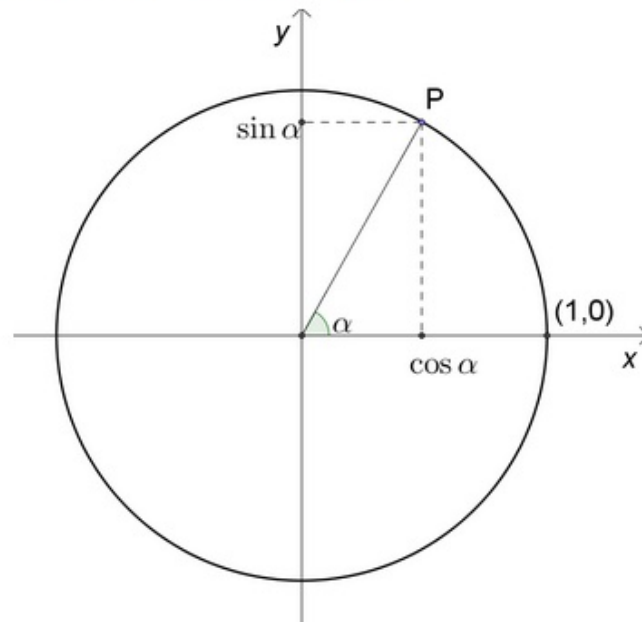


# Тригонометрические функции

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ

**Косинус** угла  $\alpha$  (обозначается  $\cos \alpha$ ) — это абсцисса точки  $P$ , полученной поворотом точки  $(1;0)$  на угол  $\alpha$  вокруг начала координат против часовой стрелки.



**Синус** угла  $\alpha$  (обозначается  $\sin \alpha$ ) — ордината той же точки  $P$ .

**Тангенс** угла  $\alpha$  (обозначается  $\operatorname{tg} \alpha$ ) — отношение синуса угла  $\alpha$  к его косинусу:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

**Котангенс** угла  $\alpha$  (обозначается  $\operatorname{ctg} \alpha$ ) — отношение косинуса угла  $\alpha$  к его синусу:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Тригонометрические функции основных углов					
$\alpha$ , градусы	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\alpha$ , радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

### ЧЕТНОСТЬ-НЕЧЕТНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

Косинус — четная функция, а синус, тангенс и котангенс — нечетные:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

### ПЕРИОДИЧНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

Синус и косинус — периодические функции с периодом  $2\pi$ , а тангенс и котангенс — с периодом  $\pi$ :

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha,$$

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg} \alpha.$$

# Тригонометрические функции суммы и разности

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}.$$

## Формулы двойного и тройного углов

### ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

### ФОРМУЛЫ ТРОЙНОГО УГЛА

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}.$$

## Формулы понижения степени тригонометрических функций

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2},$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

## Тригонометрические формулы приведения

$\sin \left( \alpha \pm \frac{\pi}{2} \right) = \pm \cos \alpha$	$\cos \left( \alpha \pm \frac{\pi}{2} \right) = \mp \sin \alpha$
$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin \alpha$	$\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \left( \alpha \pm \frac{\pi}{2} \right) = \mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \left( \alpha \pm \frac{\pi}{2} \right) = \mp \operatorname{tg} \alpha$

# Арк-функции

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ

**Арксинус** числа  $a \in [-1; 1]$  (обозначается  $\arcsin a$ ) – такое число  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  синус которого равен  $a$ , то есть

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}, \quad \sin(\arcsin a) = a.$$

Равенство  $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$  справедливо лишь при  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , хотя само выражение  $\arcsin(\sin \alpha)$  определено при всех действительных  $\alpha$ .

Функция арксинус является нечетной, а именно для  $a \in [-1; 1]$  справедливо равенство:

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a.$$

Таблица значений арксинуса

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ

**Аркосинус** числа  $a \in [-1; 1]$  (обозначается  $\arccos a$ ) – такое число  $\alpha \in [0; \pi]$ , косинус которого равен  $a$ , то есть

$$0 \leq \arccos a \leq \pi, \quad \cos(\arccos a) = a.$$

Равенство  $\arccos(\cos \alpha) = \alpha$  справедливо лишь при  $\alpha \in [0; \pi]$ , хотя само выражение  $\arccos(\cos \alpha)$  определено при всех действительных  $\alpha$ .

Функция арксинус не является ни четной, ни нечетной, однако для  $a \in [-1; 1]$  справедливо равенство:

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$

Таблица значений арккосинуса

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos a$	$\pi$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

**Связь между арксинусом и арккосинусом.** Для всех  $a \in [-1; 1]$  имеет место равенство:

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$$

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

**Арктангенс** числа  $a \in \mathbb{R}$  (обозначается  $\operatorname{arctg} a$ ) – такое число  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  тангенс которого равен  $a$ , то есть

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a.$$

Равенство  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha$  справедливо лишь при  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Функция арктангенс является нечетной, а именно для любого действительного  $a$  справедливо равенство:

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a.$$

Таблица значений арктангенса							
$a$	$-\sqrt{3}$	$-1$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$0$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$1$	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

## Простейшие тригонометрические уравнения

**УРАВНЕНИЕ  $\sin x = a$ :**

если  $a \in (-1; 1)$ , то множеством решений уравнения является

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

если  $a = 1$ , то корнями уравнения будут

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

а если  $a = -1$ , то корни

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

если же  $|a| > 1$ , то уравнение  $\sin x = a$  решений не имеет.

УРАВНЕНИЕ  $\cos x = a$ :

если  $a \in (-1; 1)$  то множеством решений уравнения является

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

если  $a = 1$ , то корнями уравнения будут

$$x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

а если  $a = -1$ , то корни

$$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

если же  $|a| > 1$ , то уравнение  $\cos x = a$  решений не имеет.

УРАВНЕНИЕ  $\operatorname{tg} x = a$ :

При любом действительном  $a$  множеством решений уравнения  $\operatorname{tg} x = a$  является

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

## Тригонометрические уравнения

ОДНОРОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ.

Уравнение вида

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \dots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0$$

называется *однородным относительно  $\sin x$  и  $\cos x$  степени  $n$* .

Разделив однородное уравнение на  $\cos^n x$  и сделав замену  $t = \operatorname{tg} x$ , приводим однородное тригонометрическое уравнение к алгебраическому:

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \dots + a_{n-1} t + a_n = 0.$$

При этом надо не забыть еще рассмотреть случай  $\cos x = 0$ , так как при делении на  $\cos x$  мы могли потерять соответствующие решения.



## ВВЕДЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО УГЛА.

Для решения уравнения вида  $a \cos \alpha + b \sin \alpha = c$ , где числа  $a$  и  $b$  отличны от нуля, применяется метод введения вспомогательного угла:

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha - \varphi),$$

где вспомогательный угол  $\varphi$  определяется из условий:

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Поэтому исходное уравнение равносильно следующему:

$$\cos(\alpha - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

## ЗАМЕНА $t = \sin x + \cos x$ .

Если в уравнение переменная  $x$  входит только в виде  $\sin x + \cos x$  или  $\sin x \cos x$ , то такое уравнение может быть сведено к алгебраическому заменой  $t = \sin x + \cos x$ . Действительно,

$$t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x.$$

Поэтому  $\sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$ .

Аналогично можно показать, что замена  $t = \sin x - \cos x$  сводит к алгебраическому уравнению тригонометрическое, зависящее только от  $\sin x - \cos x$  или  $\sin x \cos x$ .

## МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ.

Уравнения вида

$$\sin(ax + b) = \sin(cx + d),$$

$$\cos(ax + b) = \cos(cx + d)$$

решаются перенесением в одну сторону и применением формул разности синусов (или косинусов). В итоге получается произведение двух тригонометрических функций, которое должно быть равно нулю.



## Задача 1: Решение уравнения

Решите уравнение  $3\sin^2 x + 5\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$ . Выберите вариант правильного ответа.

21  
БАЛЛ

ИСПОЛЬЗОВАТЬ ПОДСКАЗКУ

-10.5 БАЛЛА

ПОПЫТКА 1/2

- ☐  $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- ☐  $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- ☐  $x = \pi \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- ☐  $x = \pi \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- ☐  $x = -\arctg 2 + \pi n, x = \arctg \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- ☐  $x = -\arctg 2 + 2\pi n, x = \arctg \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- ☐ уравнение не имеет решений

21  
БАЛЛ ЗА  
ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

## Задача 2: Решения на отрезке

Решите уравнение  $\cos^2 2x + \cos^2 4x = 1 + \operatorname{ctg} 6x$ . Сколько решений лежит на отрезке  $\left[ \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right]$ ?

### Задача 3: Система уравнений

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (5\sqrt{\sin x} - 1)(2y + 4) = 0. \end{cases}$$

Выберите вариант правильного ответа.

ИСПОЛЬЗОВАТЬ ПОДСКАЗКУ

- 7 БАЛЛОВ

21  
БАЛЛ

ПОПЫТКА 1/3

- ☐  $x = \pm \arcsin \frac{1}{25} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, y = -\frac{1}{25}$
- ☐  $x = \pm \arcsin \frac{1}{25} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, y = -\frac{1}{25}$
- ☐  $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{25} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, y = -\frac{1}{25}$
- ☐  $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{25} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, y = -\frac{1}{25}$
- ☐  $x = \pm \arcsin \frac{1}{25} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, y = -\frac{1}{25}; x = \pm \arcsin 2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, y = -2$
- ☐  $x = \pm \arcsin \frac{1}{25} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, y = -\frac{1}{25}; x = \pm \arcsin 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}, y = -2$
- ☐  $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{25} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, y = -\frac{1}{25}; x = (-1)^n \arcsin 2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, y = -2$
- ☐  $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{25} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, y = -\frac{1}{25}; x = (-1)^n \arcsin 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}, y = -2$

21  
БАЛЛ ЗА  
ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

### Задача 4: Сумма и разность.

Найдите количество решений системы

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 0, \\ \sin(x - y) = 0; \end{cases}$$

удовлетворяющих условиям  $0 \leq x, y \leq \pi$ .

### Задача 5: Логарифм, синус, косинус

Найдя третье по величине положительное число  $x$ , удовлетворяющее уравнению

$$2 - \log_{\sin x} \cos x = \log_{\cos x} \sin x.$$

В ответ укажите число  $y = \frac{8x}{\pi}$ .

## Задача 6: Система

Решите систему:

$$\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (2\sqrt{\sin x} - 1)(2y + 5) = 0 \end{cases}$$

В ответе запишите максимальный  $y$ .

## Прямые и плоскости в пространстве

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Прямая и плоскость называются **параллельными**, если они не имеют общих точек.

**Признак параллельности прямой и плоскости.** Если прямая, принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

### ТЕОРЕМА О ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.

**Признак параллельности плоскостей.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

### УТВЕРЖДЕНИЕ

Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны по длине.

### УТВЕРЖДЕНИЕ

Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

# Параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Прямые, которые не пересекаются и не являются параллельными, называются **скрещивающимися**.

## АКСИОМА

Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.

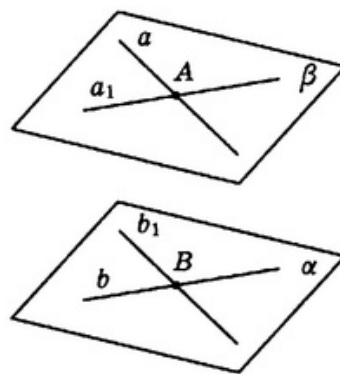
**Признак скрещивающихся прямых.** Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а вторая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещиваются.

## ТЕОРЕМА

Через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость так, чтобы эти плоскости были параллельны.

### 🕒 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть прямые  $a$  и  $b$  скрещиваются. Возьмем на прямой  $a$  точку  $A$  и проведем через нее прямую  $a_1$ , параллельную прямой  $b$ . Через прямые  $a$  и  $a_1$  проведем плоскость  $\alpha$ . Аналогично построим плоскость  $\beta$ . По признаку параллельности плоскостей  $\alpha \parallel \beta$ .



# Перпендикулярность прямой и плоскости

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Прямая называется **перпендикулярной** плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

## ТЕОРЕМА (ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ)

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть прямая  $p$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $a$  и  $b$ , лежащим в плоскости  $\alpha$ . Докажем, что любая прямая  $c$ , лежащая в плоскости  $\alpha$ , перпендикулярна прямой  $a$ .

Рассмотрим направляющие векторы прямых  $\vec{p}, \vec{a}, \vec{b}$  — векторы, изображаемые направленными отрезками  $\overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$ , причём точки лежат на соответствующих прямых. Тогда  $\overrightarrow{PP_1} \perp \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}$ . Прямые  $a$  и  $b$  пересекаются, поэтому векторы  $\overrightarrow{AA_1}$  и  $\overrightarrow{BB_1}$  неколлинеарны, а значит образуют базис плоскости  $\alpha$ . По теореме о разложении по базису, так как вектор  $\vec{c}$  изображается направленным отрезком, лежащим в плоскости  $\alpha$ , существуют такие числа  $\lambda, \mu$ , что  $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ . Умножим скалярно обе части равенства на вектор  $\vec{p}$ . Воспользуемся дистрибутивностью и линейностью скалярного произведения:  $(\vec{c}, \vec{p}) = \lambda(\vec{a}, \vec{p}) + \mu(\vec{b}, \vec{p})$ . Так как  $\vec{p} \perp \vec{a}, \vec{b}$ , то правая часть равна нулю. Значит, и левая часть равна нулю.  $(\vec{c}, \vec{p}) = |\vec{c}| \cdot |\vec{p}| \cdot \cos \angle(\vec{c}, \vec{p})$ . Так как  $|\vec{c}|, |\vec{p}| \neq 0$  то угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$  равен  $\frac{\pi}{2}$ , что и требовалось доказать.

Можно доказать, что для прямой  $a$  и точки  $A$  существует единственная плоскость содержащая точку  $A$  и перпендикулярная прямой  $a$ . В предыдущем предложении можно заменить слово "плоскость" на слово "прямая" и наоборот и оно останется верным.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Прямая, перпендикулярная плоскости, называется **перпендикуляром** к этой плоскости. Прямая, не перпендикулярная плоскости и пересекающая её, называется **наклонной** к этой плоскости.



# Теорема о трех перпендикулярах

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ

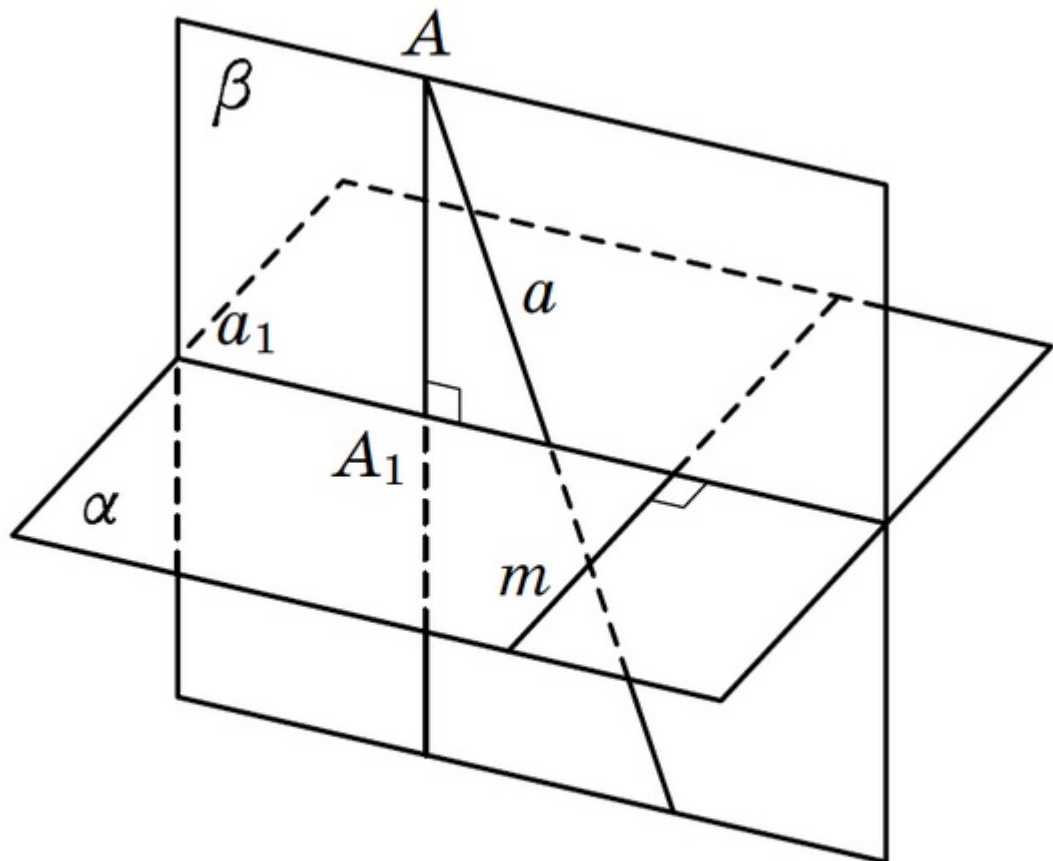
Параллельное проектирование, при котором направление проектирования перпендикулярно плоскости проектирования, называют **ортогональным** проектированием. Проекция при ортогональном проектировании называется **ортогональной** проекцией.

## ТЕОРЕМА (О ТРЁХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ)

Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость.

### ⊕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть прямая  $m$  лежит в плоскости  $\alpha$ ,  $a$  — наклонная,  $a_1$  — её проекция на плоскость  $\alpha$ , прямая  $AA_1$  — перпендикуляр к  $\alpha$ . Точки  $A, A_1 \in a_1, A \in a$ . Так как прямая  $AA_1 \perp \alpha$ , то  $AA_1 \perp m$ . Проведём через прямые  $a$  и  $a_1$  плоскость  $\beta$ .



Пусть  $m \perp a_1$ . Тогда, поскольку  $m \perp AA_1$ , по признаку перпендикулярности прямой и плоскости  $m \perp \beta$ , и, следовательно,  $m \perp a$ .

Обратно, если  $m \perp a$ , то, поскольку  $m \perp AA_1$ , имеем  $m \perp \beta$ , следовательно,  $m \perp a_1$ .

# Углы в пространстве

**Определение.** Углом между двумя скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся.

## Расстояния в пространстве

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на эту плоскость.

## Многогранники

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

**Многогранник** — это тело, ограниченное конечным числом плоскостей. Эти плоскости, пересекаясь, образуют **грани** многогранника — многоугольники. Стороны этих многоугольников называются **рёбрами** многогранника, а концы рёбер — его **вершинами**.

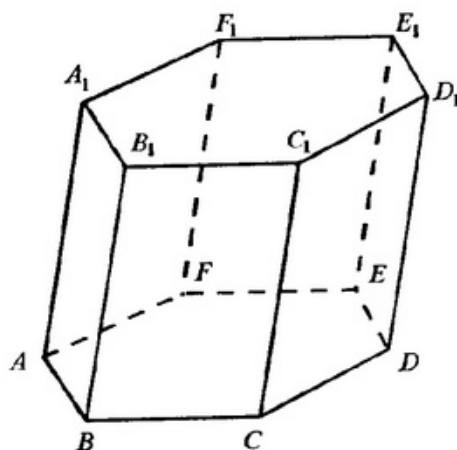
Отрезки, соединяющие две вершины и не лежащие в одной грани, называются **диагоналями** многогранника. Многогранник **выпуклый**, если все его диагонали расположены внутри него.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

**Призма** — это многогранник, две грани которого (**основания** призмы) — равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, с соответственно параллельными сторонами, а остальные грани (**боковые** грани) — параллелограммы.

**Высота** призмы — это любой перпендикуляр, опущенный из любой точки основания на плоскость другого основания.





В зависимости от многоугольника, лежащего в основании, призма может быть, соответственно, *треугольной, четырехугольной, пятиугольной, шестиугольной* и т. д.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Если боковые ребра призмы перпендикулярны плоскости основания, то такая призма называется **прямой**.

Остальные призмы называются **наклонными**.

#### УТВЕРЖДЕНИЕ

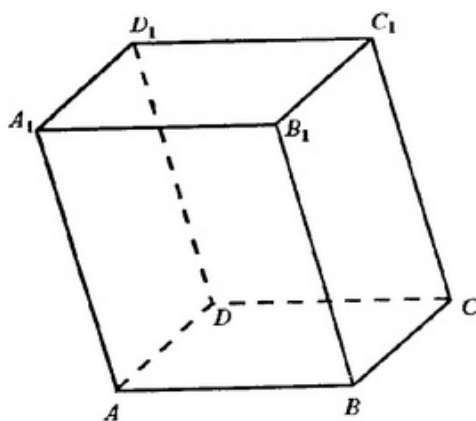
Все боковые грани прямой призмы — прямоугольники.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

Если в основании прямой призмы лежит правильный многоугольник, то такая призма называется **правильной**.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

**Параллелепипед** — это призма, основания которой — параллелограммы.



**Свойства параллелепипеда:**

1. Параллелепипед имеет шесть граней и все они — параллелограммы.
2. Противоположные грани параллелепипеда попарно равны и параллельны.
3. У параллелепипеда четыре диагонали; они все пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

Параллелепипед, у которого все шесть граней — прямоугольники, называется **прямоугольным**.

**УТВЕРЖДЕНИЕ**

Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны. Длина диагонали прямоугольного параллелепипеда  $d$  и длины его попарно перпендикулярных ребер  $a$ ,  $b$ ,  $c$  связаны соотношением:  
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

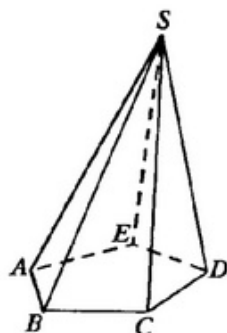
Прямоугольный параллелепипед, все грани которого — квадраты, называется **кубом**.

#### УТВЕРЖДЕНИЕ

Все ребра куба равны.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

**Пирамида** — это многогранник, у которого одна грань (**основание** пирамиды) — это произвольный многоугольник, а остальные грани (**боковые** грани) — треугольники с общей вершиной, называемой **вершиной** пирамиды.

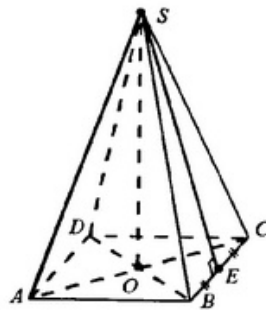


Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на ее основание, называется **высотой** пирамиды.

В зависимости от многоугольника, лежащего в основании, пирамида может быть, соответственно, *треугольной, четырехугольной, пятиугольной, шестиугольной* и т. д.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Пирамида называется **правильной**, если в основании лежит правильный многоугольник, а ее высота падает в центр основания.



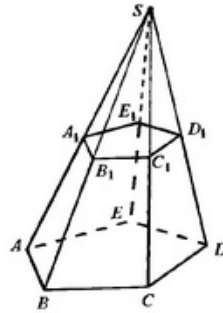
Высота боковой грани называется **апотемой** правильной пирамиды.

#### УТВЕРЖДЕНИЕ

Все боковые ребра правильной пирамиды равны; все боковые грани — равнобедренные треугольники.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

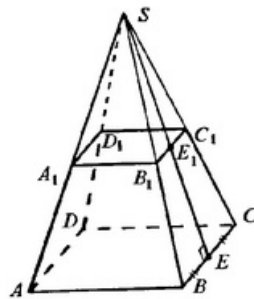
**Усеченной пирамидой** называется часть пирамиды, заключенная между плоскостью основания и плоскостью, параллельной основанию и пересекающей все боковые ребра пирамиды.



Параллельные грани усеченной пирамиды называются **основаниями**; расстояние между ними — **высотой** усеченной пирамиды.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Усеченная пирамида называется **правильной**, если пирамида, из которой она была получена, правильная.



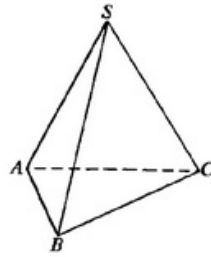
Высота боковой грани называется **апофемой** правильной усеченной пирамиды.

#### УТВЕРЖДЕНИЕ

Все боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобокие трапеции.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

**Тетраэдром** называется треугольная пирамида.



#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

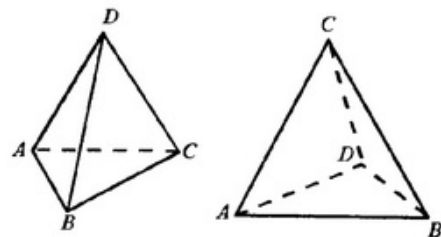
**Правильным** называется тетраэдр, у которого все грани — равные правильные треугольники.

## Сечения многогранников

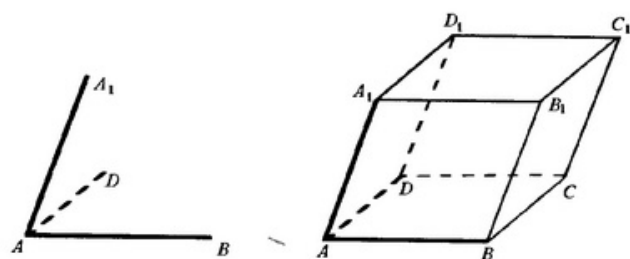
#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

**Изображением** фигуры называется любая фигура, подобная какой-нибудь параллельной проекции данной фигуры на некоторую плоскость.

1. *Изображение треугольника.* Изображением треугольника может служить любой треугольник. В частности, изображением равностороннего треугольника может служить произвольный разносторонний треугольник.
2. *Изображение параллелограмма.* Изображением параллелограмма (в частности, прямоугольника, ромба, квадрата) может служить любой параллелограмм.
3. *Изображение тетраэдра.* Изображением тетраэдра может служить любой четырехугольник (в том числе и невыпуклый) с проведенными в нем диагоналями.
4. *Изображение параллелепипеда.* Для изображения параллелепипеда нужно изобразить произвольным образом три ребра, выходящих из одной вершины. Дальнейшее построение осуществляется однозначно, так как каждое из оставшихся ребер равно и параллельно какому-то из ребер, которое уже изображено.







Сечения выпуклых многогранников	
Плоскость может не пересекать многогранник	Иметь с ним одну общую точку (вершину многогранника)
Пересекать его по отрезку (ребру многогранника)	Пересекать его по многоугольнику

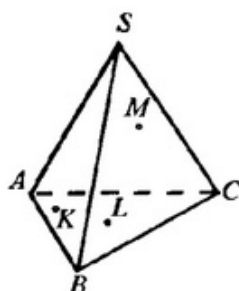
#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

В последнем случае говорят, что многоугольник является **сечением** многогранника плоскостью, а эту плоскость называют **секущей плоскостью**.

Отметим, что здесь мы рассмотрели взаимное расположение плоскости и выпуклого многогранника. Если многогранник не выпуклый, то плоскость может пересекать его по более сложным фигурам.

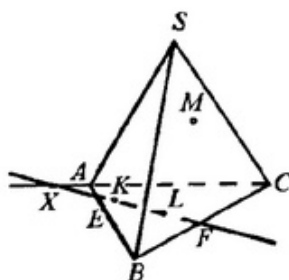
### ПРИМЕР

Построить сечение пирамиды  $SABC$  плоскостью, проходящей через точки  $K$ ,  $L$  и  $M$ , где  $K \in AB$ ,  $L \in BC$ , а  $M \in SC$ .

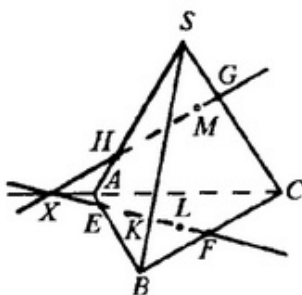


### РЕШЕНИЕ

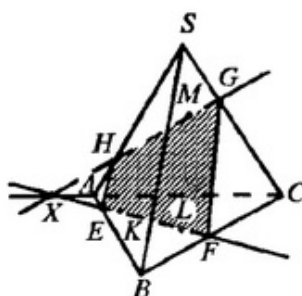
Для решения этой задачи построим линии пересечения секущей плоскости с гранями пирамиды (эти линии называются следами секущей плоскости). Пусть плоскость сечения  $\alpha$  уже построена. Так как плоскости  $ABC$  и  $\alpha$  имеют две общие точки  $K$  и  $L$ , то они пересекаются по прямой  $KL$ .



Проведем прямую  $KL$  до пересечения с отрезками  $AB$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$ . Пусть эта прямая пересекает прямую  $AC$  в точке  $X$ .



Далее рассуждаем аналогично. Плоскости  $ASC$  и  $\alpha$  имеют две общие точки  $X$  и  $M$ , то они пересекаются по прямой  $XM$ . Проведем прямую  $XM$  до пересечения с отрезками  $SA$  и  $SC$  в точках  $H$  и  $G$ .



Соединяя точки  $G$  и  $F$ , лежащие в одной грани  $BCS$ , получаем сечение  $EFGH$ , единственность которого следует из аксиом.

## Задача 1: Правильная пирамида

$ABCD$  — правильная треугольная пирамида со стороной основания  $AB = 2$  и высотой  $DH = 4$ . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки  $D$ ,  $C$  и  $M$ , где  $M$  — середина стороны  $AB$ , и найдите квадрат его площади.

## Задача 2: Куб

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите угол между прямой  $AB_1$  и плоскостью  $ABC_1$ . Ответ выразите в градусах.

## Задача 3: Шестиугольная призма

В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми  $AB_1$  и  $BE_1$ . Ответ напишите в градусах.

## Задача 4: Правильная пирамида

В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра равны 1. Найдите косинус угла  $\varphi$  между плоскостями  $ABC$  и  $BCS$ . В ответ напишите величину  $\frac{1}{\cos^2 \varphi}$ .

## Задача 5: Четырехугольная пирамида

Дана четырехугольная пирамида  $SABCD$ , основание которой прямоугольник  $ABCD$ . Известно, что  $SB \perp ABC$ ,  $AS = \sqrt{3}$ ,  $SD = \sqrt{7}$ , а  $\angle SAB = 30^\circ$ . Найдите периметр  $ABCD$ .

## Задача 6: Расстояния в кубе

Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , все рёбра основания которой равны  $2\sqrt{7}$ . Сечение, проходящее через боковое ребро  $AA_1$  и середину  $M$  ребра  $B_1C_1$  является квадратом. Найдите расстояние между прямыми  $A_1B$  и  $AM$ . В поле ответа укажите квадрат найденного расстояния в виде десятичной дроби.