

Удивительный мир чисел

Выполнила: Цыденова Туя,
ученица 8 класса ГБОУ «Средняя
общеобразовательная школа-интернат
№3»

Руководитель: Белькова Ольга
Александровна, учитель математики
ГБОУ «Средняя общеобразовательная
школа-интернат №3»

2013г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
О числе.....	4
Простые числа	5
1. Решето Эратосфена.....	5
2. «Узоры» простых чисел.....	5
3. Простые числа как значения квадратных трехчленов	7
4. Наибольшее известное простое число.....	11
5. Числа - близнецы.....	12
6. Числа, вызывающие интерес	13
7. Интересные числа	14
. Заключение.....	15
Список использованных источников.....	16
Приложения	17

«Сущность вещей есть число, которое вносит во
все единство и гармонию. Все есть число".
- древнегреческий математик Пифагор

Введение

Возникновение чисел в нашей жизни не случайность. Невозможно представить себе общение без использования чисел. История чисел увлекательна и загадочна. Человечеству удалось установить целый ряд законов и закономерностей мира чисел, разгадать кое-какие тайны и использовать свои открытия в повседневной жизни. Без замечательной науки о числах - математики - немыслимо сегодня ни прошлое, ни будущее. А сколько ещё неразгаданного!

"Самые древние по происхождению числа - натуральные. "Ручейки" натуральных чисел, сливаясь, порождают безбрежный океан вещественных и разного рода особых специальных чисел", так писал о числах Б.А.Кордсмский в своей книге "Удивительный мир чисел". [5,С34]

Предметом моего исследования являются натуральные удивительные числа и их свойства.

В школе я провела исследование и выяснила, что многие ребята слышали об этих числах, но подробную информацию знают единицы. 32 из 48 опрошенных учащихся 5-8 классов хотели бы узнать об этих числах больше. Предлагаемая работа является результатом поиска удивительных и необычных чисел, проведенного по различным источникам, в том числе по литературным и историческим.

Объект исследования - натуральные числа.

Предмет исследования - простые числа и их свойства.

Гипотеза: Вели простые числа - это «кирпичики», из которых строятся все натуральные числа, то, «перекладывая» их, можно подучить удивительные «числовые сооружения».

Цель исследования: Познакомиться с удивительными числами и установить их свойства и закономерности в изменении других чисел.

Задачи исследования:

1. Установить ряд свойств, законов и закономерностей простых чисел.
2. Установить связь простых чисел со значениями квадратного трехчлена.
3. Найти числа, выраженные простыми числами.

Основными методами исследования видов чисел являются изучение и обработка источников, проведение практических экспериментов некоторых свойств чисел, систематизация данных.

Многие ученые математики делали великие открытия в мире чисел. О некоторых экспериментальных открытиях, проведенных мною, я и хочу рассказать.

О числе

Число является одним из основных понятий математики. Понятие числа развивалось в тесной связи с изучением величин, эта связь сохраняется и теперь. Существует большое количество определений понятия "число". О числах первый начал рассуждать Пифагор. Пифагору принадлежит высказывание "Всё прекрасно благодаря числу".[3, С.89]. По его учению число 2 означало гармонию, 5 - цвет, 6 —холод, 7 - разум, здоровье, 8 -любовь и дружбу. А число 10 называли "священной четверицей", так как $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Оно считалось священным числом и олицетворяло всю Вселенную. [4, С.44]

Первое научное определение числа дал Евклид в своих "Началах": "Единица есть то, в соответствии, с чем каждая из существующих вещей называется одной. Число есть множество, сложенное из единиц".[9, С.23]. Так определял понятие числа и русский математик Магницкий в своей "Арифметике" (1703 г.).

Считается, что термин "натуральное число" впервые применил римский государственный деятель, философ, автор трудов по математике и теории музыки Боэций (480 - 524 гг.), но еще греческий математик Никомах из Геразы говорил о натуральном, то есть природном ряде чисел.

Понятием "натуральное число" в современном его понимании последовательно пользовался выдающийся французский математик, философ-просветитель Даламбер (1717-1783 гг.).

Долго и трудно человечество добиралось до 1-го уровня обобщения чисел. Сто веков понадобилось, чтобы выстроить ряд самых коротких натуральных чисел от единицы до бесконечности: 1, 2, ... ∞ . Натуральных потому, что ими обозначались реальные неделимые объекты: люди, животные, вещи. Самос трудное было придумать нуль. Его придумали намного веков позже, чем другие цифры. Первая, точно датированная запись, в которой встречается знак нуля, относится к 876 г.

Простые числа

II. 1. Простые числа. Решето Эратосфена

Простые числа можно обнаружить только путем долгих кропотливых расчетов. Недавно было найдено простое число, содержащее 25692 цифры! Чтобы доказать, что оно простое, быстродействующему компьютеру потребовалось несколько недель. Простые числа используют в секретных шифрах, а я воспользуюсь простыми числами для отыскания удивительных чисел.

Каждое натуральное число, большее единицы, делится, по крайней мере, на два числа: на 1 и на само себя. Если ни на какое другое натуральное число оно нацело не делится, то называется простым, а если у него имеются ещё какие-то целые делители, то составным. Единица же не считается ни простым числом, ни составным.

Небольшую "коллекцию" простых чисел можно составить старинным способом, придуманным ещё в 3 в. до п. э. Эратосфеном Киренским, хранителем знаменитой Александрийской библиотеки. Выписывая подряд идущие натуральные числа, начиная с 2, и зачеркивая составные, получим

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

"решето Эратосфена".

А вообще я рассмотрела простые числа до 8000. А также попыталась рассмотреть некоторые закономерности и свойства простых чисел. Некоторые из них проверила экспериментально, используя компьютер. В таблице все простые числа в интервале (1; 8000).¹

II. 2. «Узоры» простых чисел

В зависимости от расположения натуральных чисел простые числа могут образовывать тот или иной узор. Удобнее всего работать на интерактивной доске. Построим квадрат, а в центре запишем 1, далее будем записывать все натуральные числа, двигаясь по спирали против часовой стрелки. Выделим все простые числа. Заметим, что

¹Приложение 1. таблица простых чисел в интервале

простые числа с поразительным упорством выстраиваются вдоль прямых. В представленной таблице показано, как выглядела спираль со ста первыми числами (от 1 до 100).

197	196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185	184	183
198	145	144	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134	133	182
199	146	101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	132	181
200	147	102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90	131	180
201	148	103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89	130	179
202	149	104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88	129	178
203	150	105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87	128	177
204	151	106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86	127	176
205	152	107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85	126	175
206	153	108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84	125	174
207	154	109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83	124	173
208	155	110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	123	172
209	156	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	171
210	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225

Вывод: Простые числа стремятся располагаться в цепочки вдоль диагоналей. А вот так выглядят «узоры» простых чисел:

II. 3. Простые числа как значения квадратных трехчленов

Рассмотрим квадратные трехчлены $x^2 + x + 1$ и $x^2 - x + 1$. Найдутся значения данных квадратных трехчленов для x из отрезка $[-10; 10]$. Данные внесем в таблицу:

x		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x^2 + x + 1$	1	3	7	13	21	31	43	57	73	91	111
$x^2 - x + 1$	1	1	3	7	13	21	31	43	57	73	91

x	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10
$x^2 + x + 1$	1	3	7	13	21	31	43	57	73	91
$x^2 - x + 1$	3	7	13	21	31	43	57	73	91	111

Сравним значения с данными таблицы, в которой записаны натуральные числа по спирали от 1:

```

197 196 195 194 193 192 191 190 189 188 187 186 185 184 183
198 145 144 143 142 141 140 139 138 137 136 135 134 133 182
199 146 101 100 99 98 97 96 95 94 93 92 91 132 181
200 147 102 65 64 63 62 61 60 59 58 57 90 131 180
201 148 103 66 37 36 35 34 33 32 31 56 89 130 179
202 149 104 67 38 17 16 15 14 13 30 55 88 129 178
203 150 105 68 39 18 5 4 3 12 29 54 87 128 177
204 151 106 69 40 19 6 1 2 11 28 53 86 127 176
205 152 107 70 41 20 7 8 9 10 27 52 85 126 175
206 153 108 71 42 21 22 23 24 25 26 51 84 125 174
207 154 109 72 43 44 45 46 47 48 49 50 83 124 173
208 155 110 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 123 172
209 156 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 171
210 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170
211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225

```

Заметим, что значения данных (указаны синим цветом) квадратных трехчленов располагаются по диагонали от 1 и являются простыми числами.

Покажем, что закономерность проявляется для других квадратных трехчленов². Рассмотрим квадратные трёхчлены $4x^2 + 2x + 17$ и $4x^2 - 2x + 17$. Найдём значения квадратных трехчленов:

x	0	1		3	-1	-2	-3
$4x^2+2x+17$	17	23	37	59	19	29	47
$4x^2-2x+17$	17	19	29	47	23	37	59

Рассмотрим таблицу натуральных чисел, записанных по спирали от числа 17:

53	52	51	50	49	48	47
54	33	32	31	30	29	46
55	34	21	20	19	28	45
56	35	22	17	18	27	44
57	36	23	24	25	26	43
58	37	38	39	40	41	42
59	60	61	62	63	64	65

Заметим что, подставляя в первый трехчлен положительные значения x , получаем нижнюю половину диагонали, подставляя отрицательные значения — верхнюю, а во втором случае - наоборот. Если рассмотреть всю диагональ и переставить простые числа в порядке возрастания, то окажется (и это приятный сюрприз), что все числа описываются более простой формулой $x^2 + x + 17$.

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2+x+17	17	19	23	29	37	47	59
x^2-x+17	17	17	19	23	29	37	47

Таким образом, диагонали, заполненные простыми числами, порождаемыми квадратичными трёхчленами $4x^2 + 2x + 17$ и $x^2 + x + 17$ представляют одну и ту же прямую. Проверим еще один квадратный трехчлен $x^2 + x + 4$.

Составим таблицу значений:

x	0	1	2	3	4	5	-1	-2	-3	-4	-5	6	7	8	9	10	-6	-7
$x^2 + x + 4$	4	6	10	16	24	34	4	6	10	16	24	46	60	76	94	114	34	46

Рассмотрим таблицу:

104		102	101	100	99	98	97	96	95	94
105	68	67	66	65	64	63	62	61	60	93
106	69	40	39	38	37	36	35	34	59	92
107	70	41	20	19	18	17	16	33	58	91
108	71	42	21	8	7	6	15	32	57	90
109	72	43	22	9	4	5	14	31	56	89
110	73	44	23	10	11	12	13	30	55	88

²Приложение2. Экспериментальный расчёт. Простые число как значения квадратных трёхчленов.

111	74	45	24	25	26	27	28	29	54	87
112	75	46	47	48	49	50	51	52	53	86
113	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124

В этом случае, значения данного квадратного трехчлена расположены по диагонали, но они не являются простыми.

Самый знаменитый квадратичный **трёхчлен Эйлера**, производящий простые числа, $x^2 + x + 41$, получится, если начать спираль с числа 41.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2+x+41	41	43	47	53	61	71	83	97	113

57 56 55 54 **53**
 58 45 44 **43** 52
 59 46 **41** 42 51
 60 **47** 48 49 50
61 62 63 64 65

Этот трёхчлен позволяет получить 40 последовательных простых чисел, заполняющих всю диагональ квадрата 40*40! Давно известно, что из 2398 первых значений, принимаемых этим трёхчленом, ровно половина простые. Перебрав все значения знаменитого трёхчлена, не превышающие 10 000 000, Улам, Стейн и Уэллс обнаружили, что доля простых чисел среди них составляет 0,475... [6, С.14]. Математикам очень бы хотелось открыть формулу, позволяющую получать при каждом целом x различные простые числа, но пока такой формулы обнаружить не удалось. Может быть, её и не существует.

Сверяя значения квадратного трёхчлена с таблицей простых чисел, делаю вывод,

1. Действительно значения расположены по диагонали.
2. Многочлен $x^2 + x + 41$ принимает простые значения при $x = 1, 2, \dots, 40$. Начиная с $x = 41$ и далее, его значения — составные числа. (Проверено экспериментально, данные занесены в таблицу. Расчеты произведены в редакторе Microsoft Excel).

x	x^2+x+41
1	43
2	47
3	53
4	61
5	71
6	83
7	97
8	113
9	131
10	151
11	173
12	197
13	223
14	251

15	281
16	313
17	347
18	383
19	421
20	461
21	503
22	547
23	593
24	641
25	691
26	743
27	797
28	853
29	911
30	971
31	1033
32	1097
33	1163
34	1231
35	1301
36	1373
37	1447
38	1523
39	1601
40	1681
41	1763
42	1847
43	1933
44	2021
45	2111
46	2203
47	2297
48	2393
49	3491
50	2591
51	2693
52	2797

Рассматривая произвольные значения a, b, c квадратного трехчлена, замечаю, что значения трехчлена располагаются в таблице уже произвольно (обозначения по цвету).

a	b	c	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4	5	6	7	8
1	1	1	1	3	7	13	21	1	3	7	13	31	43	57	73
2	1	1	1	4	11	22	37	2	7	16	29	56	79	106	137
2	2	1	1	5	13	25	41	1	5	13	25	61	85	113	145
3	4	1	1	8	21	40	65	0	5	16	33	96	133	176	225
5	7	1	1	13	35	67	109	-1	-7	25	53	161	223	295	337

101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
[106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82

В дальнейшем предстоит решить проблемы уже выявленных фактов: Каково множество тех многочленов, значение которых являются числами и лежат вдоль диагонали, если спираль начата с некоторого числа u , и каковы значения a, b, c квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, значения которого простые числа?

II.4. Наибольшее известное простое. Закономерности некоторых простых чисел.

Издавна ведутся записи, отмечающие наибольшие известные на то время простые числа. Один из рекордов поставил в своё время Эйлер, найдя простое число $2^{31} - 1 = 2147483647$. [8, С. 137]

Наибольшее известным простым числом по состоянию на ноябрь 2011 года является $2^{43112609} - 1$. Оно содержит 12 978 189 десятичных цифр и является простым числом Мерсенна ($M_{43112609}$). Его нашли 23 августа на математическом факультете университета UCLA в рамках проекта по распределённому поиску простых чисел Мерсенна GIMPS. [10, сайт EFF].

Кстати, за нахождение простых чисел из более чем 100 000 000 и 1 000 000 000 десятичных цифр EFF (Electronic Frontier Foundation (EFF), Фонд Электронных Рубежей) назначил денежные призы соответственно в 150 000 и 250 000 долларов США.

И ещё один факт: если в простое число 999997600699 в начало, конец и между каждой парой цифр добавить одинаковые нечётные цифры: 1, 3, 7 или 9, полученное число будет простым.

Подставляя, получим 1919191919171610101619191,
3939393939373630303639393,7979797979777670707679797,

9999999999979690909699999- простые числа (проверили через компьютер по таблице простых чисел).

И ещё одгна закономерность: рассматривая простые числа, заметила, что все без исключения простые числа в диапазоне до 1000 могут быть представлены в виде суммы двух рядом стоящих натуральных чисел, например:

$$17=8+9$$

$$29=14+15$$

$$61=30+31$$

Данная закономерность проверена экспериментально (использование компьютера, Microsoft Excel). Таблица представлена в приложении

k	$6k-1$	$3k-1$	
1	5	2	3
2	11	5	6
3	17	8	9
4	23	11	12
5	29	14	15

k	$6k+1$	$2k+(k-1)+1$	
1	7	3	4
2	13	6	7
3	19	9	10
5	31	15	16
6	37	18	19
7	43	21	22

5. Числа - близнецы

Два простых числа, которые отличаются на 2, как 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, получили название "близнецы". Используя таблицу простых чисел в интервале (1;8000) мною они были найдены.⁴

Конечно или бесконечно множество чисел-близнецов неизвестно. Близнецы в натуральном ряду простых чисел появляются без какой-либо периодичности, но чем больше числа, тем реже близнецы встречаются.

3,5	101,103	227,229	311,313	419,421	521,523	617,619	809,811	1151,1153
5,7	107,109	239,241	347,349	431,433	569,571	641,643	821,823	
11,13	137,139	281,283		461,463	599,601	659,661	827,829	
17,19	149,151						857,859	
29,31	179,181						881,883	
41,43	191,193							
59,61	197,199							
71,73								

В натуральном ряду имеется даже "тройня" - это числа 3, 5, 7. Близнецы могут собираться в скопления, образуя четверки, например, (5, 7, 11, 13) или (11, 13, 17, 19). Как много таких скоплений - тоже пока неизвестно.

³ Приложение 3. таблица 2, Представление простого числа в виде суммы двух рядом стоящих натуральных чисел.

⁴ Приложение 4. Таблица 3. Числа - близнецы.

Замечены и другие скопления чисел-близнецов: (3,5,7,11,43,17,19), (101,103,107,109), (137Д39Д49Л51)... Но какой-либо зависимости в их расположении также не просматривается.

Для чисел-близнецов закономерны следующие свойства, которые проверены экспериментально:

1. Каждую пару, начиная с чисел больших 3, можно выразить формулой $p=6k-1$ и $q=6k+1$. (если числа-близнецы)

k	p	q
1	5	7
2	11	13
3	17	19
4	23	
5	29	31
6		37
7	41	43
8	47	
9	53	
10	59	61

2.. Суммы чисел-близнецов делятся на 2, на 3, на 4, на 6, на 12. Показать можно, используя вышеназванные формулы: $p+q = 6k-1+6k+1 = 12k/2, 3, 4, 6, 12$.

3. Все числа-близнецы — нечетные числа..

4. Произведение тройки — близнецов равно числу Шахиризады.

$$1001=7*11*13$$

5. Покажем, что $(p^p + q^q) / (p + q)$ (вычисления произведены на компьютере)

p	q	p^p	q^q	$p + q$	$p^p + q^q$	частное
3	5	27	3125	8	3152	394
5	7	3125	823543	12	826668	68889
11	13	2,85E+11	3,03E+14	24	3,03E+14	1,26+13
17	19	8,27E+20	1,98E+24	36	1,98E+24	5,5E+22
29	31	2,57E+42	1,71E+46	60	1,71E+46	2,85E+44
41	43	1,33E+66	1,73E+70	84	1,73E+70	2,06E+68
59	61	3E+104	8E+108	120	8E+108	6,7E+106

Числа, вызывающие интерес.

1. Интересные числа

1. Число 666

666 является суммой квадратов первых семи простых чисел:

$$2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2 = 666$$

Разделим число 2012 (нынешний год) на число 666. В результате в целой части будет 3, далее после запятой идёт 0, а затем будут цифры 2, 1, 0, 2, т.е. само число 2012, записанное наоборот! $2012 / 666 = 3,02102...$

2. Число Шахиршады

Число Шахиризады - простое число 1001, которое фигурирует в заглавии бессмертных сказок "Тысяча и одна ночь". С точки зрения математики число 1001 обладает целым рядом интереснейших свойств: например, 1001 состоит из 77 злополучных чертовых дюжин ($1001 = 13 * 77$).

$$1001 = 91 * 11$$

$$1001 = 143 * 7$$

$$1001 = 7 * 11 * 13 \text{ (произведение тройки - близнецов).}$$

А если умножить 1001 на любое трехзначное число, то результат будет состоять из умноженного числа, записанного дважды.

$$1001 * 124 = 124124$$

$$1001 * 456 = 456456$$

$$1001 * 678 = 678678$$

$$1001 * 987 = 987987$$

$$1001 * 485 = 485485$$

Далее, если будем считать, что год равняется 52 неделям, то 1001 - количество ночей в течение года.

3. Число года

В конкурсных заданиях по математике вызывают интерес числа года: 2009, 2010, 2011, 2012.

- Число 2009 раскладывается на простые множители следующим образом:

$$2009 = 7 * 7 * 41$$

- Число 2009 входит в Пифагоровы тройки взаимно-простых чисел: (2009; 2018040; 2018041), (2009; 41160; 41209), (360; 2009; 2041)

- 2009-е простое число равно 17471, это палиндром, оно одинаково читается как справа налево, так и слева направо

- Число 2010 раскладывается на простые множители следующим образом. $2010 = 2 * 3 * 5 * 67$

- Число 2010 представляется в виде суммы двух простых чисел 84-мя способами.

$$\text{Например, } 2010 = 7 + 2003 = 11 + 1999 = 13 + 1997 = \dots = 991 + 1019$$

- Представимо оно и в виде разности простых чисел, например: $2010 = 2017 - 7 = 2027 -$

$$17 = 2029 - 19 \text{ и т.д.}$$

Список используемой литературы

1. Берман Г.Н. Число и наука о нем. Общедоступные очерки. Москва: Гос. издание технико - технической литературы, 1984.
2. Гейзер Г.И.. История математики в школе. Пособие для учителей. - М.: Просвещение, 1981.
3. Депман И.Я. Мир чисел. Рассказы о математике. Ленинград "Детская литература" 1988.
4. Депман И.Я., Виленкин Н.Я. За страницами учебника математики. Пособие для учащихся 5-6 классов. Издательство "Просвещение" 1989.
5. Кардемский Б.А. Удивительный мир чисел.- М.: Просвещение, 1999.
6. Карпеченко Е Тайны чисел .Математика/ Прил. К газете "Первое сентября" №13 2007.
7. Крылов А.Н. Числа и меры. Математика/ Прил. К газете "Первое сентября" №7 1994
8. Перельман Я.И.. Живая математика. Математические рассказы и головоломки. М: Триада - литера 1994.
9. Савин А.П. и др Я познаю мир. Детская энциклопедия: Математика.: - М.: ООО "Издательство АСТ", 2001.
10. Internet ресурсы