .

Случай убывания функции f рассматривается аналогично.

3. Пусть f – монотонная функция на множестве X и $f(x) > 0$ при всех $x \in X$.

Тогда:

1) Если функция f возрастает на множестве X , то функция $y = (f(x))^2$ также возрастает на множестве X ;

2) Если функция f убывает на множестве X , то функция $y = (f(x))^2$ также убывает на множестве X .

Доказательство: Пусть $x_2 > x_1 > 0$, где $x_2, x_1 \in X$. Из курса алгебры известно, что из условия $a > b > 0$ следует $a^2 > b^2$. Тогда для возрастающей функции из условия $f(x_2) > f(x_1)$ следует $(f(x_2))^2 > (f(x_1))^2$, то есть функция $(f(x))^2$ возрастает.

Убывание рассматривается аналогично.

4. Монотонная функция обратима.

Функции f и g называются взаимно обратными, если:

1) область определения функции f совпадает с множеством значений функции g ;

2) множество значений функции f совпадает с областью определения функции g ;

3) $y_0 = f(x_0)$ тогда и только тогда, когда $x_0 = g(y_0)$ (для любого x_0 из области определения функции f и любого y_0 из области определения функции g).

Свойство 4 следует из свойства 1, так как каждому значению функции f будет соответствовать единственное значение аргумента X . то есть можно задать функцию g , отвечающую выше приведенным условиям.

Замечание: Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Пример 1. Докажите, что функция $y = 3x - 5$ возрастает на \mathbb{R} .

Решение: Пусть $x_2 > x_1$. Тогда $y_2 = 3x_2 - 5$ и $y_1 = 3x_1 - 5$. Найдем разность $y_2 - y_1 = 3x_2 - 5 - 3x_1 + 5 = 3(x_2 - x_1) > 0$. Значит, $y_2 > y_1$, то есть функция y возрастает.

Пример 2. Докажите, что функция $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ убывает на промежутке $(0; 1]$ и возрастает на промежутке $[1; +\infty)$.

Решение: Пусть $x_2 > x_1$ из области определения функции. Тогда

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2^2 + x_2 + 1}{x_2} - \frac{x_1^2 + x_1 + 1}{x_1} = \frac{x_1 x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 - x_1^2 x_2 - x_1 x_2 - x_2}{x_1 x_2} =$$
$$= \frac{x_1 x_2 (x_2 - x_1) - (x_2 - x_1)}{x_1 x_2} = \frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 1)}{x_1 x_2}.$$

Оценим знак разности исходя из условий задачи.

а) Если $x_2 > x_1 \geq 1$, то $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 x_2 > 1$ и $x_1 x_2 - 1 > 0$, а так как знаменатель дроби тоже больше 0, то дробь больше 0, то есть из условия $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) > f(x_1)$ и функция возрастает при $x \geq 1$;

б) Если $0 < x_1 < x_2$, то $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 x_2 < 1$ и $x_1 x_2 - 1 < 0$, значит, числитель дроби отрицательное число, знаменатель дроби положительное число, то

Иными словами, функцию f называют *возрастающей* на множестве X , если для любых x_1 и x_2 из этого множества, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$; функцию f называют *убывающей* на множестве X , если для любых x_1 и x_2 из этого множества, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Если функция возрастает на всей области определения, то ее называют *возрастающей функцией*, а если убывает, то *убывающей функцией*. Такие функции называют монотонными.

Свойства монотонности функций

1. Монотонная функция каждое свое значение принимает лишь при одном значении аргумента.

Доказательство: Допустим, что это утверждение неверно, то есть существует $f(x_1) = f(x_2)$. Пусть $x_1 < x_2$. Тогда из возрастания функции f следует, что $f(x_1) < f(x_2)$. А если функция f убывает, то $f(x_1) > f(x_2)$. Таким образом, равенство невозможно.

2. Если функция $y = f(x)$ монотонная на множестве X и сохраняет на этом множестве знак, то функция $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ имеет на множестве X противоположный характер монотонности.

Доказательство: Пусть функция $y = f(x)$ возрастающая на множестве X . Возьмем на множестве X значения x_1 и x_2 , такие, что $x_2 > x_1$ и рассмотрим разность $f(x_2) - f(x_1) > 0$; рассмотрим $g(x_2) - g(x_1) = \frac{1}{f(x_2)} - \frac{1}{f(x_1)} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_2) \cdot f(x_1)} < 0$, значит $g(x_2) < g(x_1)$, то есть функция g убывает на множестве X .

Случай убывания функции f рассматривается аналогично.

3. Пусть f – монотонная функция на множестве X и $f(x) > 0$ при всех $x \in X$. Тогда:

1) Если функция f возрастает на множестве X , то функция $y = (f(x))^2$ также возрастает на множестве X ;

2) Если функция f убывает на множестве X , то функция $y = (f(x))^2$ также убывает на множестве X .

Доказательство: Пусть $x_2 > x_1 > 0$, где $x_2, x_1 \in X$. Из курса алгебры известно, что из условия $a > b > 0$ следует $a^2 > b^2$. Тогда для возрастающей функции из условия $f(x_2) > f(x_1)$ следует $(f(x_2))^2 > (f(x_1))^2$, то есть функция $(f(x))^2$ возрастает.

Убывание рассматривается аналогично.

4. Монотонная функция обратима.

Функции f и g называются взаимно обратными, если:

1) область определения функции f совпадает с множеством значений функции g ;

2) множество значений функции f совпадает с областью определения функции g ;

3) $y_0 = f(x_0)$ тогда и только тогда, когда $x_0 = g(y_0)$ (для любого x_0 из области определения функции f и любого y_0 из области определения функции g).

Свойство 4 следует из свойства 1, так как каждому значению функции f будет соответствовать единственное значение аргумента X . то есть можно задать функцию g , отвечающую выше приведенным условиям.

Замечание: Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Пример 1. Докажите, что функция $y = 3x - 5$ возрастает на \mathbb{R} .

Решение: Пусть $x_2 > x_1$. Тогда $y_2 = 3x_2 - 5$ и $y_1 = 3x_1 - 5$. Найдем разность $y_2 - y_1 = 3x_2 - 5 - 3x_1 + 5 = 3(x_2 - x_1) > 0$. Значит, $y_2 > y_1$, то есть функция y возрастает.

Пример 2. Докажите, что функция $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ убывает на промежутке $(0; 1]$ и возрастает на промежутке $[1; +\infty)$.

Решение: Пусть $x_2 > x_1$ из области определения функции. Тогда

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2^2 + x_2 + 1}{x_2} - \frac{x_1^2 + x_1 + 1}{x_1} = \frac{x_1x_2^2 + x_1x_2 + x_1 - x_1^2x_2 - x_1x_2 - x_2}{x_1x_2} =$$

$$= \frac{x_1x_2(x_2 - x_1) - (x_2 - x_1)}{x_1x_2} = \frac{(x_2 - x_1)(x_1x_2 - 1)}{x_1x_2}.$$

Оценим знак разности исходя из условий задачи.

а) Если $x_2 > x_1 \geq 1$, то $x_2 - x_1 > 0$, $x_1x_2 > 1$ и $x_1x_2 - 1 > 0$, а так как знаменатель дроби тоже больше 0, то дробь больше 0, то есть из условия $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) > f(x_1)$ и функция возрастает при $x \geq 1$;

б) Если $0 < x_1 < x_2$, то $x_2 - x_1 > 0$, $x_1x_2 < 1$ и $x_1x_2 - 1 < 0$, значит, числитель дроби отрицательное число, знаменатель дроби положительное число, то дробь меньше 0, то есть из условия $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) < f(x_1)$ и функция убывает на промежутке $(0; 1]$.

Пример 3. Вычислить характер монотонности функции $y = |x + 2| + |x - 2|$

Раскроем модуль по определению:

$$y = \begin{cases} -2x, & \text{если } x < -2, \\ 4, & \text{если } -2 \leq x \leq 2, \\ 2x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Ясно, что $y = 4$ – постоянная функция. Функция $y = -2x$ убывает ($k < 0$), функция $y = 2x$ возрастает ($k > 0$). Значит, функция $y = |x + 2| + |x - 2|$ убывает на промежутке $(-\infty; -2]$ и возрастает на промежутке $[2; \infty)$.

Пример 4. Найдите функцию, обратную функции $y = x^2 - 4x + 7$, где $x \in (-\infty; 2]$.

Решение: На промежутке $(-\infty; 2]$ данная функция убывает. Для получения формулы функции, обратной данной, заменим переменную x на y , y на x в аналитическом задании функции и из полученной формулы выразим y :

$$x = y^2 - 4y + 7, y^2 - 4y + (7 - x) = 0.$$

Решим квадратное уравнение относительно y .

$$D = 4 - 7 + x = x - 3$$

$$y = 2 \pm \sqrt{x - 3}.$$

Для того чтобы выбрать знак перед радикалом, обратим внимание на область определения заданной функции $(-\infty; 2]$; по определению обратной функции, этот промежуток – множество значений искомой функции, значит $y = 2 - \sqrt{x - 3}$.

Заметим, что нам легко найти множество значений заданной функции. Для этого найдем область определения функции $y = 2 - \sqrt{x - 3}$, $D(y): [3; +\infty)$. Значит, таково множество значений данной функции.

3. Закрепление материала.

Задачник: № 18, № 20, №22(а).

4. Итог урока.

5. Домашнее задание.

Задачник: № 19, № 21, №22(б).

Занятие 5

Тема: «Монотонность функции».

Цели: повторить понятие «возрастание», «убывание» функции, монотонности функции, взаимно обратных функций, закрепить умение находить промежутки монотонности по графику и формулам.

Формы работы: практическая работа.

Формы контроля: проверка самостоятельно решенных упражнений, фронтальный опрос.

Ход урока.

1. Проверка домашнего задания.

а) Решение задания № 19

Ответ: возрастает на $[-2; 1]$, $[2; 3]$, $[4; 6]$ и убывает на $[-4; -2]$, $[1; 2]$, $[3; 4]$, $[6; 7]$.

б) Решение задания № 21

Например

3) Какие функции называются взаимно обратными?

2. Изучение нового материала.

Иногда построить график функции заданной аналитически бывает сложно. Поэтому нужно провести ее исследование. Давайте составим схему исследования функций.

Схема исследования функции

- 1) Найти область определения функции.
- 2) Найти множество значений функции.
- 3) Исследовать функцию на четность и нечетность.
- 4) Найти нули функции (точки, в которых функция обращается в нуль).
- 5) Найти промежутки знакопостоянства (промежутки, в которых функция принимает положительные и отрицательные значения).
- 6) Найти промежутки возрастания и убывания функции.
- 7) Выяснить поведение функции при $x \rightarrow \pm \infty$.

Для этого надо знать, является ли функция непрерывной.

Функция $y = f(x)$, где $f(x)$ – многочлен, является непрерывной функцией на множестве \mathbb{R} .

График функции $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ – многочлены имеет разрывы в точках, в которых многочлен $g(x)$ обращается в нуль. Если многочлен $g(x)$ не имеет корней, то функция φ непрерывна на множестве \mathbb{R} .

Пример 1. Исследовать функцию $y = -\frac{4}{x^2 + 1}$.

Решение: 1) $D(y) = \mathbb{R}$.

2) Так как $x^2 + 1 > 0$, то $y < 0$, но $-\frac{4}{x^2 + 1} > -4$, то $E(y) = (0; 4]$.

3) Так как область определения симметрична относительно нуля, то проверим функцию на четность и нечетность.

$$y(-x) = -\frac{4}{(-x)^2 + 1} = -\frac{4}{x^2 + 1} = y(x) \text{ – четная.}$$

4) Так как $y \neq 0$, то нулей нет.

5) $y > 0$ при любом значении x .

6) Так как при $x \geq 0$ $x^2 + 1 > 0$, то $\frac{4}{x^2 + 1} < 0$, тогда $-\frac{4}{x^2 + 1} > 0$.

Значит, при $x \geq 0$ данная функция возрастает, а в силу четности при $x \leq 0$ функция убывает.

7) Если $x \rightarrow \pm \infty$, то $x^2 + 1 \rightarrow +\infty$, значит $y \rightarrow 0$.

Теперь можно легко построить график данной функции.

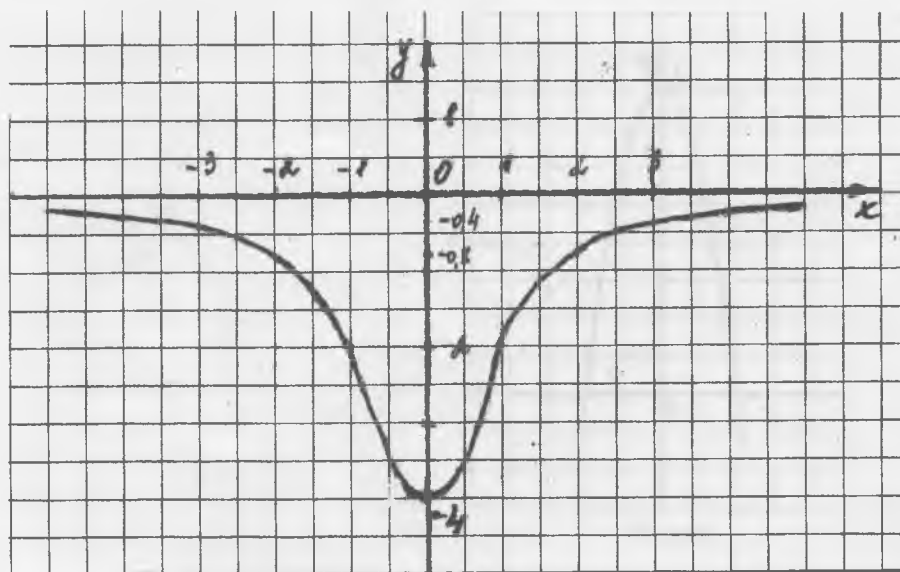


Рис. 10

График дает возможность добавить некоторые свойства функции.

Заметим, что при $x = 0$ функция принимает самое маленькое значение.

Точка x_0 из области определения функции f называется точкой минимума этой функции, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x) > f(x_0)$.

Окрестностью точки x_0 называется отрезок $[x_0 - a; x_0 + a]$, где a - некоторое маленькое число.

Действительно, точка $x = 0$ полностью удовлетворяет этому условию.

Пусть $a = 0,5$, тогда окрестность точки 0 – отрезок $[-0,5; 0,5]$; для всех точек этого отрезка $f(x) > f(0)$, значит точка $x = 0$ – точка минимума.

Аналогично, вводится понятие точки максимума.

Точка x_0 из области определения функции f называется точкой максимума этой функции, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x) < f(x_0)$.

Точки максимума и минимума называются точками экстремума, а значения функции в этих точках – экстремумами функции.

Заметим, что при $x \rightarrow \pm \infty$ график приближается к оси абсцисс, но не пересекает ее. Такие прямые называются асимптотами графика функции.

Асимптотой называется прямая линия, к которой неограниченно приближается график функции по мере удаления его от начала координат в бесконечность.

3. Закрепление материала.

Задачник: № 26, № 27(3, 4).

4. Итог урока.

5. Домашнее задание.

Задачник: № 27(1, 2, 7).

6) Найти промежутки возрастания и убывания функции.

7) Выяснить поведение функции при $x \rightarrow \pm \infty$.

Для этого надо знать, является ли функция непрерывной.

Функция $y = f(x)$, где $f(x)$ – многочлен, является непрерывной функцией на множестве \mathbb{R} .

График функции $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ – многочлены имеет разрывы в точках, в которых многочлен $g(x)$ обращается в нуль. Если многочлен $g(x)$ не имеет корней, то функция φ непрерывна на множестве \mathbb{R} .

Пример 1. Исследовать функцию $y = -\frac{4}{x^2 + 1}$.

Решение: 1) $D(y) = \mathbb{R}$.

2) Так как $x^2 + 1 > 0$, то $y < 0$, но $-\frac{4}{x^2 + 1} > -4$, то $E(y) = (0; 4]$.

3) Так как область определения симметрична относительно нуля, то проверим функцию на четность и нечетность.

$$y(-x) = -\frac{4}{(-x)^2 + 1} = -\frac{4}{x^2 + 1} = y(x) \text{ — четная.}$$

4) Так как $y \neq 0$, то нулей нет.

5) $y > 0$ при любом значении x .

6) Так как при $x \geq 0$ $x^2 + 1 > 0$, то $\frac{4}{x^2 + 1} < 0$, тогда $-\frac{4}{x^2 + 1} > 0$.

Значит, при $x \geq 0$ данная функция возрастает, а в силу четности при $x \leq 0$ функция убывает.

7) Если $x \rightarrow \pm \infty$, то $x^2 + 1 \rightarrow +\infty$, значит $y \rightarrow 0$.

Теперь можно легко построить график данной функции.

Возьмем дополнительные точки:

x	0	1	2	3
y	-4	-2	-0,8	-0,4

Вторая ветвь графика получается с помощью симметричного отображения относительно оси y , в силу четности функции.

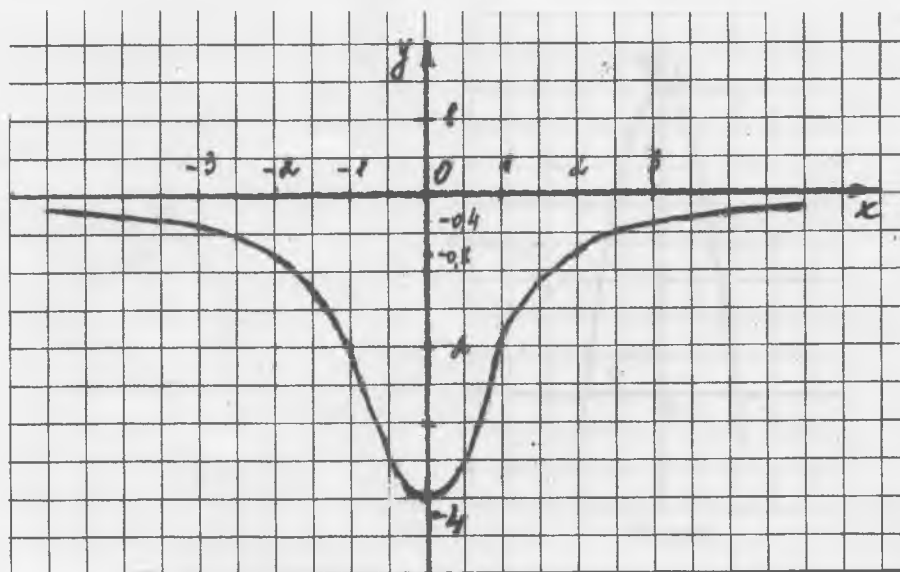


Рис. 10

График дает возможность добавить некоторые свойства функции.

Заметим, что при $x = 0$ функция принимает самое маленькое значение.

Точка x_0 из области определения функции f называется точкой минимума этой функции, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x) > f(x_0)$.

Окрестностью точки x_0 называется отрезок $[x_0 - a; x_0 + a]$, где a - некоторое маленькое число.

Действительно, точка $x = 0$ полностью удовлетворяет этому условию.

Пусть $a = 0,5$, тогда окрестность точки 0 – отрезок $[-0,5; 0,5]$; для всех точек этого отрезка $f(x) > f(0)$, значит точка $x = 0$ – точка минимума.

Аналогично, вводится понятие точки максимума.

Точка x_0 из области определения функции f называется точкой максимума этой функции, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x) < f(x_0)$.

Точки максимума и минимума называются точками экстремума, а значения функции в этих точках – экстремумами функции.

Заметим, что при $x \rightarrow \pm \infty$ график приближается к оси абсцисс, но не пересекает ее. Такие прямые называются асимптотами графика функции.

Асимптотой называется прямая линия, к которой неограниченно приближается график функции по мере удаления его от начала координат в бесконечность.

3. Закрепление материала.

Задачник: № 26, № 27(3, 4).

4. Итог урока.

5. Домашнее задание.

Задачник: № 27(1, 2, 7).

Занятие 7

Тема: «Построение графиков функций».

Цели: Закрепить умение строить графики функций с использованием предварительного исследования функций.

Форма работы: практическая работа.

Формы контроля: проверка самостоятельно решенных упражнений, фронтальный опрос.

Ход урока

1. Проверка домашнего задания.

а) Решение задания № 27(1, 2, 7)

- 1) $D(f): \mathbb{R}$; $E(f): [-0,2; +\infty)$; нечетная; нули функции: $x = 0$, $x = 0,4$; $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0,4; +\infty)$, $f(x) < 0$ при $x \in (0; 0,4)$; возрастает на $[0,2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0,2]$; при $x = 0,2$ $y = -0,2$ – наименьшее значение.

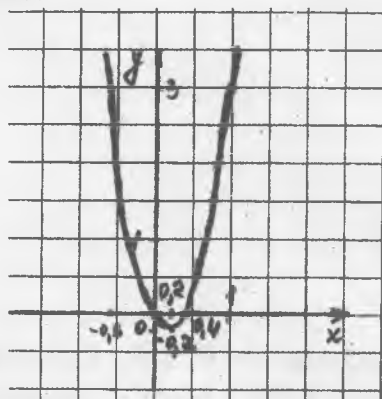


Рис. 11

- 2) $D(f): \mathbb{R}$; $E(f): (-\infty; 6]$; четная; нули функции: $x = \pm 2$; $f(x) > 0$ при $x \in (-2; 2)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; возрастает на $(-\infty; 0]$, убывает на $[0; +\infty)$; при $x = 0$ $y = 8$ – наибольшее значение.

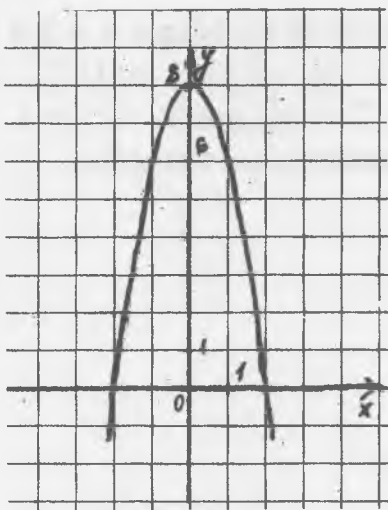


Рис. 12

- 7) $D(f): (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E(f): (0; +\infty)$; нулей нет; $f(x) > 0$ на всей $D(f)$; возрастает на $(-\infty; 0)$, убывает на $(0; +\infty)$; прямая $y = 0$ - горизонтальная асимптота, прямая $x = 0$ - вертикальная асимптота.

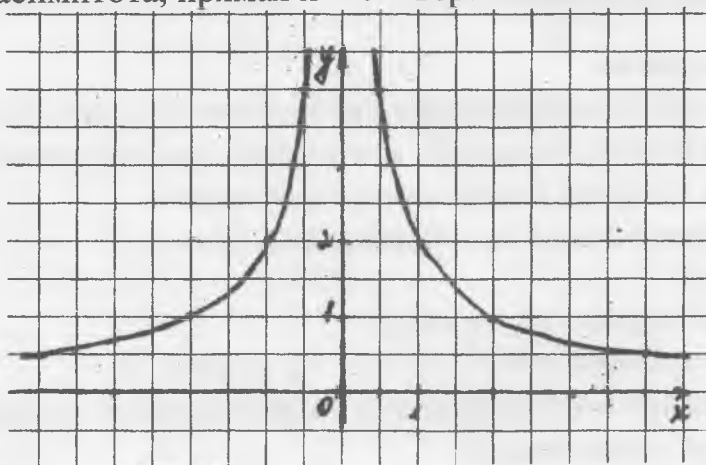


Рис. 13

б) Фронтальный опрос.

Вопросы.

- 1) Расскажите схему исследования функций.
- 2) Какая точка называется точкой максимума функции, минимума функции, что называется окрестностью точки?
- 3) Что называется асимптотой графика функции?

2. Закрепление материала.

Задачник: № 27(5,6,9,10).

3. Итог урока.

4. Домашнее задание.

Задачник: № 27(8,11,12).

Занятие 8

Тема: «Преобразования графиков функций».

Цели: рассмотреть простейшие преобразования для построения сложных графиков.

Формы работы: объяснение, практическая работа.

Формы контроля: проверка самостоятельно решенных упражнений.

Ход урока

1. Проверка домашнего задания.

Решение задания № 27(8,11,12)

8) $D(f): [-5; 5]$; $E(f): [0; 5]$; четная; нули функции: $x = \pm 5$; $f(x) > 0$ на $(-5; 5)$; возрастает на $[-5; 0]$, убывает на $[0; 5]$; при $x = 0$ $y = 5$ – наибольшее значение.

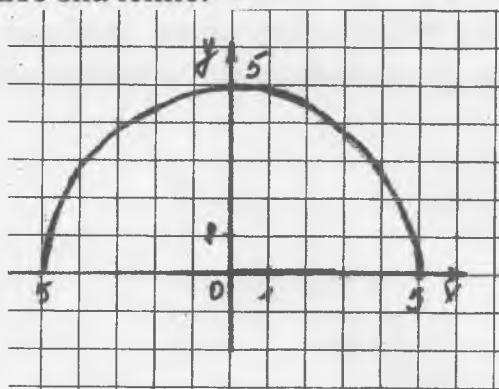


Рис. 14

11) $D(f): \mathbb{R}$; $E(f): (-\infty; 3]$; четная; нули функции: $x = 0, \pm 2$; $f(x) > 0$ при $x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; возрастает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$, убывает на $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$; при $x = \pm 1$ $y = 3$ – наибольшее значение, при $x = 0$ $y = 0$ – наименьшее значение.

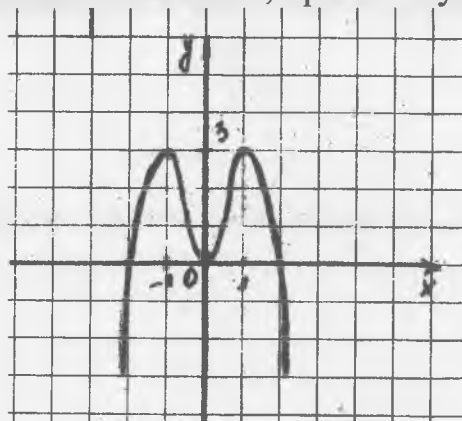


Рис. 15

1. Проверка домашнего задания.

а) Решение задания № 28(2,4,9)

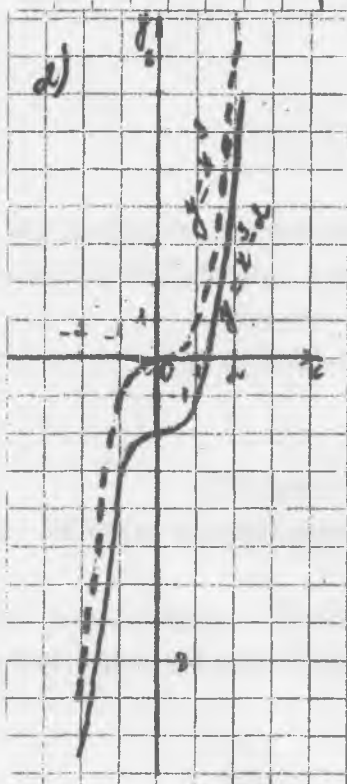
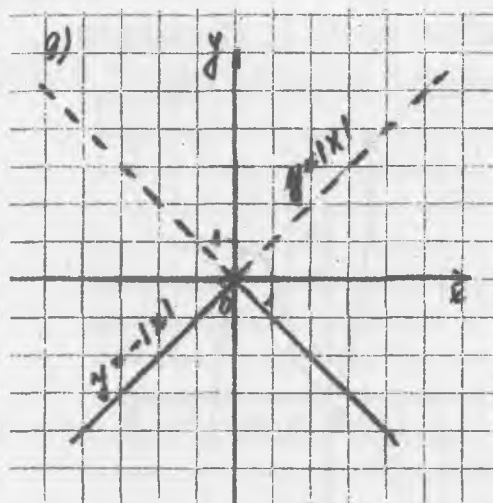
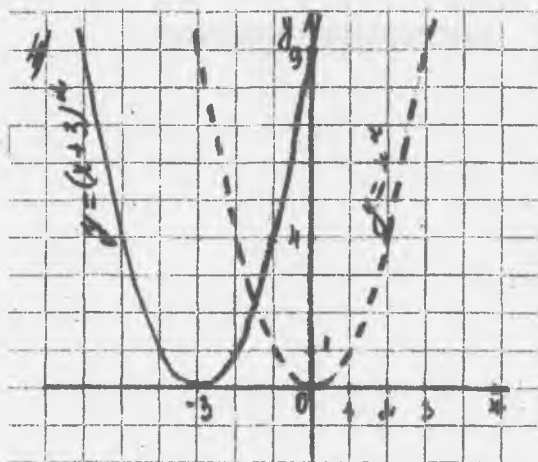


Рис.17

б) Фронтальный опрос.

Какие геометрические преобразования графиков функций вы знаете?

2. Закрепление материала.

Задачник: № 28(11,12,14,16,17,18).

3. Итог урока.

4. Домашнее задание.

Задачник № 28(8,10,13,15).

Занятие 10

Тема: «Функции, задаваемые несколькими формулами».

Для построения графика функции $y = f(-x)$ надо график функции $y = f(x)$ отобразить симметрично относительно оси y .

5) Растяжение вдоль оси y .

Построим графики функций $y = x^2$ и $y = 2x^2$. (слайд 8)

Заметим, что каждое значение, кроме нуля, второй функции увеличивается в два раза.

Для построения графика функции $y = kf(x)$ надо растянуть график функции $y = f(x)$ в k раз вдоль оси ординат при $k > 1$ и сжать вдоль оси ординат в k раз при $0 < k < 1$. (слайд 9)

6) Частичное отображение относительно оси x .

Построим графики функций $y = x^2$ и $y = |x^2|$. (слайд 10)

Для построения графика функции $y = |f(x)|$ надо часть графика $y = f(x)$, лежащую над осью x сохранить, а часть, лежащую под осью x отобразить симметрично относительно оси x .

7) Частичное отображение относительно оси y .

Построим графики функций $y = x^3$ и $y = |x|^3$. (слайд 11)

Для построения графика функции $y = f(|x|)$ надо часть графика функции $y = f(x)$ при $x \geq 0$ сохранить и отобразить ее симметрично относительно оси y .

3. Закрепление материала.

Задачник: № 28(1,3,5,6,7)

4. Итог урока.

5. Домашнее задание.

Задачник: № 28(2,4,9)

Занятие 9

Тема: «Преобразования графиков функций».

Цели: закрепить умение применять геометрические преобразования для построения графиков функций.

Формы работы: практическая работа.

Формы контроля: фронтальный опрос, проверка самостоятельно решенных упражнений.

Ход урока

1. Проверка домашнего задания.

а) Решение задания № 28(2,4,9)

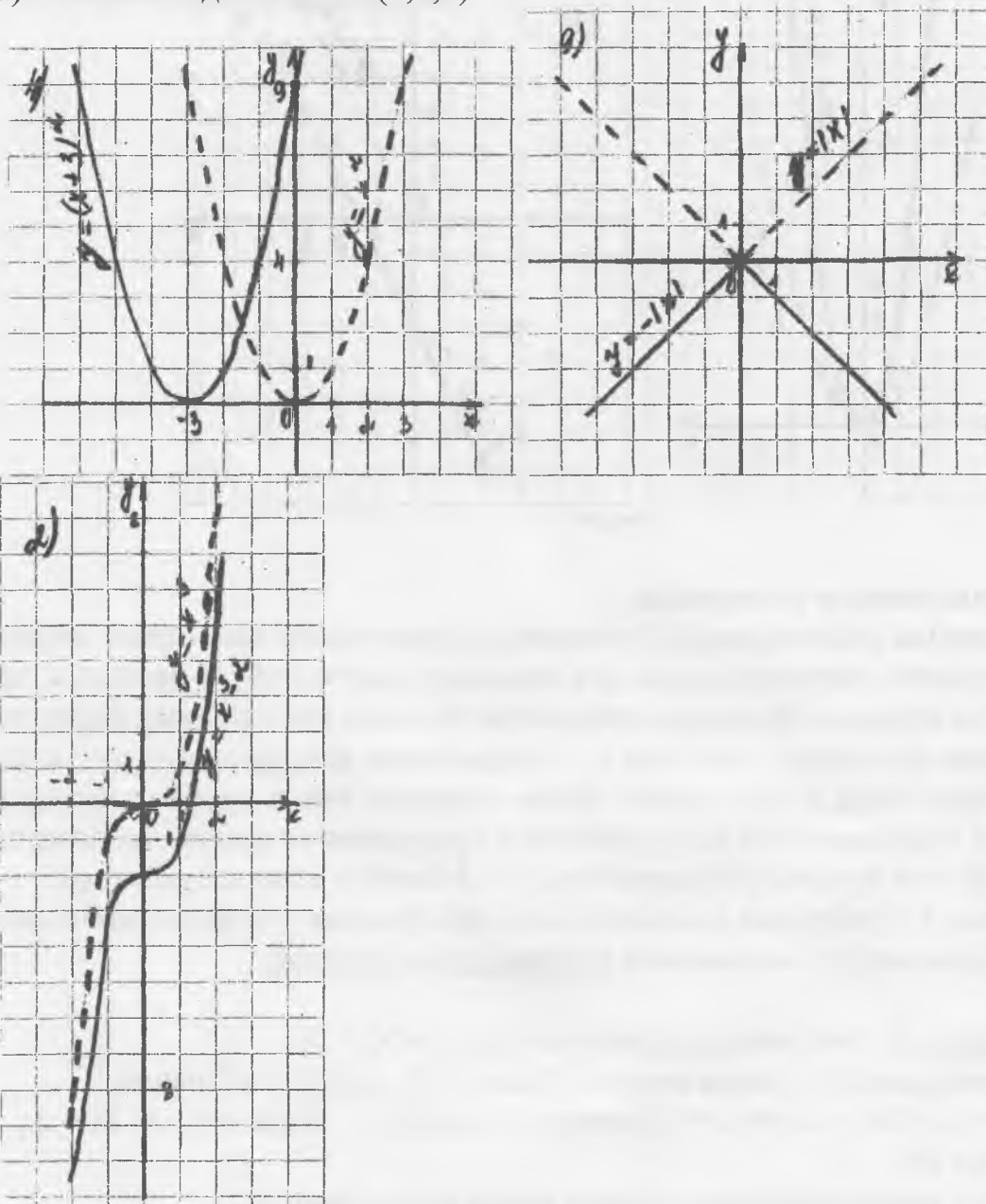


Рис.17

б) Фронтальный опрос.

Какие геометрические преобразования графиков функций вы знаете?

2. Закрепление материала.

Задачник: № 28(11,12,14,16,17,18).

3. Итог урока.

4. Домашнее задание.

Задачник № 28(8,10,13,15).

Занятие 10

Тема: «Функции, задаваемые несколькими формулами».

Цели: научить строить графики функций, задаваемых несколькими формулами.

Формы работы: объяснение, практическая работа.

Формы контроля: проверка самостоятельно решенных упражнений.

Ход урока

1. Проверка домашнего задания.

Решение задания № 28(8,10,13,15)

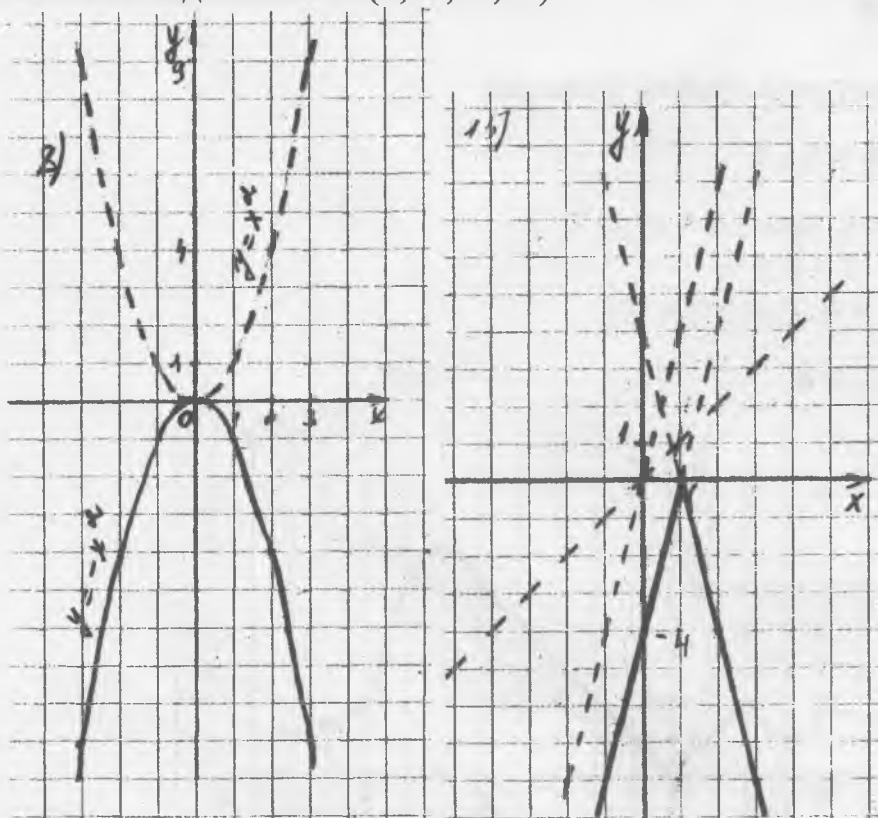


Рис.18

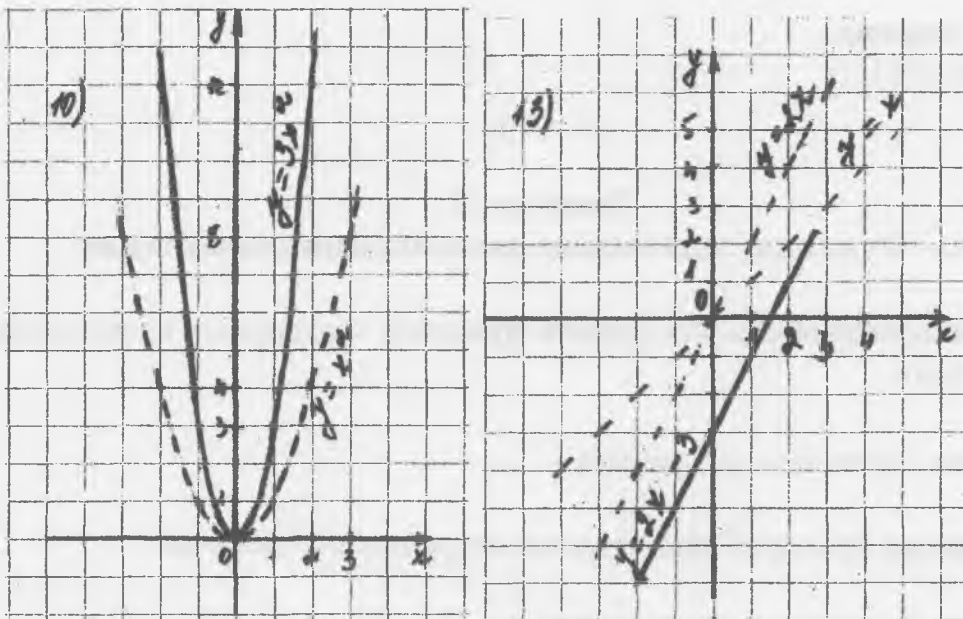


Рис.19

2. Изучение нового материала.

Ранее мы рассматривали функции, которые задавались одной формулой. Но встречаются ситуации, когда для описания какого-нибудь процесса, происходящего в природе, функцию приходится задавать несколькими формулами.

Пусть функция $y = f(x)$ при $x < b$ определена формулой $y = g(x)$, а при $x > b$ – формулой $y = \varphi(x)$, причем будем считать, что каждая из функций $g(x)$ и $\varphi(x)$ определена для всех значений x и разрывов не имеет. Тогда если $g(b) \neq \varphi(b)$, то функция $f(x)$ имеет при $x = b$ скачок; если же $g(b) = \varphi(b) = f(b)$, то функция $f(x)$ разрывов не имеет. Если обе функции $g(x)$ и $\varphi(x)$ элементарные, то функция $f(x)$ называется кусочно-элементарной.

Пример 1. Построим график функции $y = |x| + 2x$.

Освободимся от знака модуля. Если $x < 0$, то $|x| = -x$. Значит, $y = -x + 2x = x$ при $x < 0$. Если $x \geq 0$, то $|x| = x$. Тогда $y = x + 2x = 3x$ при $x \geq 0$.

Итак, данную функцию можно задать формулами:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x < 0, \\ 3x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Построим график данной функции.

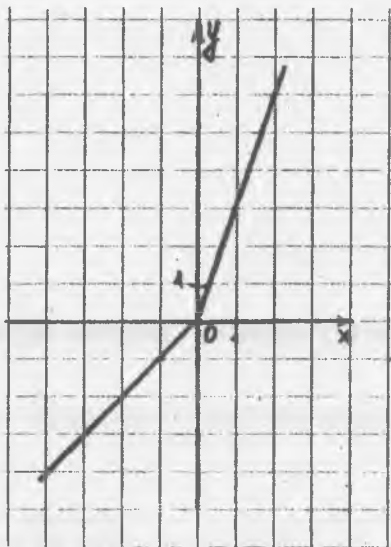


Рис.20

Пример 2. Построить график функции

$$y = \begin{cases} -\frac{8}{x}, & \text{при } x \leq -4, \\ (x+3)^2 + 1, & \text{при } -4 < x \leq -2, \\ |x|, & \text{при } -2 < x \leq 5, \\ -(x-6)^2 + 6, & \text{при } 5 < x \leq 8, \\ \frac{16}{x}, & \text{при } x > 8. \end{cases}$$

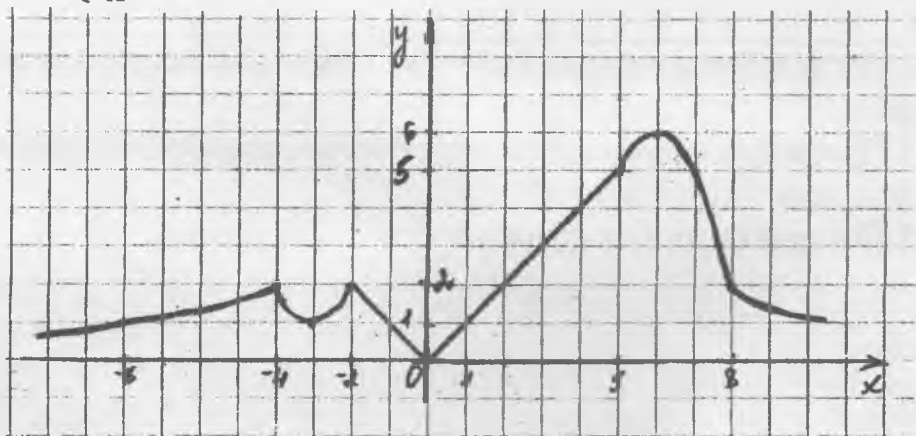


Рис.21

Если посмотреть на график данной функции, то можно предположить, что графики можно рисовать. Фигуру в координатной плоскости уже нельзя будет называть графиком функции, но зато отдельные ее части этому определению соответствуют.

Давайте посмотрим презентацию (графики улыбаются).

3. Закрепление материала.

Задачник: № 29(1,4).

4. Итог урока.

5. Домашнее задание.
Задачник: № 29(2,3).

Занятие 11

Тема: «Функции, задаваемые несколькими формулами»

Цели: Закрепить умение строить график функций, задаваемых несколькими формулами.

Формы работы: практическая работа.

Формы контроля: проверка самостоятельно решенных заданий.

Ход урока

1. Проверка домашнего задания.

Решение задания № 29(2,3)

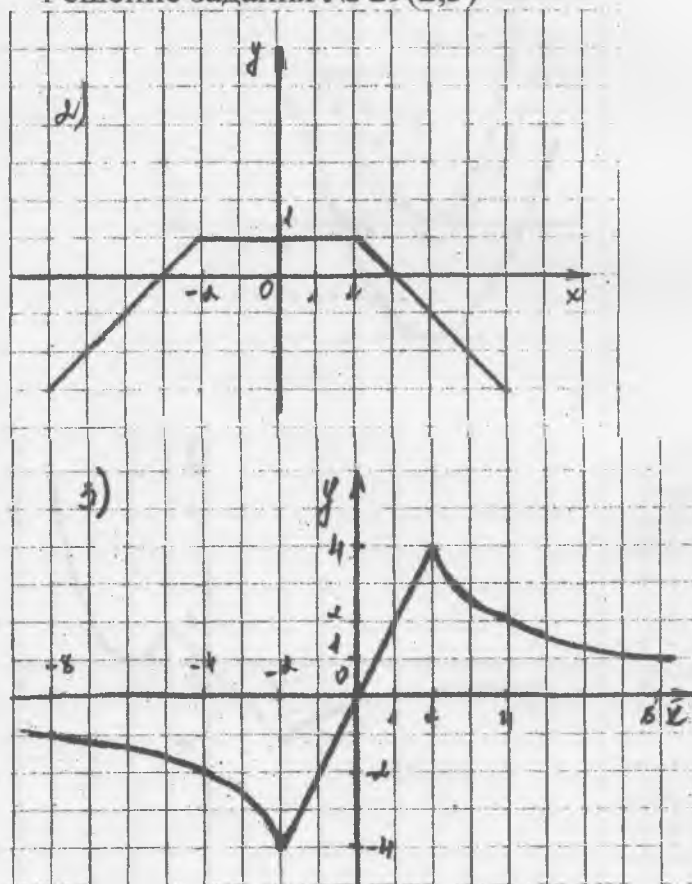


Рис.22

2. Закрепление материала.

Задачник: № 29(5,7,8,10,12).

3. Итог урока.

4. Домашнее задание.

Повторить материал лекций.

Задачник: № 29(6,9,11).

Занятие 12

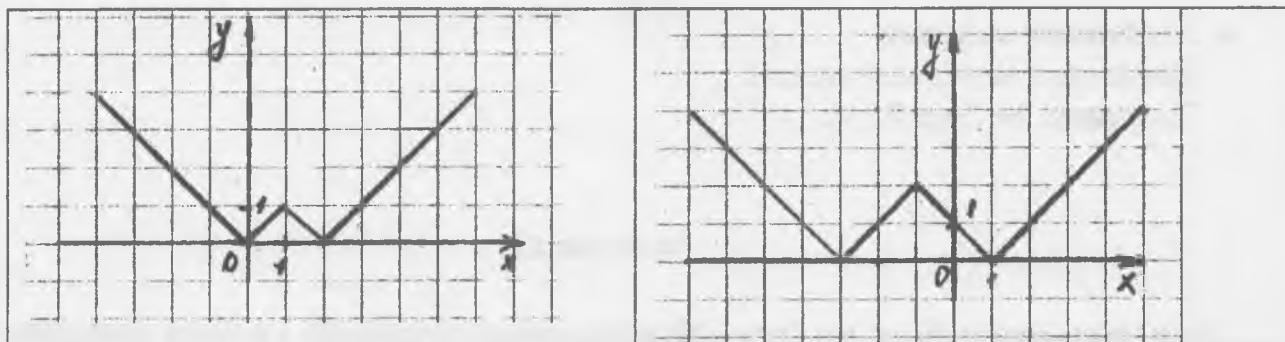
Контрольная работа по теме «Исследование функций, график функции»

Цели: выявить степень усвоения обучающимися изученного материала, пробелы в знаниях обучающихся.

Вариант 1	<p>1. Исследуйте функцию $f(x) = x^2 - 2x + 8$ и постройте ее график.</p> <p>2. Постройте, используя геометрические преобразования, график функции $f(x) = 2(x - 2)^2 + 4$.</p> <p>3. Постройте график функции</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{8}{x}, & \text{если } x \leq -2, \\ -x + 2, & \text{если } -2 < x \leq 2, \\ -x^2 + 6x - 8, & \text{если } x > 2. \end{cases}$ <p><i>Дополнительное задание.</i> Постройте график функции $f(x) = x - 1 - 1$.</p>
Вариант 2	<p>1. Исследуйте функцию $f(x) = -x^2 - 4x - 10$ и постройте ее график.</p> <p>2. Постройте, используя геометрические преобразования, график функции $f(x) = 0,5(x + 2)^2 - 3$.</p> <p>3. Постройте график функции</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{если } x \leq -2, \\ x, & \text{если } -2 < x \leq 1, \\ x^2 - 4x + 4, & \text{если } x > 1. \end{cases}$ <p><i>Дополнительное задание.</i> Постройте график функции $f(x) = x + 1 - 2$.</p>

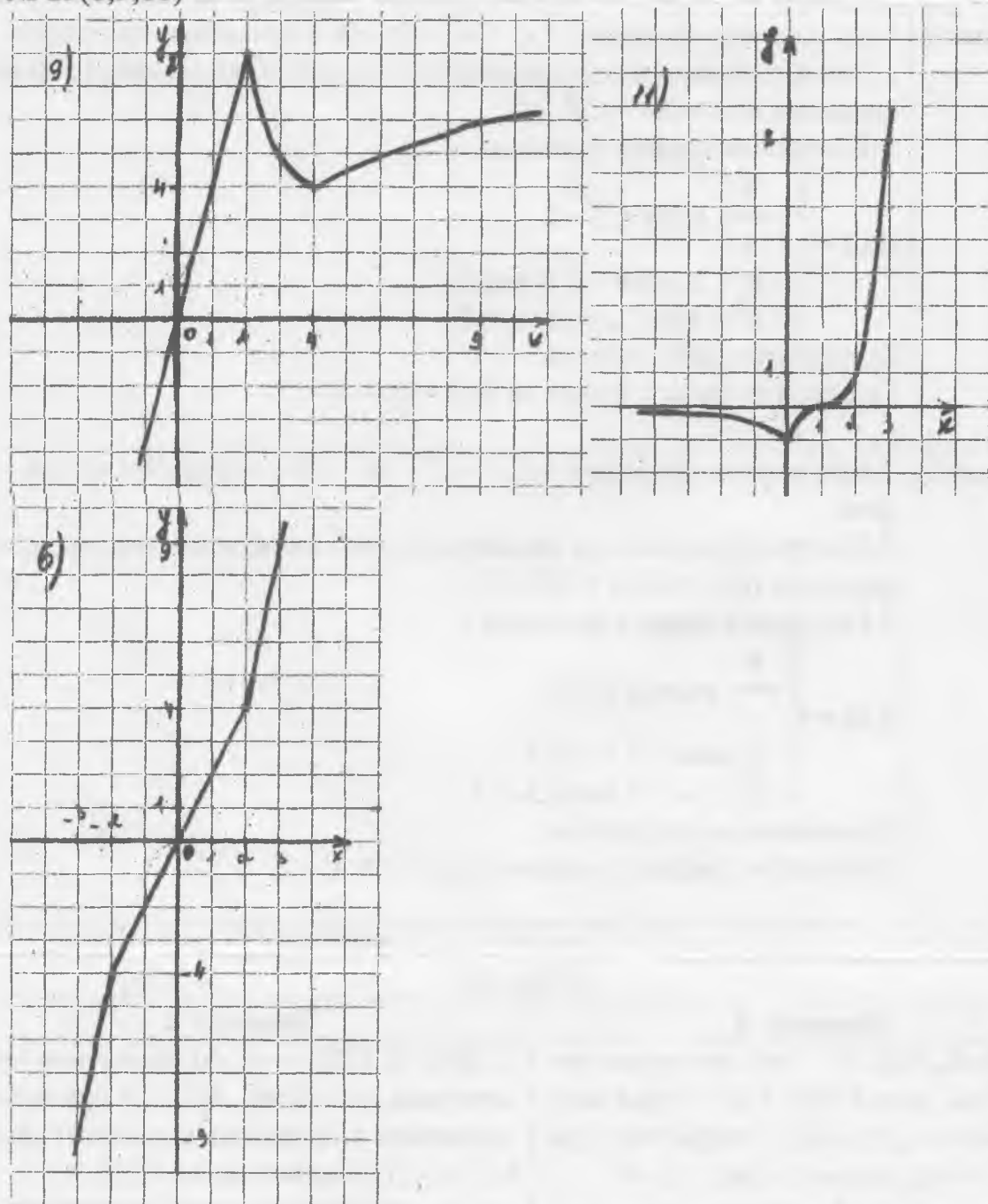
ОТВЕТЫ

Вариант 1	Вариант 2
1. $D(f): \mathbb{R}$, $E(f): [7; +\infty)$, ни четная ни нечетная, нулей нет, $f(x) > 0$ при всех значениях x , функция возрастает при $x \in [1; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 1]$, при $x = 1$ $y = 7$ – наименьшее значение.	1. $D(f): \mathbb{R}$, $E(f): (-\infty; -6]$, ни четная ни нечетная, нулей нет, $f(x) < 0$ при всех значениях x , функция возрастает при $x \in (-\infty; -2]$, убывает при $x \in [-2; +\infty)$, при $x = -2$ $y = -6$ – наибольшее значение.



Замечание 1: Пока обучающиеся решают контрольную работу, учитель проверяет выполнение домашнего задания.

№ 29(6,9,11)



Замечание 2. Проверка осуществляется по готовым решениям. После проверки проводится анализ типичных ошибок. Если необходимо, провести индивидуальные консультации.

Занятие 13

Тема: «Графический метод решения уравнений и систем уравнений».

Цели: закрепить знания и умения по построению графиков в практической ситуации при решении уравнений и систем уравнений.

Формы работы: лекция с элементами беседы, практическая работа.

Формы контроля: проверка решенных упражнений.

Ход урока

1. Изучение нового материала.

Рассмотрим уравнение $\sqrt{x} = x - 6$. Способ решения данного уравнения нам неизвестен. Однако с помощью графиков можно найти приближенное значение корней данного уравнения.

Построим в одной системе координат графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x - 6$.

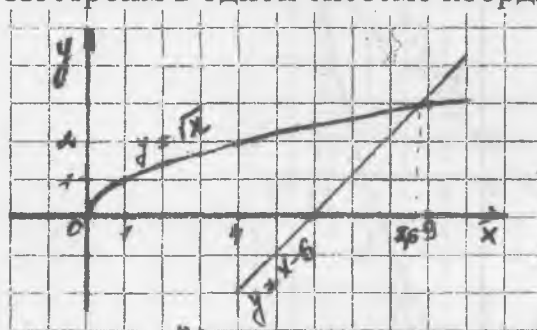


рис.24

Эти графики пересекаются в одной точке. Абсцисса точки пересечения есть то значение переменной x , при котором выражения \sqrt{x} и $x - 6$ принимают равные значения. Значит, абсцисса точки пересечения графиков функций является корнем данного уравнения. Из рисунка видно, что приближенное значение корня равно 8,7.

Примененный способ решения уравнения называется *графическим*.

Решим графически систему уравнений
$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x - y + 2 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем данную систему к виду
$$\begin{cases} y = x + 1, \\ y = x + 2. \end{cases}$$

Построим в одной системе координат графики функций $y = x + 1$ и $y = x + 2$.

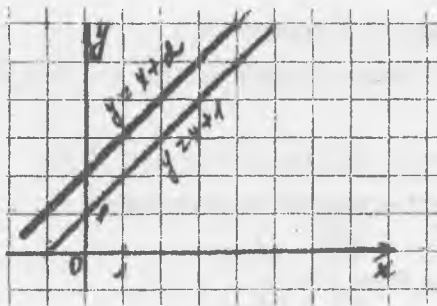


Рис.25

Из рисунка видно, что графики данных функций не пересекаются. значит, система решений не имеет.

Решим систему
$$\begin{cases} x^2 + y = 4, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Преобразуем систему к виду
$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 2 - x. \end{cases}$$

Построим в одной системе координат графики функций $y = 4 - x^2$ и $y = 2 - x$.

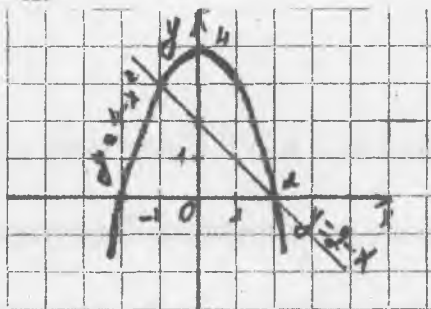


Рис.26

Из рисунка видно, что графики пересекаются в двух точках с координатами $(-1; 3)$ и $(2; 0)$. Координаты этих точек и являются решениями данной системы.

2. Закрепление материала.

Задачник: № 30(1,4), № 32(2,5).

3. Итог урока.

4. Домашнее задание.

Задачник: № 30(2,5), № 32(1,4).

Занятие 14

Тема: «Графический метод решения неравенств».

Цели: закрепить знания и умения по построению графиков в практической ситуации при решении неравенств.

Формы работы: объяснение, практическая работа.

Формы контроля: проверка решенных упражнений.

Ход урока

1. Проверка домашнего задания.

Решение задания № 30(2,5)

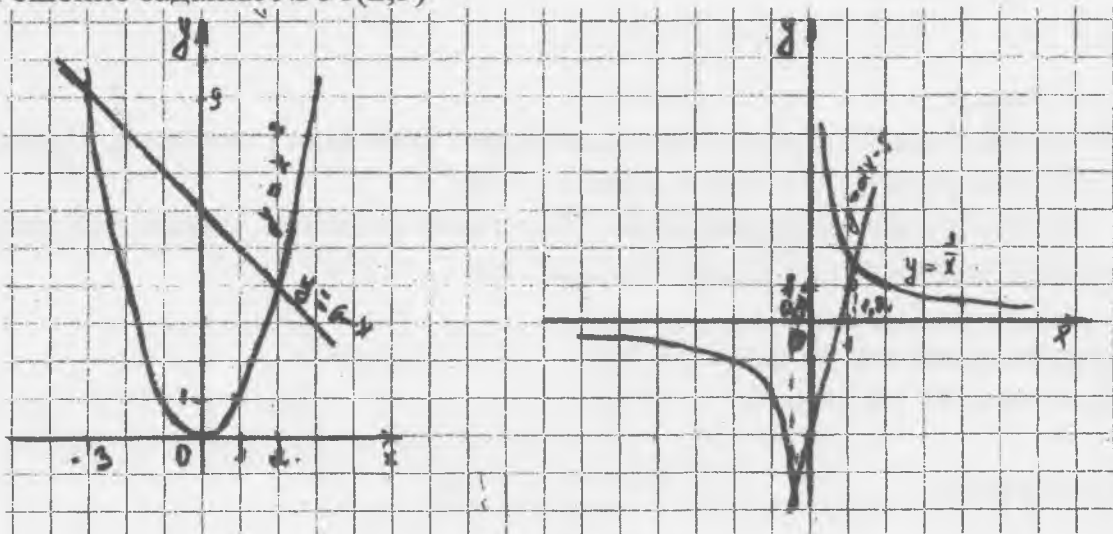


Рис.27

Ответ: 2) $x = -3$; 2. 5) $x \approx -0,4$; 1,2.

Решение задания № 32(1,4)

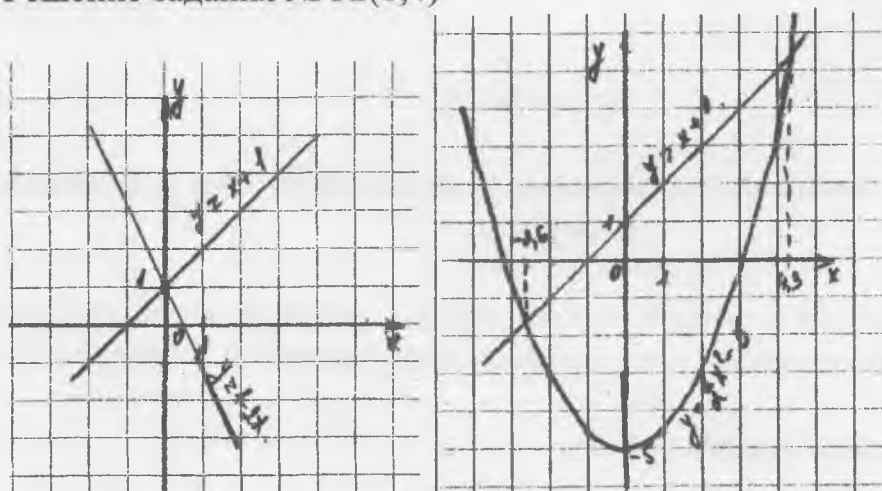


Рис. 28

Ответ: 1) (0;1); 4) (-2,6;-2,6) и (4,3;4,3).

2. Изучение нового материала.

Решим неравенства $2x + 1 > 0$ (1) и $2x + 1 < 0$ (2).

Для этого построим в системе координат график функции $y = 2x + 1$.

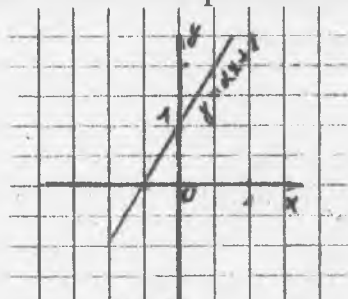


Рис.29

График данной функции пересекает ось x в точке $-0,5$.

Из рисунка видно, что неравенство (1) выполняется при $x \in (-0,5; +\infty)$, а неравенство (2) при $x \in (-\infty; -0,5)$.

Пример 1. Решить неравенства $x^2 + x + 1 > 0$ (3) и $x^2 + x + 1 < 0$ (4).

Пользуясь методом выделения полного квадрата, получим

$$x^2 + x + 1 = \left[x + \frac{1}{2} \right]^2 + \frac{3}{4}$$

Построим график функции $y = (x + 0,5)^2 + 0,75$

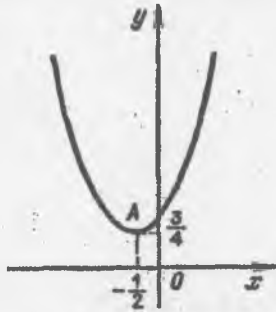


Рис.30

Данная парабола расположена выше оси x , т. е. $y > 0$ для всех x или $x^2 + x + 1 > 0$ для всех x .

Очевидно, что нет такого x , для которого выполнялось бы неравенство(4).

Пример 2. Решить неравенства $x^2 - 5x + 6 > 0$ (5) и $x^2 - 5x + 6 < 0$ (6).

Имеем $x^2 - 5x + 6 = (x - 2,5)^2 - 0,25$. Построим график функции $y = (x - 2,5)^2 - 0,25$.

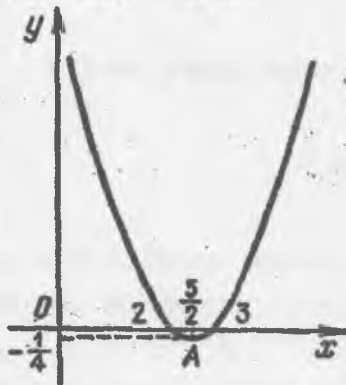


Рис.31

Из рисунка 31 видно, что неравенство (5) верно при $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$, а неравенство (6) при $x \in (2; 3)$.

Пример 3. Решить неравенства $-x^2 - 2x + 1 > 0$ (7) и $-x^2 - 2x + 1 < 0$ (8).

Умножим каждое из неравенств на -1 , получим равносильные им неравенства $x^2 - 2x + 1 < 0$ (9) и $x^2 - 2x + 1 > 0$ (10).

Имеем $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Построим график функции $y = (x - 1)^2$.

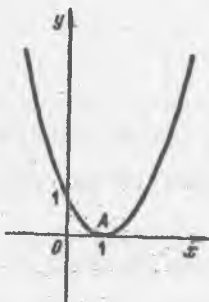


Рис.32

Из рисунка 32 видно, что неравенство (9) не имеет решений, неравенство (10) выполняется для всех x , кроме $x = 1$.

Соответственно неравенство (7) не имеет решений, множество решений неравенства (8) состоит из двух интервалов: $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$.

3. Закрепление материала.

Задачник: № 33(1,5,6,8).

4. Итог урока.

5. Домашнее задание.

Задачник: № 33(2,3,4).

Занятие 15

Тема: «Графический метод решения уравнений, систем уравнений, неравенств».

Цели: закрепить знания и умения по построению графиков в практической ситуации при решении уравнений, систем уравнений и неравенств.

Формы работы: практическая работа.

Формы контроля: проверочная работа, проверка решенных упражнений.

Ход урока.

1. Проверка домашнего задания.

Решение задания № 33(2,3,4)

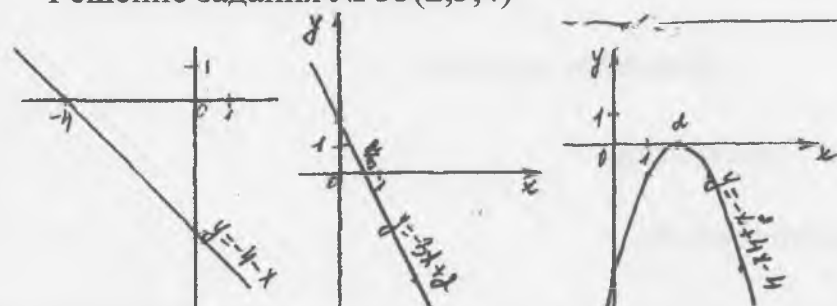


рис.33

Ответ: 2) $(-\infty; -4)$; 3) $(2\sqrt{3}; +\infty)$; 4) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

2. Проверочная работа.

Вариант 1	Вариант 2
Задачник 1. № 32(6); 2. № 33(7).	Задачник 1. № 32(7); 2. № 33(9).

3. Закрепление материала.

Задачник: № 31; № 34; № 35.

4. Итог урока.

5. Домашнее задание.

Повторить материал всех лекций, подготовиться к зачету.

Занятие 16

Конференция по теме «Мир функций».

Цели: создание условий для творческого развития обучающихся.

На данном занятии обучающиеся предоставляют свои проекты по выбранным темам, связанных с функциями. Выступления могут проходить в форме реферата, презентации, портфолио.

Занятие 17

Итоговое занятие.

Форма работы: диалог – дискуссия.

Формы контроля: анкетирование.

На данном занятии необходимо подвести итоги, соответствующие целям и задачам курса, а также провести анкетирование, которое позволит выявить степень значимости программы для обучающихся, уровень их психологического настроя на решение задач с применением свойств функций.

АНКЕТА

1. Имеет ли этот курс практическую направленность?
2. Хотели бы вы продолжить изучение данного курса?
3. Почему бы вы хотели (не хотели) продолжить изучение данного курса?
4. Какие из приведенных видов деятельности вы хотели бы видеть на курсе:
 - а) Подготовка рефератов по выбранной теме;
 - б) Лекции;
 - в) Практикумы;
 - г) Зачеты;
 - д) Семинары?
5. Ваши пожелания по работе курса.
6. Какой элективный учебный предмет вы бы выбрали в следующем году по математике?

О функциях

Впервой половине XVII в. В связи с развитием механики в математику проникают идеи изменения и движения. В это же время начинает складываться представление о функции как о зависимости одной переменной величины от другой. Так, французские математики Пьер Ферма (1601 – 1665) Рене Декарт (1596 – 1650) представляли себе функцию как зависимость ординаты точки кривой от ее абсциссы. А английский ученый Исаак Ньютон (1643- 1727) понимал функцию как изменяющуюся в зависимости от времени координату движущейся точки.

Термин «функция» (от латинского function – исполнение, совершение) впервые ввел немецкий математик Готфрид Лейбниц (1646 – 1716). У него функция связывалась с геометрическим образом (графиком функции). В дальнейшем функцию обычно рассматривали как аналитическое выражение. Однако уже у швейцарского математика Иоганна Бернулли (1667 – 1748) и члена Петербургской академии наук знаменитого математика XVIII в. Леонарда Эйлера (1707 – 1783) имеется и общее понимание функции как зависимости одной переменной величины от другой.

Приложения

О функциях

Впервой половине XVII в. В связи с развитием механики в математику проникают идеи изменения и движения. В это же время начинает складываться представление о функции как о зависимости одной переменной величины от другой. Так, французские математики Пьер Ферма (1601 – 1665) Рене Декарт (1596 – 1650) представляли себе функцию как зависимость ординаты точки кривой от ее абсциссы. А английский ученый Исаак Ньютон (1643– 1727) понимал функцию как изменяющуюся в зависимости от времени координату движущейся точки.

Термин «функция» (от латинского function – исполнение, совершение) впервые ввел немецкий математик Готфрид Лейбниц (1646 – 1716). У него функция связывалась с геометрическим образом (графиком функции). В дальнейшем функцию обычно рассматривали как аналитическое выражение. Однако уже у швейцарского математика Иоганна Бернулли (1667 – 1748) и члена Петербургской академии наук знаменитого математика XVIII в. Леонарда Эйлера (1707 – 1783) имеется и общее понимание функции как зависимости одной переменной величины от другой.

(материал можно дать на первом уроке)

О методе координат

Первоначально идея координат зародилась в древности в связи с потребностями астрономии, географии, живописи. Так, на стене донной из древнеегипетских погребальных камер была обнаружена квадратная сетка (палетка), которой пользовались для увеличения изображений. Древнегреческий астроном Клавдий Птолемей (II в.) применил географические координаты (долготу и широту) для определения местонахождения мореплавателя. Идеей координат пользовались в Средние века для определения положения светил на небе, для определения места на поверхности Земли. Прямоугольной сеткой пользовались художники эпохи Возрождения.

Применять координаты в математике впервые стали Пьер Ферма и Рене Декарт. В 1637 г. вышла книга Р. Декарта «Рассуждения о методе», в которой на ряду с общими философскими рассуждениями о материи значительное место уделяется «универсальной математике». В разделе этой книги «Геометрия» Р. Декарт предложил новый метод – метод координат, который позволил переходить от точки (в координатной плоскости) к паре чисел, от линии к уравнению, от геометрии к алгебре. Это была новая геометрия, которую в настоящее время называют аналитической геометрией. Заслуга Р. Декарта состояла в том, что он ввел переменные координаты. Так, в уравнении $ax + by = c$ буквы x и y стали рассматриваться не как неизвестные, а как переменные. Благодаря этому каждой прямой в координатной плоскости соответствует линейное уравнение $ax + by = c$ (a или b – отличные от нуля числа) и наоборот.

Метод координат позволяет строить графики уравнений, изображать геометрически различные зависимости, выраженные аналитически с помощью уравнений и формул, решать различные геометрические задачи с помощью алгебры.

Термины «абсцисса» и «ордината» и название «координаты» были введены в употребление Г. Лейбницем в 70 – 80-е гг. XVII в.

(материал можно дать на уроке построения графиков функций)

ЗАДАЧНИК

Найдите область определения функции.

1. а) $f(x)=37-3x$; б) $\varphi(x)=x^2-7$; в) $y=\sqrt{x-3}$.
2. а) $f(x)=19-2x$; б) $\varphi(x)=x^2-4$; в) $y=\sqrt{x-2}$.
3. а) $f(x)=10-x^2$; б) $g(x)=\frac{12}{x+4}$.
4. Найдите область значений функции.
а) $y=-24x+5$; б) $y=41$; в) $y=\sqrt{x}$; г) $y=|x|$.
5. На рисунке 1 изображен график движения туристов от станции до озера. Пользуясь графиком, ответьте на вопросы:
а) Сколько привалов делали туристы в пути и какова продолжительность каждого привала?
б) Сколько километров прошли туристы до первого привала; между первым и вторым привалами; после второго привала?
в) С какой скоростью шли туристы на каждом участке пути?
г) Через сколько часов туристы прибыли на озеро?
д) На каком расстоянии от озера находились туристы через 2 ч; через 3 ч; через 4 ч?

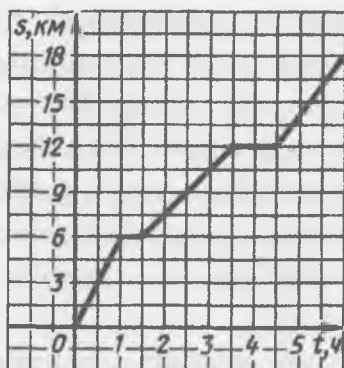


Рис. 1

6. На рисунке 2 изображены графики движения пешехода (I) и велосипедиста, отправившихся из деревни на станцию, находящуюся от нее на расстоянии 32,5 км. Пользуясь графиком, ответьте на вопросы:
а) Кто выехал из деревни позже и на сколько?
б) Сколько времени находился в пути пешеход; велосипедист?
в) Какова скорость движения пешехода; велосипедиста?
г) Кто прибыл на станцию раньше и на сколько?
д) Через сколько часов после своего выезда велосипедист догнал пешехода?
е) Сколько километров оставалось идти пешеходу до станции в тот момент, когда велосипедист доехал до него?

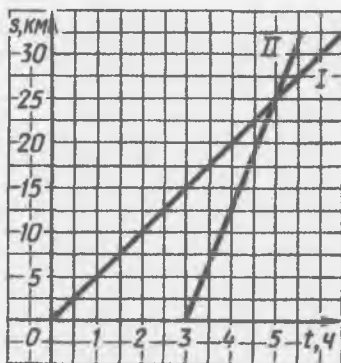


Рис. 2

7. Рыболов отправился на озеро, а затем вернулся домой. График движения рыболова изображен на рисунке 3. Ответьте на вопросы:

- Сколько времени шел рыболов от дома до озера и с какой скоростью?
- Сколько времени провел он на озере?
- Сколько времени затратил рыболов на путь от озера до дома и с какой скоростью шел?
- На каком расстоянии от дома находился рыболов через 2 ч; через 5 ч; через 6 ч после выхода из дома?
- Сколько времени шел рыболов от озера до шоссе на обратном пути, если известно, что первый раз он пересек шоссе спустя полчаса после выхода из дома?

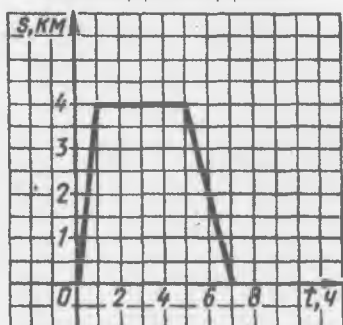


Рис. 3

8. Докажите, что p – четная, а функция g – нечетная:

- $p(x) = x^4$; б) $p(x) = -3x^6$; в) $p(x) = \frac{1}{x^2+1}$;
- $g(x) = x^5$; д) $g(x) = -4x^3$; е) $g(x) = x|x|$.

9. Исследуйте на четность функцию:

- $f(x) = 3x^4 - x^2 + 5$; б) $f(x) = x^7 + 2x^3$; в) $f(x) = 5x - 1$;
- $f(x) = x^2 + x + 1$; д) $f(x) = |x + 3| + |x - 3|$; е) $f(x) = 2x|x|$.

10. Известно, что f – четная функция и $f(-5) = 8$, $f(3) = 12$, $f(x_0) = 3$. Найдите $f(5)$, $f(-3)$, $f(-x_0)$.

11. Известно, что g – нечетная функция и $g(5) = -5$, $g(12) = 3$, $g(-x_0) = 7$. Найдите $g(-5)$, $g(-12)$, $g(x_0)$.

12. Постройте график функции f , зная, что она четная и что ее значения при $x \geq 0$ могут быть найдены по формуле:

- $f(x) = 2x - 1$; б) $f(x) = x^2 - 2x$; в) $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

13. Постройте график функции g , зная, что она нечетная и что ее значения при $x \geq 0$ могут быть найдены по формуле:

а) $g(x) = x^2$; б) $g(x) = x^2 - 4x$; в) $g(x) = \sqrt{x}$.

14. Известно, что f и g – четные функции. Исследуйте на четность функцию:

а) $y = f(x) + g(x)$; б) $y = f(x) - g(x)$; в) $y = f(x) \cdot g(x)$; г) $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

15. Известно, что f и g – нечетные функции. Исследуйте на четность функцию:

а) $y = f(x) + g(x)$; б) $y = f(x) - g(x)$; в) $y = f(x) \cdot g(x)$; г) $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

16. Исследуйте на четность функции:

а) $f(x) = (x+2)(x+3)(x+4) - (x-2)(x-3)(x-4)$;

б) $g(x) = (x-5)^8 \cdot (x+7)^{11} + (x+5)^8 \cdot (x-7)^{11}$;

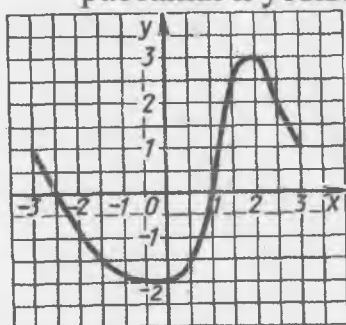
в) $\varphi(x) = (x-6)^9 \cdot (x+3)^5 + (x+6)^9 \cdot (x-3)^5$.

17. Исследуйте на четность функции:

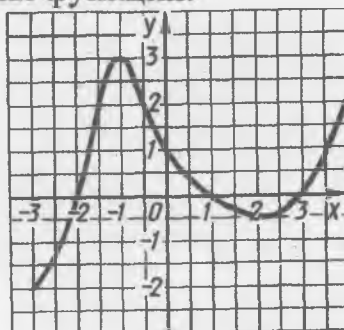
а) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x+1} - \frac{x^3 + 2x^2}{x-1}$;

б) $\varphi(x) = \frac{(x-2)^3 \cdot (x+1)^5 \cdot (x-5)^7}{2x+1} + \frac{(x+2)^3 \cdot (x-1)^5 \cdot (x+5)^7}{2x-1}$;

18. На рис. 4 изображен график функции $y = f(x)$. Укажите промежутки возрастания и убывания функции.



а)



б)

Рис.4

19. На рис. 5 изображен график функции $y = f(x)$. Укажите промежутки возрастания и убывания функции.

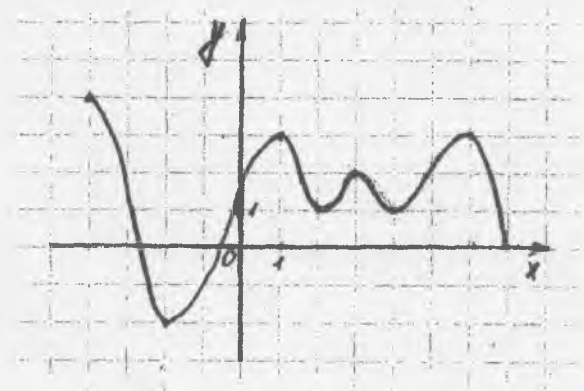


Рис.5

20. Существуют ли функции, имеющие симметричную относительно нуля

область определения и являющиеся:

- 1) четными убывающими;
- 2) нечетными убывающими;
- 3) четными возрастающими;
- 4) нечетными возрастающими.

Приведите примеры.

21. Постройте график какой-либо функции с областью определения $[-6; 6]$, так, чтобы эта функция убывала на промежутках $[-6; -3]$; $[0; 1]$ и $[4; 6]$ и возрастала на промежутках $[-3; 0]$ и $[1; 4]$.
22. Используя определения возрастания и убывания функции на промежутке докажите, что функция:

а) $y = \frac{5}{2x+1}$ убывает на $(-\infty; -0,5)$;

б) $y = \frac{21x-9}{3x-1}$ возрастает на $\left[-\infty; \frac{1}{3}\right]$;

в) $y = 3x^2 - 4x + 7$ убывает на $\left[-\infty; \frac{2}{3}\right]$;

г) $y = x^3 - 3x$ возрастает на $[1; +\infty)$.

23. Найдите функцию, обратную данной. Укажите область определения и область значений обратной функции. Постройте графики данной и обратной функции в одной системе координат.

а) $y = 5x - 1$; б) $y = \frac{3}{x-1}$; в) $y = (x+3)^2$ при $x \leq -3$;

г) $y = \sqrt{x-2}$; д) $y = x^2 - 2x + 5$ при $x \leq 1$.

24. Функция задана с помощью пар:

а) $(1; 8), (3; 26), (2; 13), (5; 48), (4; 30)$;

б) $(3; 10), (4; 20), (5; 10)$.

Является ли соответствие, обратное данному, функцией?

25. Покажите, что функции являются обратимыми и обратны каждая себе:

а) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$.

Каковы особенности графика функции, обратной самой себе?

26. В результате исследования некоторой функции выяснилось, что:

- 1) $D(f): (-\infty; +\infty)$;
- 2) $E(f): [0; 2]$;
- 3) f – четная, непрерывная функция;
- 4) $f(0) = 0$,
- 5) $f(x) > 0$ при $x \in (0; +\infty)$;
- 6) при $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \rightarrow 2$.

Изобразите схематически график функции.

27. Проведите исследование и постройте график функции:

1) $f(x) = 5x^2 - 2x$; 2) $f(x) = 8 - 2x^2$; 3) $f(x) = x - |x|$;

$$4) f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}; \quad 5) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}; \quad 6) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}; \quad 7) f(x) = \frac{2}{|x|};$$

$$8) f(x) = \sqrt{25 - x^2}; \quad 9) f(x) = \sqrt{x^2 - 25}; \quad 10) f(x) = \sqrt{2 - |x|};$$

$$11) f(x) = 4x^2 - x^4; \quad 12) f(x) = 3x^2 - x^3.$$

28. Постройте графики функций, используя геометрические преобразования:

$$1) y = x^2 + 3; \quad 2) y = x^3 - 2; \quad 3) y = \sqrt{x} - 2; \quad 4) y = (x + 3)^2;$$

$$5) y = \frac{1}{x - 4}; \quad 6) y = |x + 2|; \quad 7) y = -x; \quad 8) y = -x^2; \quad 9) y = -|x|;$$

$$10) y = 3x^2; \quad 11) y = 0,5x^3; \quad 12) y = 4x; \quad 13) y = 2x - 3;$$

$$14) y = 2(x + 4)^2; \quad 15) y = -|4x - 3|; \quad 16) y = 2\sqrt{2x + 1} - 1;$$

$$17) y = |2x - 3|; \quad 18) y = 3|x| - 4.$$

29. Построить графики функций:

$$1) y = \begin{cases} -x - 1, & \text{если } x < -2, \\ 1, & \text{если } -2 \leq x \leq 2, \\ x - 1, & \text{если } x > 2; \end{cases}$$

$$2) y = \begin{cases} x + 3, & \text{если } x < -2, \\ 1, & \text{если } -2 \leq x \leq 2, \\ -x + 3, & \text{если } x > 2; \end{cases}$$

$$3) y = \begin{cases} \frac{8}{x}, & \text{если } x < -2, \\ 2x, & \text{если } -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{8}{x}, & \text{если } x > 2; \end{cases}$$

$$4) y = \begin{cases} \frac{8}{x}, & \text{если } x < -2, \\ -2x, & \text{если } -2 \leq x \leq 2, \\ -\frac{8}{x}, & \text{если } x > 2; \end{cases}$$

$$5) y = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x > 1, \\ -x, & \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ x^2, & \text{если } x < -1; \end{cases}$$

$$6) y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x > 2, \\ x, & \text{если } -2 \leq x \leq 2, \\ -x^2, & \text{если } x < -2; \end{cases}$$

$$7) y = \begin{cases} x^2 + 6x + 9, & \text{если } x \leq -2, \\ -0,5x, & \text{если } -2 < x \leq 2, \\ \frac{2}{x}, & \text{если } x > 2; \end{cases}$$

$$8) y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3, & \text{если } x \leq -1, \\ x + 1, & \text{если } -1 < x \leq 1, \\ \frac{2}{x}, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

$$9) y = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{если } x \geq 4, \\ \frac{16}{x}, & \text{если } 2 < x < 4, \\ 4x, & \text{если } x \leq 2; \end{cases}$$

$$10) y = \begin{cases} \frac{8}{x}, & \text{если } x \leq -2, \\ \frac{x^3}{4} + 4, & \text{если } -2 < x \leq 0, \\ \frac{1}{x^2 + 1}, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$$11) y = \begin{cases} (x-1)^3, & \text{если } x \geq 0, \\ \frac{1}{x-1}, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad 12) y = \begin{cases} -x^2 - 2x, & \text{если } x < -1, \\ 3, & \\ -\frac{1}{x}, & \text{если } x \geq -1. \end{cases}$$

30. Решите графически уравнение:

$$\begin{array}{lll} 1) x^2 = x + 6; & 2) x^2 = 6 - x; & 3) 2x^2 - 3x - 2 = 0; \\ 4) x^2 = \frac{6}{x}; & 5) \frac{2}{x} = 2x - 3; & 6) \sqrt{x} = \frac{1}{x}; \\ 7) \sqrt{x} = 6 - x; & 8) 3x^3 + 2x = 4 + (2 - x)^3; & 9) \sqrt{x^2 + 3x + 6} + \sqrt{x + 1} = 2. \end{array}$$

31. С помощью графиков выясните, сколько корней может иметь при различных значениях b уравнение $x \setminus b = m$, если:

$$1) m = 3 \setminus x; \quad 2) m = \sqrt{x}; \quad 3) m = x^3; \quad 4) m = |x + 1|.$$

32. Решите графически систему уравнений:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x + y - 1 = 0; \end{cases} & 2) \begin{cases} 7x - y - 3 = 0, \\ 14x - 2y + 5 = 0; \end{cases} & 3) \begin{cases} 3x + y - 1 = 0, \\ 6x + 2y - 2 = 0; \end{cases} \\ 4) \begin{cases} x^2 + 2y = 10, \\ x - y = -1; \end{cases} & 5) \begin{cases} 2x^2 - y = -2, \\ 3x + y = 1; \end{cases} & 6) \begin{cases} y + 2x^2 = 3, \\ x + y = 2; \end{cases} & 7) \begin{cases} y = x^2 - 1, \\ y = -x^2 + 2x - 1. \end{cases} \end{array}$$

33. Решите графически неравенства:

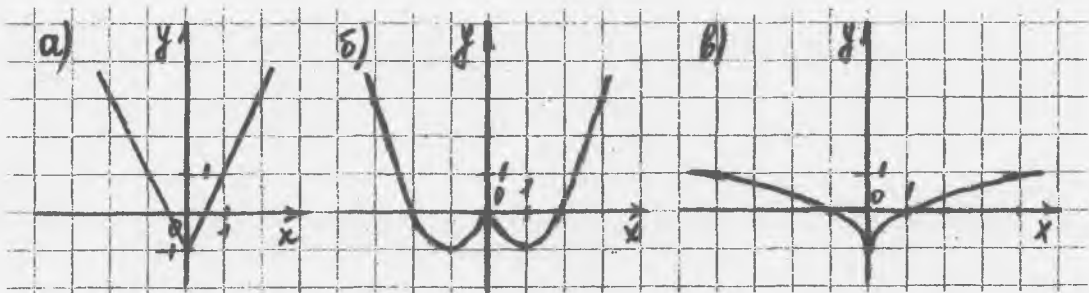
$$\begin{array}{lll} 1) 2x + 5 < 0; & 2) -x - 4 > 0; & 3) -3x + 2 < 0; \\ 4) -x^2 + 4x - 4 < 0; & 5) 4x^2 + x + 3 > 0; & 6) 3x^2 - 5x - 2 > 0; \\ 7) 2x - 1 > 3; & 8) x + 1 > 2x - 1; & 9) 1 - 2x > 7; \quad 10) 3 > 1 - x. \end{array}$$

34. Изобразив схематически графики, выясните, имеет ли решения система уравнений и если имеет, то сколько:

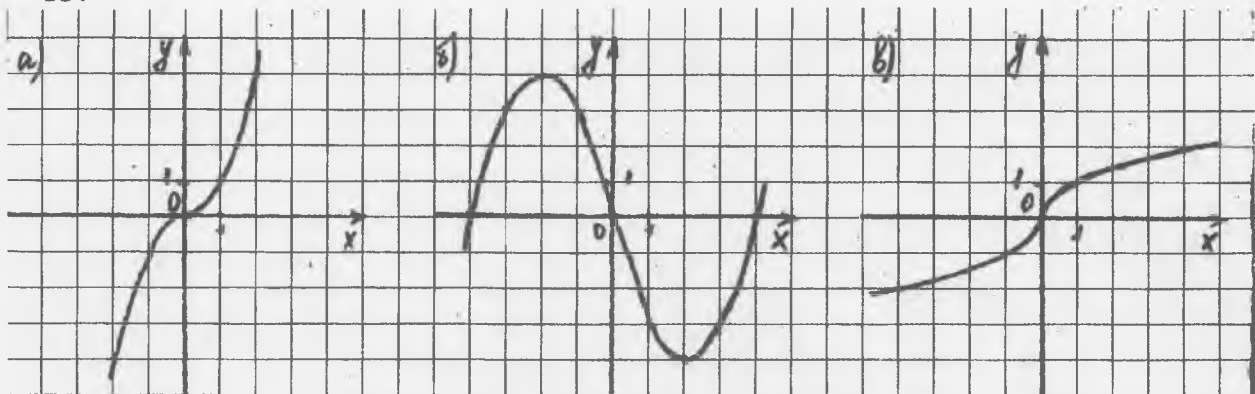
$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} y = x^2 + 2, \\ y = -x^2 + 7; \end{cases} & 2) \begin{cases} y = -x^2 + 8, \\ y = x^2 + 4; \end{cases} & 3) \begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y = -x^2; \end{cases} & 4) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y - x^2 = 2. \end{cases} \end{array}$$

Ответы

1. а) R; б) R; в) $x \geq 3$.
2. а) R; б) R; в) $x \geq 2$.
3. а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$.
4. а) $(-\infty; +\infty)$; б) $\{41\}$; в) $[0; +\infty)$; г) $[0; +\infty)$.
5. а) 2, 30 мин, 1 ч; б) 6 км, 6 км, 6 км; в) 6 км/ч, 3 км/ч, 4 км/ч; г) 6 ч; д) 10,5 км, 7,5 км, 6 км.
6. а) велосипедист, на 3 ч; б) 6,5 ч; 2,5 ч; в) 5 км/ч; 13 км/ч; г) велосипедист, на 1 ч; д) через 2 ч; е) 7,5 км.
7. а) 1 ч, 4 км/ч; б) 4 ч; в) 2 ч, 2 км/ч; г) 4 км, 4 км, 2 км; д) 1 ч.
9. а) четная, б) нечетная, в) ни четная ни нечетная, г) ни четная ни нечетная, д) четная, е) нечетная.
10. 8, 12, 3.
11. 5, -3, -7.
- 12.



13.



14. а), б), в), г) – четные.

15. а), б) – нечетные, в), г) – четные.

16. а), в) – четные, б) – нечетная.

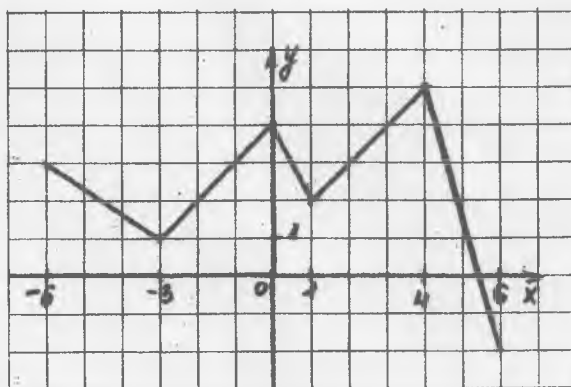
17. а) нечетная, б) четная.

18. а) возрастает на $[0; 2]$, убывает на $[-3; 0]$ и $[2; 3]$; б) возрастает на $[-3; 1]$ и $[2; 4]$, убывает на $[-1; 2]$;

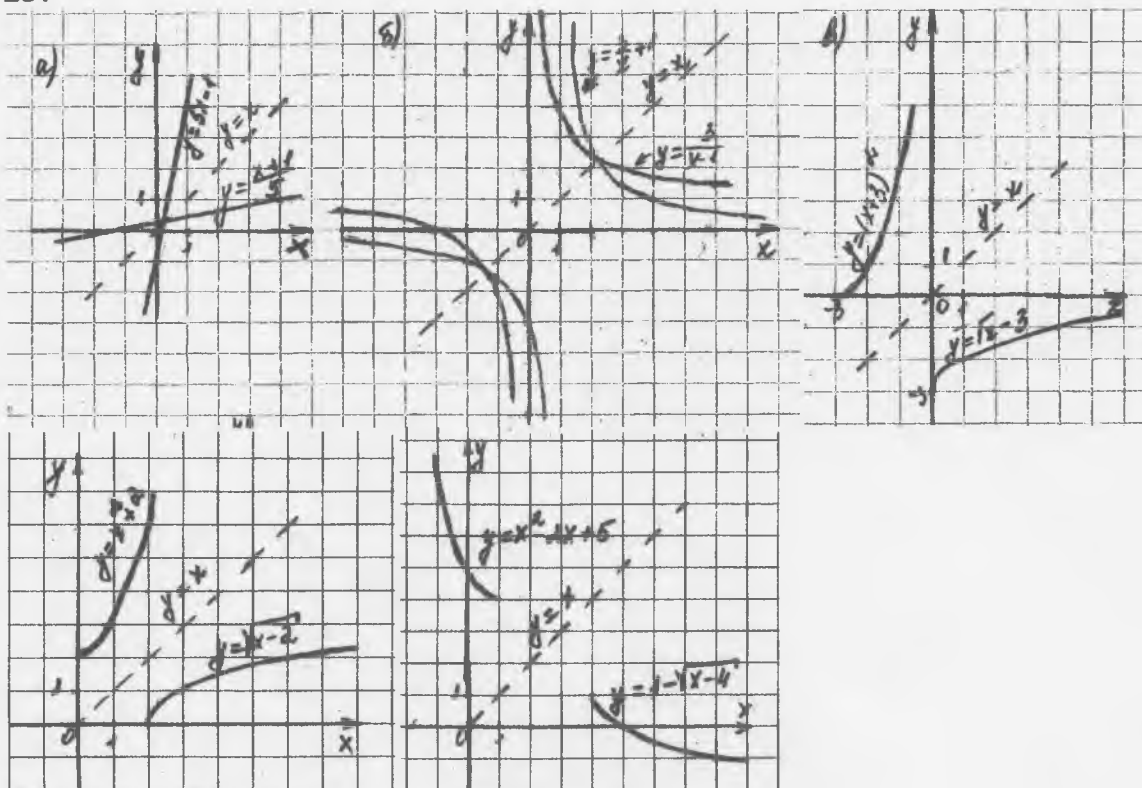
19. возрастает на $[-2; 1]$, $[2; 3]$, $[4; 6]$ и убывает на $[-4; -2]$, $[1; 2]$, $[3; 4]$, $[6; 7]$.

20. а) нет; б) да, $y = -x^3$; в) нет; г) да, $y = x^3$.

21.

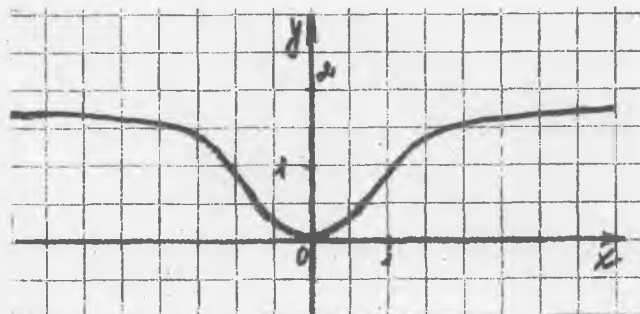


23.

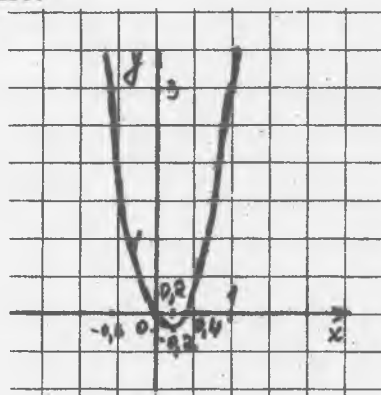


24. а) да; б) нет.

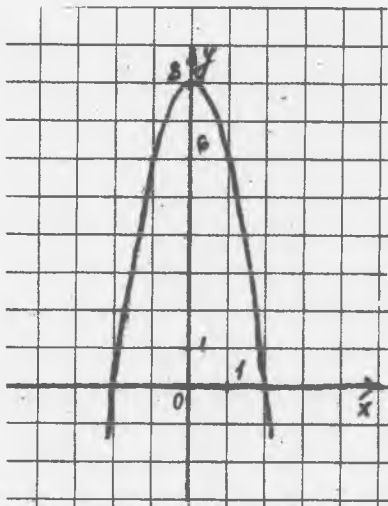
26.



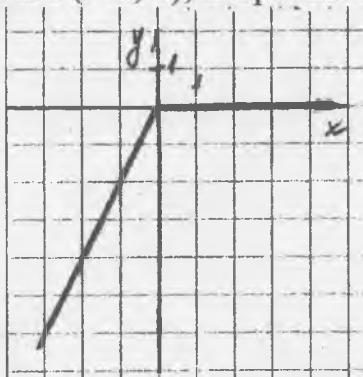
27. 1) $D(f): \mathbb{R}$; $E(f): [-0,2; +\infty)$; нечетная; нули функции: $x = 0$, $x = 0,4$; $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0,4; +\infty)$, $f(x) < 0$ при $x \in (0; 0,4)$; возрастает на $[0,2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0,2]$; при $x = 0,2$ $y = -0,2$ – наименьшее значение.



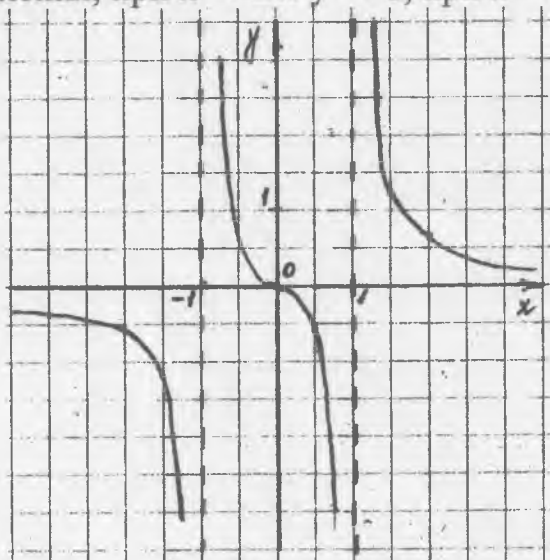
2) $D(f): \mathbb{R}$; $E(f): (-\infty; 6]$; четная; нули функции: $x = \pm 2$; $f(x) > 0$ при $x \in (2; 2)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; возрастает на $(-\infty; 0]$, убывает на $[0; +\infty)$; при $x = 0$ $y = 8$ – наибольшее значение



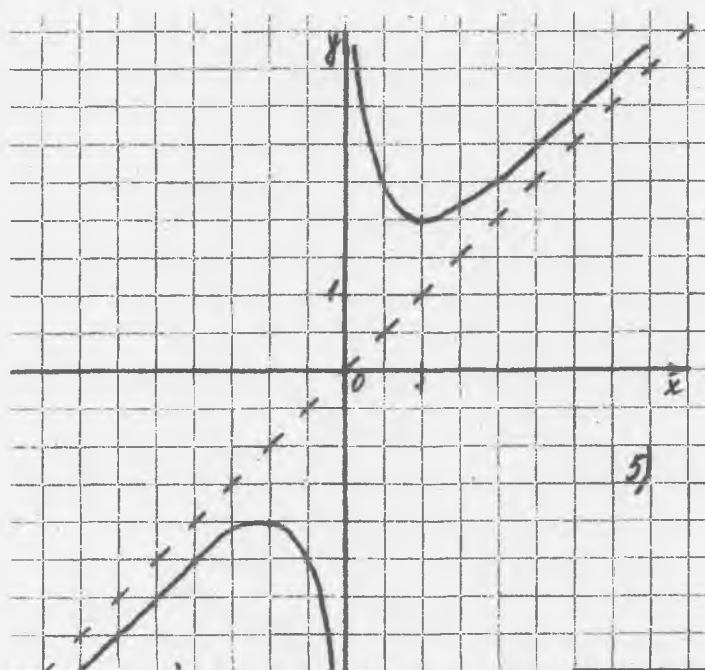
3) $D(f): \mathbb{R}$; $E(f): (-\infty; 0]$; ни четная ни нечетная; $y = 0$ при $x = 0$; $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$; возрастает на $(-\infty; 0]$.



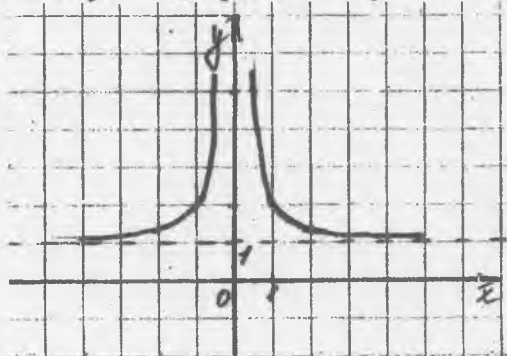
4) $D(f): x \neq \pm 1$; $E(f): \mathbb{R}$; нечетная; $y = 0$ при $x = 0$; $f(x) > 0$ при $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$; убывает на всей области определения; при $x \rightarrow \pm\infty$ $y \rightarrow 0$, при $x \rightarrow \pm 1$ $y \rightarrow \pm\infty$.



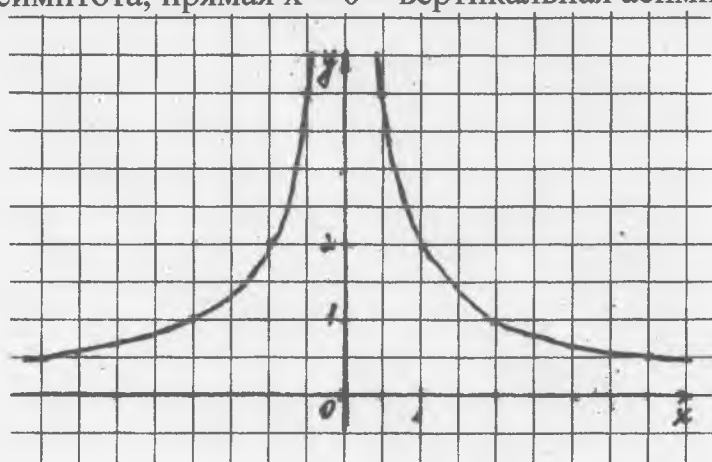
5) $D(f): (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E(f): (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; нечетная; нулей нет; $f(x) > 0$ при $x \in (0; +\infty)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$; возрастает на $(-\infty; 1]$ и $[1; +\infty)$, убывает на $[-1; 0)$ и $(0; 1]$; при $x \rightarrow +\infty$ $y \rightarrow +\infty$, при $x \rightarrow -\infty$ $y \rightarrow -\infty$, при $x \rightarrow 0$ $y \rightarrow \pm\infty$.



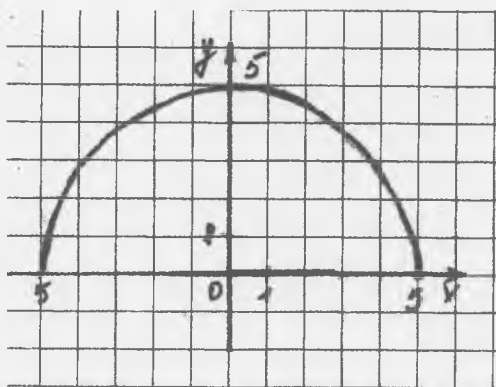
6) $D(f): (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E(f): [1; +\infty)$; четная; нулей нет; $f(x) > 0$ при всех допустимых значениях x ; возрастает на $(-\infty; 0]$, убывает на $[0; +\infty)$; при $x \rightarrow \pm \infty y \rightarrow 1$, при $x \rightarrow 0 y \rightarrow +\infty$.



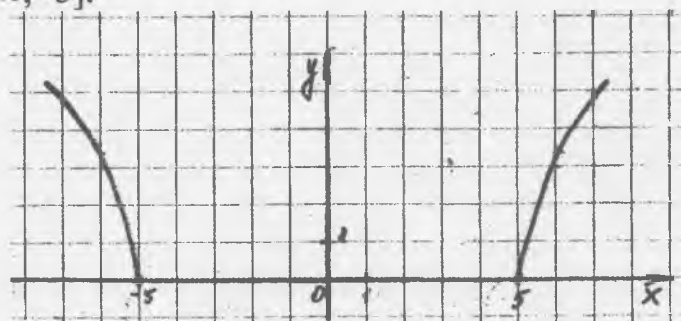
7) $D(f): (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E(f): (0; +\infty)$; нулей нет; $f(x) > 0$ на всей $D(f)$; возрастает на $(-\infty; 0)$, убывает на $(0; +\infty)$; прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота, прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота.



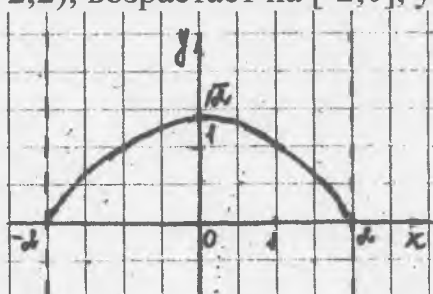
8) $D(f): [-5; 5]$; $E(f): [0; 5]$; четная; нули функции: $x = \pm 5$; $f(x) > 0$ на $(-5; 5)$; возрастает на $[-5; 0]$, убывает на $[0; 5]$; при $x = 0 y = 5$ – наибольшее значение.



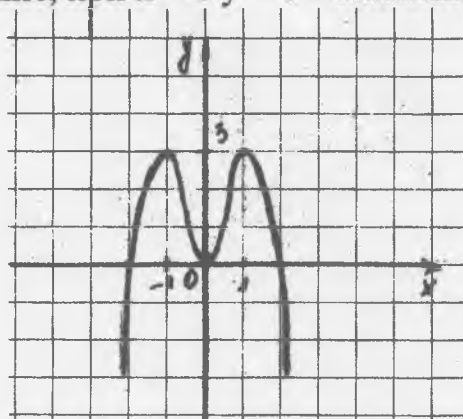
9) $D(f): (-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$; $E(f): [0; +\infty)$; четная; $y = 0$ при $x = \pm 5$; $f(x) > 0$ при $x \in (-5; 5)$; возрастает на $[5; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -5]$.



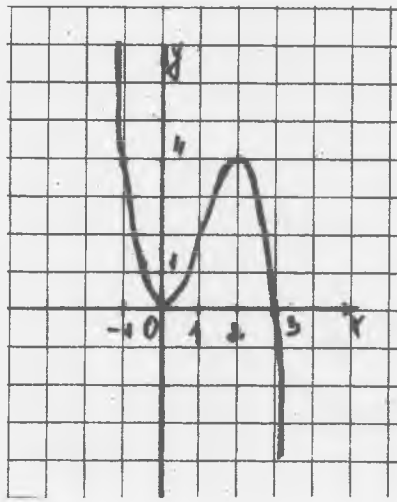
10) $D(f): [-2; 2]$; $E(f): [0; \sqrt{2})$; четная; $y = 0$ при $x = \pm 2$; $f(x) > 0$ при $x \in (-2; 2)$; возрастает на $[-2; 0]$, убывает на $[0; 2]$.



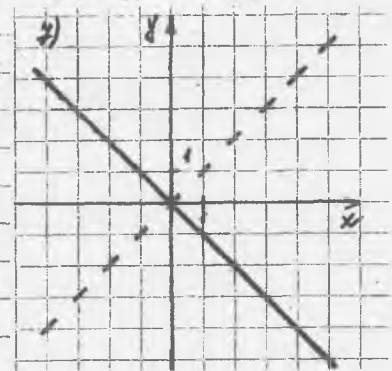
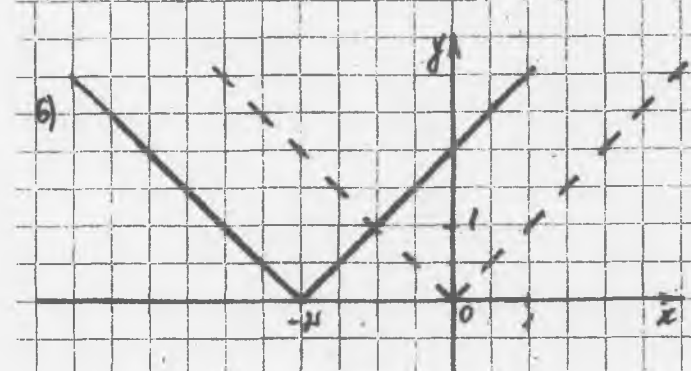
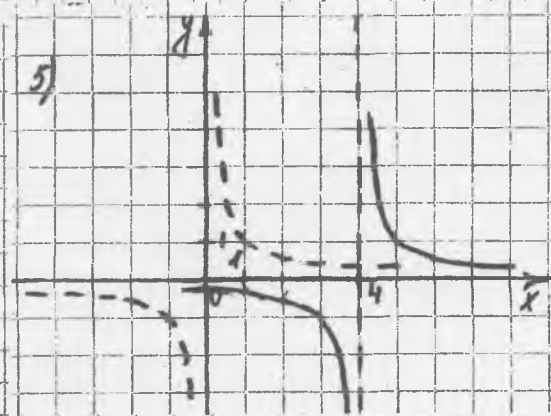
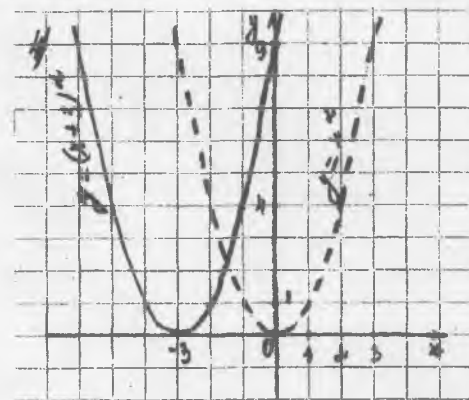
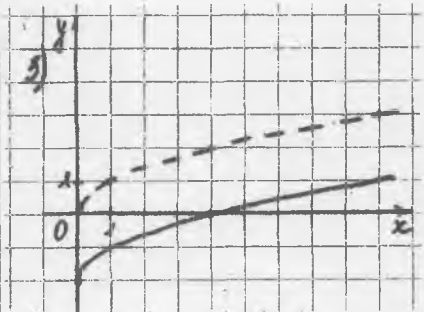
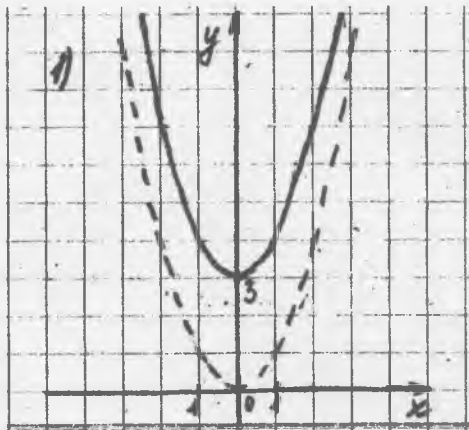
11) $D(f): \mathbb{R}$; $E(f): (-\infty; 3]$; четная; нули функции: $x = 0, \pm 2$; $f(x) > 0$ при $x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; возрастает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$, убывает на $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$; при $x = \pm 1$ $y = 3$ – наибольшее значение, при $x = 0$ $y = 0$ – наименьшее значение.

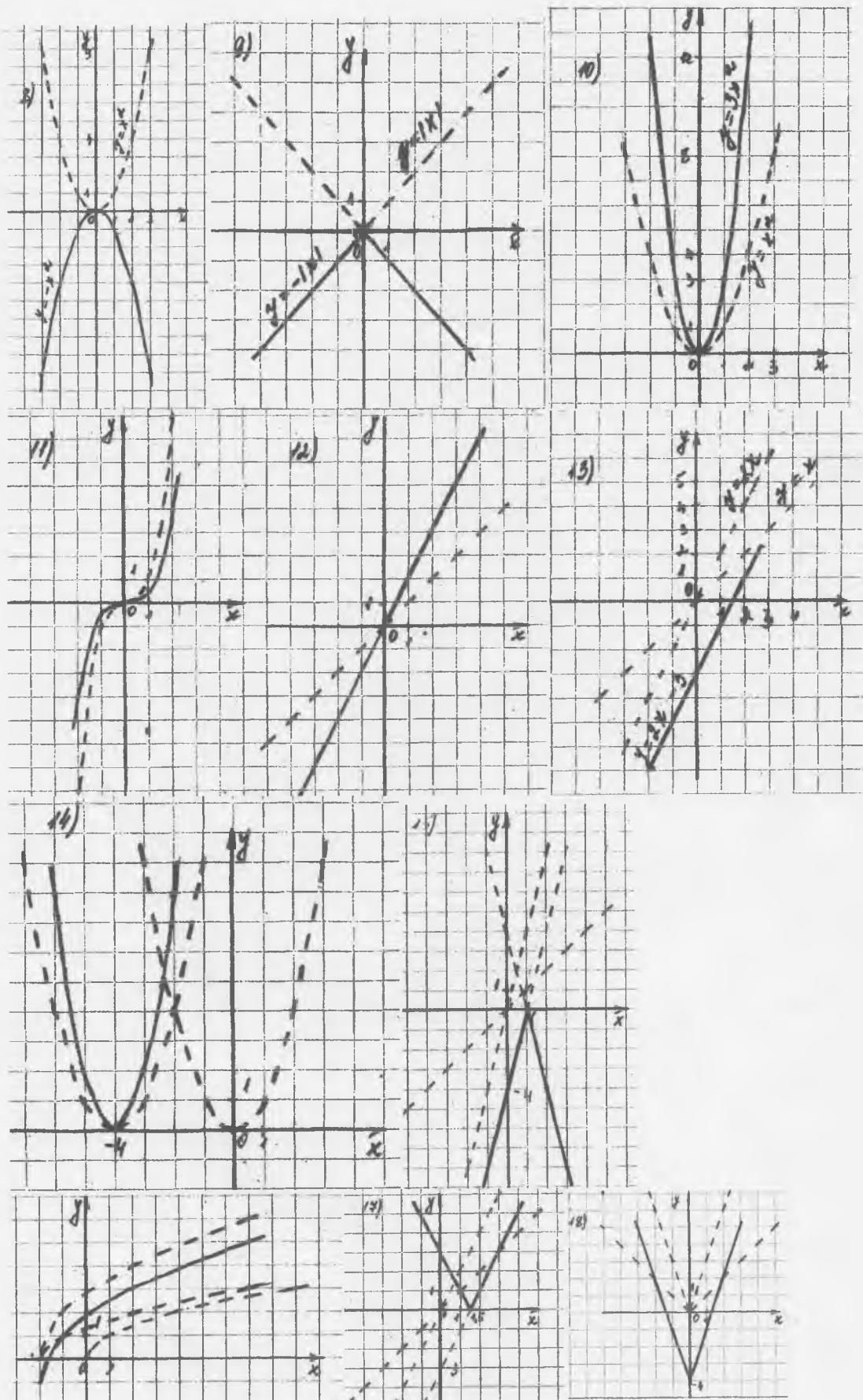


12) $D(f): \mathbb{R}$; $E(f): \mathbb{R}$; ни четная ни нечетная; нули функции: $x = 0$ и $x = 3$; $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$, $f(x) < 0$ при $x \in (3; +\infty) \cup (2; +\infty)$; возрастает на $[0; 2]$, убывает на $(-\infty; 0]$ и $[2; +\infty)$, при $x = 2$ $y = 4$ – наибольшее значение, при $x = 0$ $y = 0$ – наименьшее значение.

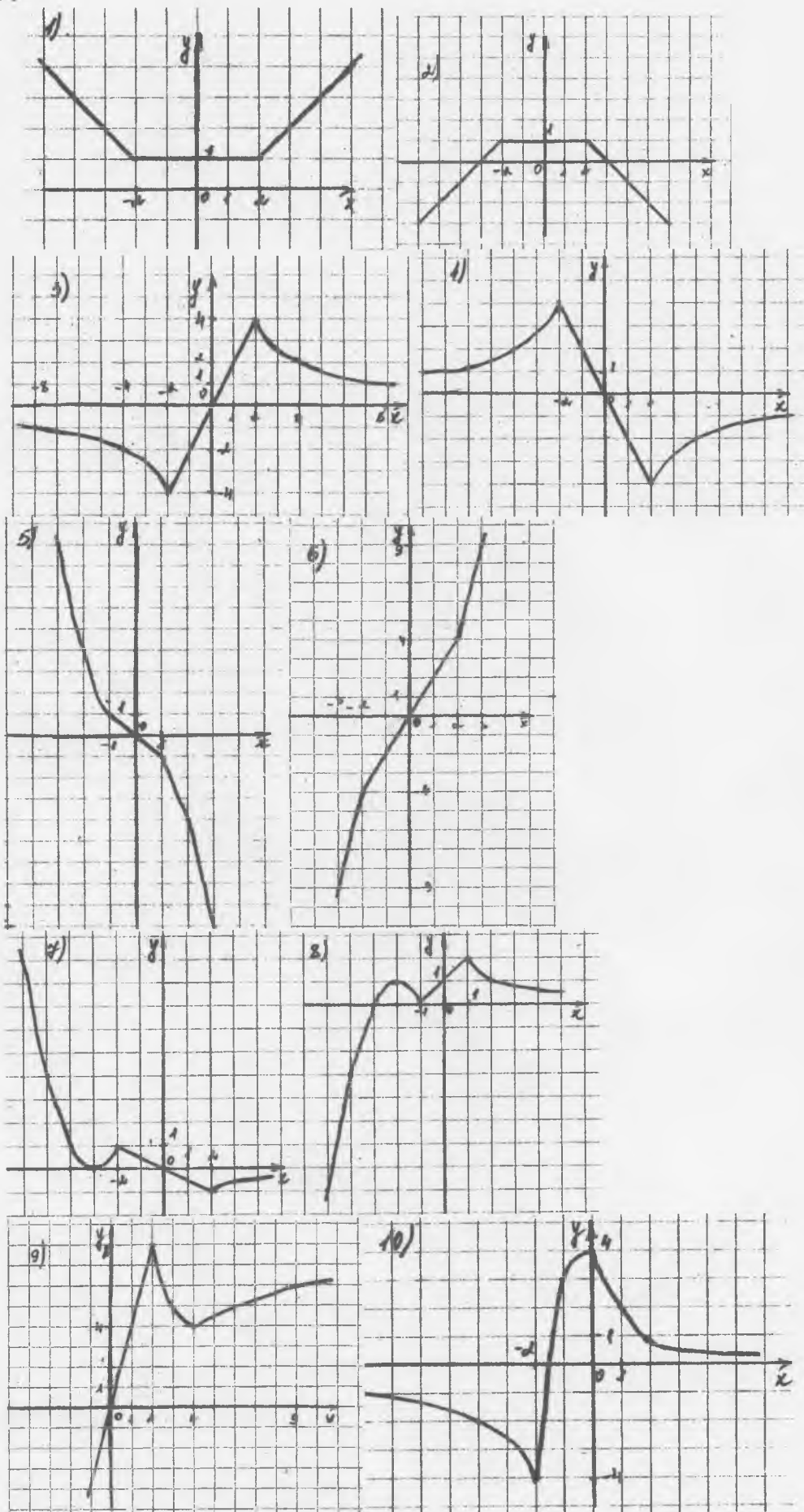


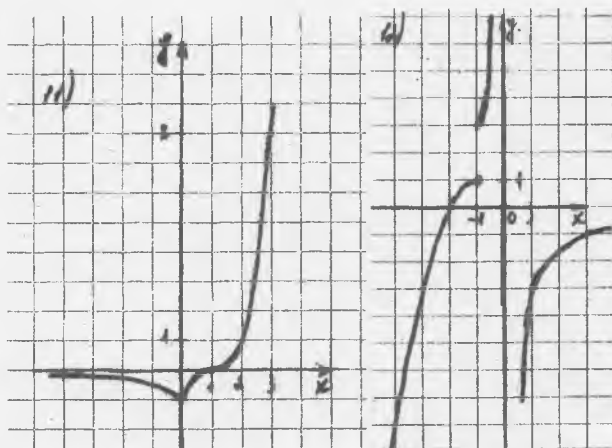
28.



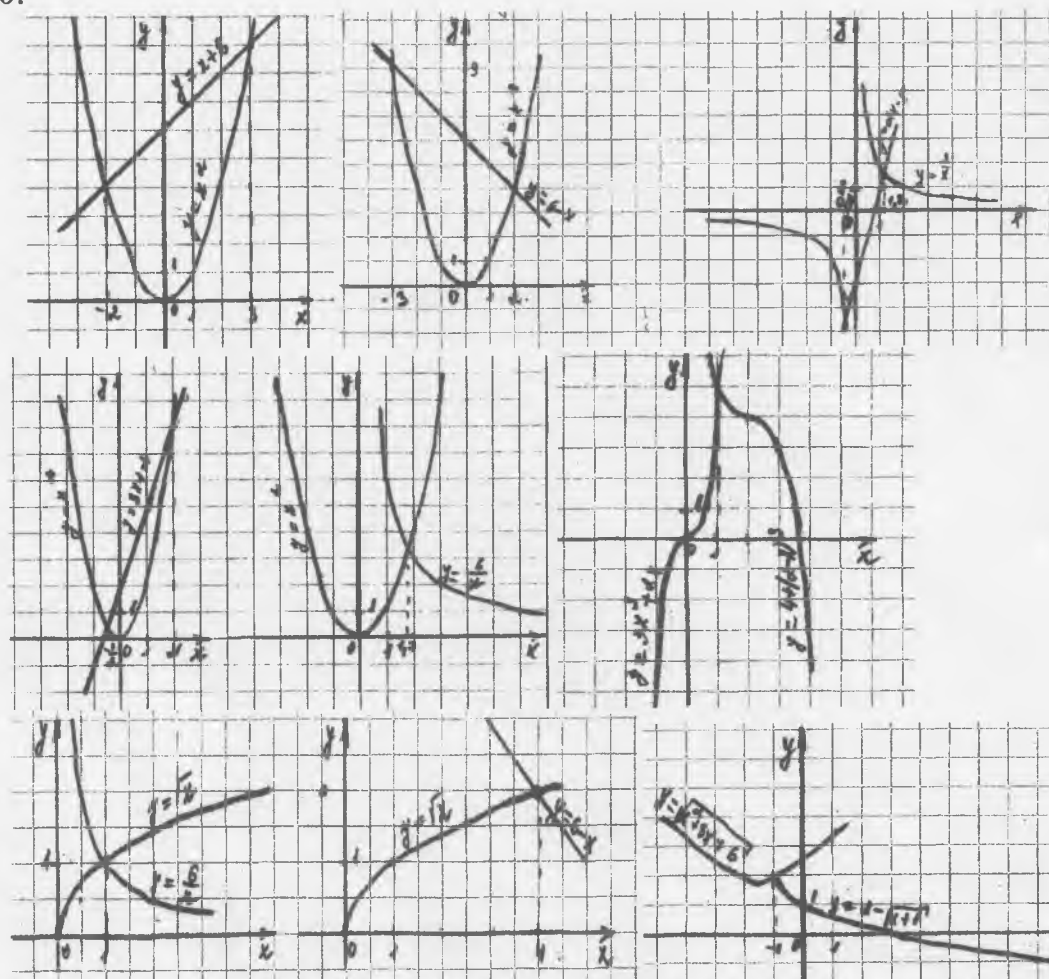


29.



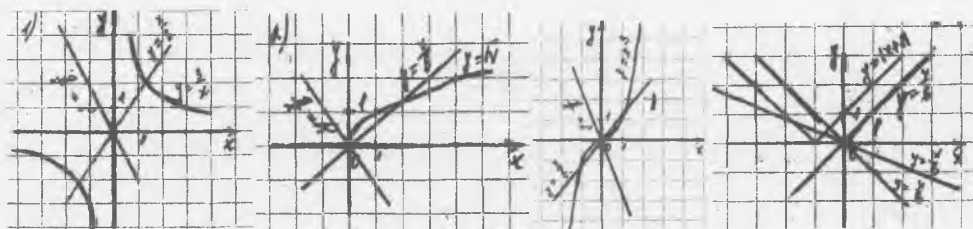


30.



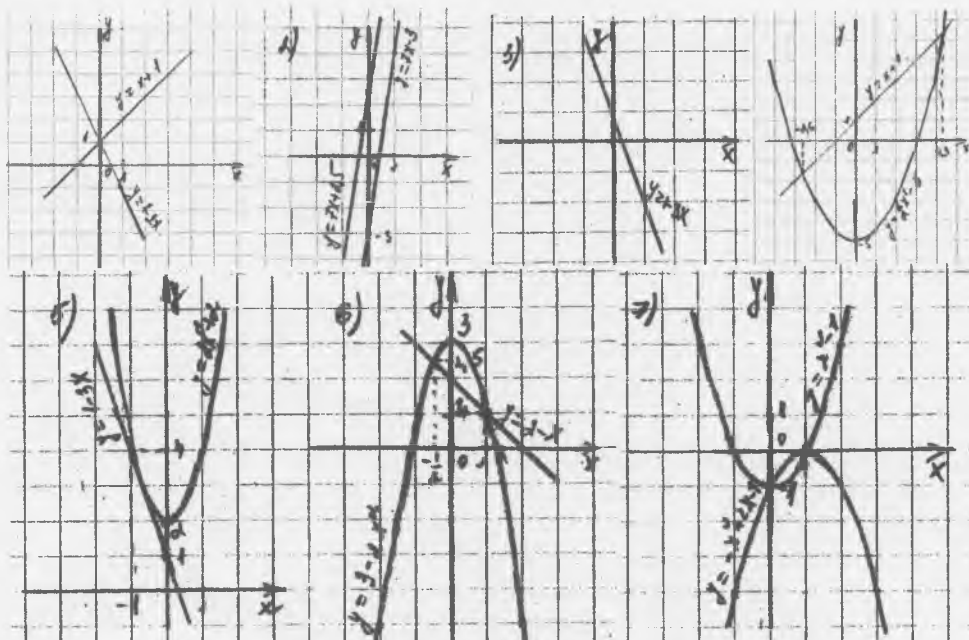
Ответ: 1) -2;3; 2) -3;2; 3) -0,5;2; 4) 1,7; 5) -0,4;1,2; 6) 1; 7) 4; 8) 1; 9) -1.

31.



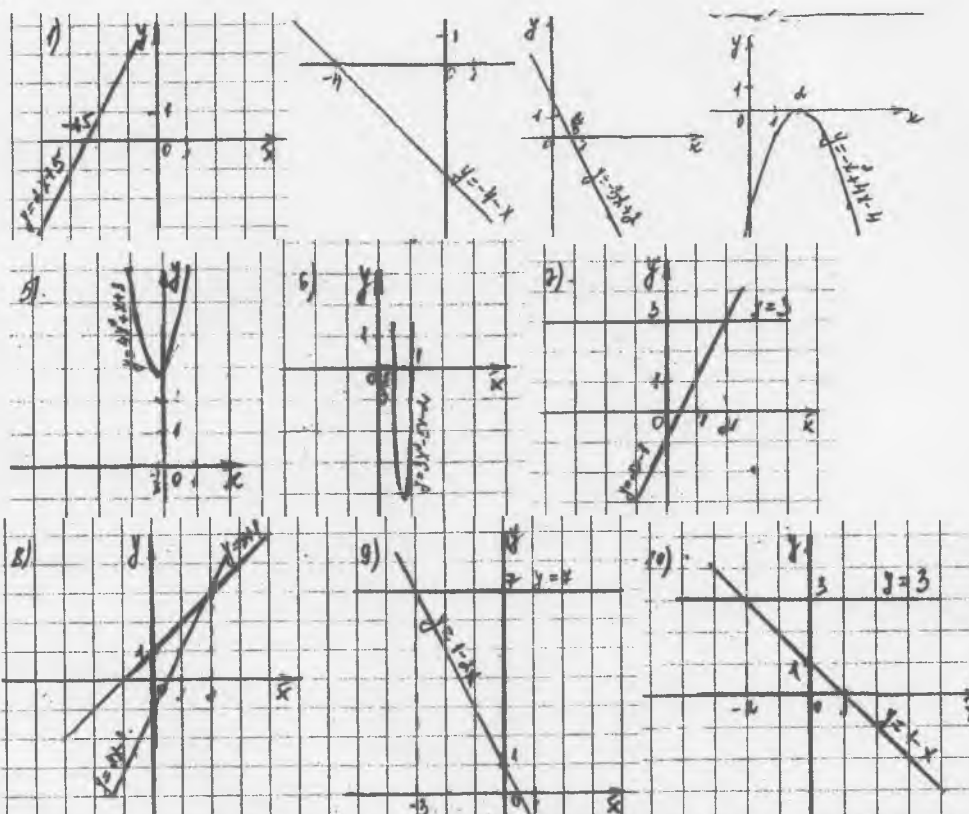
Ответ: 1) нет или 2; 2) 1 или 2; 3) 1 или 3; 4) нет, 1 или 2.

32.



Ответ: 1) (0;1); 2) нет решений; 3) бесконечно много; 4) (-2,6;-2,6) и (4,3;4,3); 5) (-1;4); 6) (-0,5;2,5); 7) (0;-1) и (1;0).

33.



Ответ: 1) $(-\infty; -2,5)$; 2) $(-\infty; -4)$; 3) $(2/3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; 5) \mathbb{R} ; 6) $(-\infty; 2/3) \cup (1; +\infty)$; 7) $(2; +\infty)$; 8) $(-\infty; 2)$; 9) $(-\infty; -3)$; 10) $(-2; +\infty)$.

34.

