

Министерство образования и науки Республики Бурятия
Кяхтинское районное управление образованием
Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Кяхтинская средняя общеобразовательная школа №3»

*Районная научно-практическая конференция
школьников «Шаг в Будущее»*

Секция: «Математика»

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Автор работы: Дабаева Марина
Руководитель: Нимаева Людмила Бимбаевна

Кяхта
2016г

Оглавление

Введение	3
1. Интересные факты о Пифагоре.....	4
2. Х ронология развития теоремы Пифагора.....	6
3. Доказательство теоремы Пифагора.....	9
4. Примеры применения теоремы Пифагора на практике.....	13
5. Заключение.....	15

Введение

Трудно найти человека, у которого имя Пифагора не ассоциировалось бы с теоремой Пифагора. Даже те, кто в своей жизни далек от математики, продолжают сохранять воспоминания о «пифагоровых штанах». Причина такой популярности ясна: это простота - красота – значимость. В самом деле, теорема Пифагора проста, но не очевидна. Противоречие двух начал и придает ей особую притягательную силу и делает ее красивой. Но, кроме того, теорема Пифагора имеет огромное значение. Она применяется в геометрии на каждом шагу. С глубокой древности математики находят все новые и новые доказательства теоремы Пифагора, все новые и новые замыслы ее доказательств. Стремление к преумножению их числа сохранилось. Думаю, что самостоятельное «открытие» доказательств теоремы Пифагора было бы полезно и современным школьникам. В школьной программе, дается один вид доказательства этой теоремы. Книга рекордов Гиннеса называет теорему Пифагора теоремой с максимальным числом доказательств. И поясняет, в 1940 году была, опубликована книга, которая содержала триста семьдесят доказательств теоремы Пифагора, включая одно предложенное президентом США Джеймсом Абрамом Гарфилдом.

На самом деле существует много способов доказательства теоремы Пифагора: доказательство Евклида, Хоукинса, Вальдхейма, способ «луночками» Гиппократы, доказательство Басхары, Эпштейна, Нильсена, Бетхера, Перигаля, Гутхейля, векторное доказательство и многие другие. Цель моей работы: выявить различные способы доказательств теоремы Пифагора. Для достижения цели мною были поставлены следующие задачи:

- поиск и изучение учебной, научной литературы по данной теме;
- анализ, обобщение, систематизация собранного материала;
- сделать выводы по работе.

При работе над докладом мною были использованы следующие методы: анализа, синтеза, сравнения и систематизации.

Результаты данной работы могут быть использованы, на мой взгляд, при проведении математических вечеров, подготовке к научным конференциям, для расширения кругозора учащихся не только в области изучения геометрии, но и истории.

Интересные факты о Пифагоре

«Жизнь подобна игрищам: иные приходят на них состязаться, иные — торговать, а самые счастливые — смотреть».

Пифагор.

Пифагор Самосский — философ, математик, религиозный и политический деятель, родился в VI веке до н.э. в г. Регия на острове Самос (остров в Эгейском море — территория Греции). С юного возраста Пифагор тянулся к знаниям и путешествиям. В 18 лет он покинул родной остров и отправился в чужие края. Он побывал на Востоке в Египте, Вавилоне и Финикии. В самом Египте, он прожил около 22 лет, где по некоторым данным постигал тайные эзотерические учения жрецов — «посвященных», а так же изучал астрономию, математику и другие науки. Специально для этого Пифагор выучил египетский язык. В Вавилон Пифагор попал в качестве пленника персидского царя Камбиза, который завоевал Египет в 525 г. до н.э., там он прожил 12 лет. На 50-м году жизни он наконец-то вернулся в родное отечество на остров Самос. К его сожалению, там его ждали плохие новости: на острове власть захватил тиран Поликрат. Тогда ему пришлось покинуть родной город и удалиться в Южную Италию — г. Кротон. Именно здесь Пифагор стал таким знаменитым, сделал свои открытия, основал Пифагорейскую школу, или еще ее называют философское братство, в котором было около 1900 учеников и последователей его учения.

В научных достижениях Пифагор прославился своей теоремой: «квадрат гипотенузы треугольника равен сумме квадратов катетов», а также учениями о числах. Он развил теорию о четности и нечетности числа, изучил свойства целых чисел, создал теорию пропорций, внес большой вклад в развитие планиметрии. Кстати, из его теории о четности числа он вывел, что каждая вещь подобно числам имеет в себе две противоположности: «предел» и «беспределное», а примирение или уравнивание этих двух противоположностей он назвал «гармонией». Пифагор считал, что секрет всего сущего на земле состоит в числах, одним из его высказываний было: «Бог — это число чисел, числу же все подобно». Ему первому принадлежит идея о том, что Вселенная и Земля имеют шарообразную форму (подобны сфере), а планеты (включая Землю) осуществляют движение вокруг центрального огня, так называемого «источника света». Пифагор — это не имя, а прозвище, данное ему за то, что он высказывал истину так же постоянно, как дельфийский оракул («Пифагор» значит «убеждающий речью»). Пифагор уделял большое значение физическим упражнениям, был олимпийским чемпионом по кулачному бою.

Вся жизнь Пифагора окутана тайной, достоверно сказать, как именно умер Пифагор, невозможно. Описание смерти Пифагора его ученики и философы тех времен приводят противоречивые. Одни говорят, что он погиб в Метапонте, когда кто-то из знакомых ему людей поджег дом, в котором он находился со своими учениками. Когда Пифагор выбежал из горящего дома, у него была возможность скрыться вместе с остальными, но он остановился и сказал: «Лучше смерть, чем прослыть пустословом». Его настигли и убили, с ним же погибло около сорока его учеников. По другим данным, Пифагор умер от истощения в метапонтском святилище Муз «Сорок дней ничего не евши» (Дикеарх). Есть и еще одна версия, в которой говорится о том, что Пифагор был убит в уличной схватке, во время народного восстания. Где здесь правда, а где ложь, уже не разобраться, вся его жизнь поросла легендами и былинами.

Хронология развития теоремы Пифагора

№	Историческое место	дата
1	Древний Китай (математическая книга Чу-пей)	~2400 г. до н. э.
2	Древний Египет (<i>гарпедонапты</i> или "натягиватели веревок")	2300 г. до н. э.
3	Вавилон (Хаммураби)	2000 г. до н. э.
4	Древняя Индия (сборник Сульвасутра)	600 г. до н. э.
5	Пифагор	570 г. до н. э.

1. Исторический обзор начнем с **древнего Китая**. Здесь особое внимание привлекает математическая книга Чу-пей. В этом сочинении так говорится о пифагоровом треугольнике со сторонами 3, 4 и 5: *"Если прямой угол разложить на составные части, то линия, соединяющая концы его сторон, будет 5, когда основание есть 3, а высота 4"*. Как свидетельствуют летописи, в Древнем Китае уже около 2200 года до н.э. для треугольника со сторонами 3, 4, 5 было найдено правило «гоу-гу», с помощью которого можно было по известным гипотенузе и одному из катетов находить другой неизвестный катет, а также гипотенузу.

2. Кантор (крупнейший немецкий историк математики) считает, что равенство $3^2 + 4^2 = 5^2$ было известно уже **египтянам** еще около 2300 г. до н. э., во времена царя Аменемхета I (согласно папирусу 6619 Берлинского музея). По мнению Кантора *гарпедонапты*, или "натягиватели веревок", строили прямые углы при помощи прямоугольных треугольников со сторонами 3, 4 и 5. Очень легко можно воспроизвести их способ построения. Возьмем веревку длиной в 12 м. и привяжем к ней по цветной полоске на расстоянии 3м. от одного

конца и 4 метра от другого. Прямой угол окажется заключенным между сторонами длиной в 3 и 4 метра. Гарпедонаптам можно было бы возразить, что их способ построения становится излишним, если воспользоваться, например, деревянным угольником, применяемым всеми плотниками. И действительно, известны египетские рисунки, на которых встречается такой инструмент, например рисунки, изображающие столярную мастерскую.

3. Несколько больше известно о теореме Пифагора у вавилонян. В одном тексте, относимом ко времени Хаммураби, т. е. к 2000 г. до н. э., приводится приближенное вычисление гипотенузы прямоугольного треугольника. Отсюда можно сделать вывод, что в Двуречье умели производить вычисления с прямоугольными треугольниками, по крайней мере в некоторых случаях. Основываясь, с одной стороны, на сегодняшнем уровне знаний о египетской и вавилонской математике, а с другой-на критическом изучении греческих источников, Ван-дер-Варден (голландский математик) сделал следующий вывод:

"Заслугой первых греческих математиков, таких как Фалес, Пифагор и пифагорейцы, является не открытие математики, но ее систематизация и обоснование. В их руках вычислительные рецепты, основанные на смутных представлениях, превратились в точную науку"

4. В самом **древнем индийском** геометрическом сборнике «Сульвасутра» («Правила веревки», 600 год до н.э.), представляющем собой своеобразную инструкцию по сооружению алтарей в храмах, даются правила построения прямых углов при помощи веревки с узлами, расстояния между которыми равны 15, 36 и 39 падас (мера длины).

5. Как утверждают все античные авторы, **Пифагор** первый дал полноценное доказательство теоремы, носящей его имя. К сожалению, мы не знаем, в чем оно состояло, потому что древние математики и писатели об этом умалчивают, а от самого Пифагора и ранних пифагорейцев до нас не дошло ни одного письменного документа. Только позже у Евклида было обнаружено доказательство этой теоремы.

У **Евклида** эта теорема гласит (дословный перевод):

"В прямоугольном треугольнике квадрат стороны, натянутой над прямым углом, равен квадратам на сторонах, заключающих прямой угол".

Латинский перевод арабского текста **Аннаирици** (около 900 г. до н. э.), сделанный **Герхардом Клемонским** (начало 12 в.), в переводе на русский гласит:

"Во всяком прямоугольном треугольнике квадрат, образованный на стороне, натянутой

над прямым углом, равен сумме двух квадратов, образованных на двух сторонах, заключающих прямой угол".

В **Geometria Culmonensis** (около 1400 г.) в переводе теорема читается так:
"Итак, площадь квадрата, измеренного по длинной стороне, столь же велика, как у двух квадратов, которые измерены по двум сторонам его, примыкающим к прямому углу".

В первом русском переводе евклидовых **"Начал"**, сделанном **Ф. И. Петрушевским**, теорема Пифагора изложена так:
"В прямоугольных треугольниках квадрат из стороны, противолежащей прямому углу, равен сумме квадратов из сторон, содержащих прямой угол".

В настоящее время известно, что эта теорема не была открыта Пифагором. Однако одни полагают, что Пифагор первым дал ее полноценное доказательство, а другие отказывают ему и в этой заслуге. Некоторые приписывают Пифагору доказательство, которое Евклид приводит в первой книге своих "Начал". С другой стороны, Прокл утверждает, что доказательство в "Началах" принадлежит самому Евклиду. Как мы видим, история математики почти не сохранила достоверных данных о жизни Пифагора и его математической деятельности. Рассказывают – это, конечно, лишь легенда, – что, когда Пифагор доказал свою знаменитую теорему, он отблагодарил богов, принеся им в жертву сто быков. Этот рассказ о жертвоприношении, сообщаемый Диогеном и Плутархом, скорее всего, вымышлен, ибо, как известно, Пифагор был вегетарианцем и непримиримым противником убоя и пролития крови животных.

Доказательство теоремы Пифагора

В школьном учебнике геометрии-8 под редакцией Л.С. Атанасяна, теорема Пифагора доказывается через свойства площадей многоугольников, где устанавливается замечательное соотношение между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника. (Приложение № 1)

А в учебнике И.М. Смирновой данная теорема доказывается через признаки подобия треугольников. (Приложение № 2)

В учебнике А.В. Погорелова теорема Пифагора доказывается через определение косинуса угла. (Приложение №3)

Доказательство Евклида

Доказательство Евклида приведено в предложении 47 первой книги "Начал". На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника ABC строятся соответствующие квадраты и доказывается, что прямоугольник BJLD равновелик квадрату ABFH, а прямоугольник JCEL - квадрату AC KG. Тогда сумма квадратов на катетах будет равна квадрату на гипотенузе. В самом деле, затухеванные на рисунке треугольники ABD и BFC равны по двум сторонам и углу между ними: $FB = AB$, $BC = BD$ и $\angle FBC = \angle ABD$. Но $S_{ABD} = 1/2 S_{BJLD}$, так как у треугольника ABD и прямоугольника BJLD общее основание BD и общая высота LD. Аналогично $S_{BFC} = 1/2 S_{ABFH}$ (BF-общее основание, AB - общая высота). Отсюда, учитывая, что $S_{ABD} = S_{BFC}$, имеем $S_{BJLD} = S_{ABFH}$. Аналогично, используя равенство треугольников BCK и ACE, доказывается, что $S_{JCEL} = S_{ACKG}$. Итак, $S_{ABFH} + S_{ACKG} = S_{BJLD} + S_{JCEL} = S_{BCED}$, что и требовалось доказать. (Приложение № 3)

Древнеиндийское доказательство

Само же древнеиндийское доказательство описано в XII веке в трактате «Венец знания» («Сиддханта широмани») и в качестве главного аргумента автор использует призыв, обращенный к математическим талантам и наблюдательности учеников и последователей: «Смотри!».

Но мы разберем это доказательство более подробно:

Внутри квадрата постройте четыре прямоугольных треугольника так, как это обозначено на чертеже. Сторону большого квадрата, она же гипотенуза, обозначим c . Катеты треугольника назовем a и b . В соответствии с чертежом сторона внутреннего квадрата это $(a-b)$.

Используйте формулу площади квадрата $S=c^2$, чтобы вычислить площадь внешнего квадрата. И одновременно высчитайте ту же величину, сложив площадь внутреннего квадрата и площади всех четырех прямоугольных треугольников: $(a-b)^2+4\cdot\frac{1}{2}ab$.

Вы можете использовать оба варианта вычисления площади квадрата, чтобы убедиться: они дадут одинаковый результат. И это дает вам право записать, что $c^2=(a-b)^2+4\cdot\frac{1}{2}ab$. В результате решения вы получите формулу теоремы Пифагора $c^2=a^2+b^2$. Теорема доказана. (Приложение № 4)

Древнекитайское доказательство

Это любопытное древнекитайское доказательство получило название «Стул невесты» - из-за похожей на стул фигуры, которая получается в результате всех построений:

В нем используется чертеж, который мы уже видели на рис.3 во втором доказательстве. А внутренний квадрат со стороной c построен так же, как в древнеиндийском доказательстве, приведенном выше.

Если мысленно отрезать от чертежа на рис.1 два зеленых прямоугольных треугольника, перенести их к противоположным сторонам квадрата со стороной c и гипотенузами приложить к гипотенузам сиреневых треугольников, получится фигура под названием «стул невесты» (рис.2). Для наглядности можно то же самое проделать с бумажными квадратами и треугольниками. Вы убедитесь, что «стул невесты» образуют два квадрата: маленькие со стороной b и большой со стороной a . Эти построения позволили древнекитайским математикам и нам вслед за ними прийти к выводу, что $c^2=a^2+b^2$. (Приложение № 5)

«Метод Гарфилда».

Это еще один способ найти решение для теоремы Пифагора, опираясь на геометрию. Называется он «Метод Гарфилда».

Постройте прямоугольный треугольник ABC . Нам надо доказать, что $BC^2=AC^2+AB^2$.

Для этого продолжите катет AC и постройте отрезок CD , который равен катету AB . Опустите перпендикулярный AD отрезок ED . Отрезки ED и AC равны. Соедините точки E и B , а также E и C и получите чертеж, как на рисунке ниже:

Чтобы доказать теорему, мы вновь прибегаем к уже опробованному нами способу: найдем площадь получившейся фигуры двумя способами и приравняем выражения друг к другу.

Найти площадь многоугольника **ABED** можно, сложив площади трех треугольников, которые ее образуют. Причем один из них, **ECB**, является не только прямоугольным, но и равнобедренным. Не забываем также, что **AB=CD**, **AC=ED** и **BC=CE** – это позволит нам упростить запись и не перегружать ее. Итак, $S_{ABED}=2*1/2(AB*AC)+1/2BC^2$.

При этом очевидно, что **ABED** – это трапеция. Поэтому вычисляем ее площадь по формуле: $S_{ABED}=(DE+AB)*1/2AD$. Для наших вычислений удобней и наглядней представить отрезок **AD** как сумму отрезков **AC** и **CD**.

Запишем оба способа вычислить площадь фигуры, поставив между ними знак равенства: $AB*AC+1/2BC^2=(DE+AB)*1/2(AC+CD)$. Используем уже известное нам и описанное выше равенство отрезков, чтобы упростить правую часть записи: $AB*AC+1/2BC^2=1/2(AB+AC)^2$. А теперь раскроем скобки и преобразуем равенство: $AB*AC+1/2BC^2=1/2AC^2+2*1/2(AB*AC)+1/2AB^2$. Закончив все преобразования, получим именно то, что нам и надо: $BC^2=AC^2+AB^2$. Мы доказали теорему. (Приложение № 6)

Доказательство Вальдхейма

Это доказательство также имеет вычислительный характер. Можно использовать рисунки для доказательства основанного на вычислении площадей двумя способами. Для того чтобы доказать теорему пользуясь первым рисунком достаточно только выразить площадь трапеции двумя путями.

$$\text{Трапеции} = (a+b)^2/2$$

$$\text{Трапеции} = a^2b^2+c^2/2$$

Приравнявая правые части

получим:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

(Приложение № 7)

Доказательство Хоукинса

Приведем еще одно доказательство, которое имеет вычислительный характер, однако сильно отличается от всех предыдущих. Оно опубликовано англичанином Хоукинсом в 1909 году; было ли оно известно до этого - трудно сказать. Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C повернем на 90° так, чтобы он занял положение A'CB'.

Продолжим гипотенузу A'B' за точку A' до пересечения с линией AB в точке D. Отрезок B'D будет высотой треугольника B'AB. Рассмотрим теперь заштрихованный четырехугольник A'AB'B. Его можно разложить на два равнобедренных треугольника CAA' и CBV' (или на два треугольника A'B'A и A'B'B).

$$S_{CAA'} = b^2/2$$

$$S_{CBV'} = a^2/2$$

$S_{A'AB'B} = (a^2+b^2)/2$ Треугольники A'B'A и A'B'B имеют общее основание c и высоты DA и DB, поэтому: $S_{A'AB'B} = c \cdot DA/2 + c \cdot DB/2 = c \cdot (DA+DB)/2 = c^2/2$ Сравнивая два полученных выражения для площади, получим: $a^2 + b^2 = c^2$ Теорема доказана. (Приложение № 8)

Конечно, этот список доказательств далеко не полный. Теорему Пифагора также можно доказать с помощью векторов, комплексных чисел, дифференциальных уравнений, стереометрии и т.п. И даже физики: если, например, в аналогичные представленным на чертежах квадратные и треугольные объемы залить жидкость. Переливая жидкость, можно доказать равенство площадей и саму теорему в итоге.

Примеры применения теоремы Пифагора на практике

Теорема Пифагора замечательна тем, что она проста, но не очевидна. Это сочетание двух противоречивых начал и придает ей особую притягательную силу, делает ее красивой. Но, кроме того, теорема Пифагора имеет огромное практическое значение: она применяется в геометрии буквально на каждом шагу. Теорема Пифагора – одна из самых главных теорем геометрии. Из нее или с ее помощью можно вывести большинство теорем. Сама же теорема применяется:

- в планиметрии
- в стереометрии
- в архитектуре
- в строительстве
- в физике
- в астрономии
- в литературе

В строительстве:

Возможно, кто-то сочтёт приложения теоремы Пифагора сугубо теоретическими. Но это не так. Если, например, рассматривать треугольную призму как крышу башни, то в первом нашем вопросе речь идёт о том, какой длины нужно сделать боковые рёбра, чтобы при данной площади чердака была выдержана предписанная высота крыши. Заметим, что расчёт площади кровли можно сильно упростить, если воспользоваться одним очень простым правилом, справедливым во всех случаях, когда все скаты крыши, сколько бы их ни было, имеют одинаковый уклон. Оно гласит: Чтобы найти площадь поверхности двухскатной крыши, все скаты которой имеют равный уклон, нужно умножить площадь чердака $S_{\text{ч}}$ на длину стропила и разделить на половину ширины дома.

Например, при строительстве любого сооружения рассчитывают расстояния, центры тяжести, размещение опор, балок и т.д. В целом значение теоремы кроме вышесказанного в том, что она применяется практически во всех современных технологиях, а также открывает простор для создания и придумывания новых.

В физике:

Молниеотвод, громоотвод, устройство для защиты зданий, промышленных, транспортных, коммунальных, и других сооружений от ударов молнии. Известно, что молниеотвод защищает от молнии все предметы, расстояние которых от его основания не превышает его удвоенной высоты. Необходимо определить оптимальное положение молниеотвода на двускатной крыше, обеспечивающее наименьшую его доступную высоту.

- По теореме Пифагора $h^2 \geq a^2 + b^2$,
- значит $h \geq \sqrt{a^2 + b^2}$

Заключение

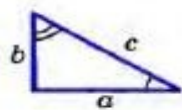
На данный момент в научной литературе зафиксировано **367** доказательств данной теоремы. Вероятно, теорема Пифагора является единственной теоремой со столь внушительным числом доказательств. Такое многообразие можно объяснить лишь фундаментальным значением теоремы для геометрии. Разумеется, концептуально все их можно разбить на малое число классов. Самые известные из них: доказательства методом площадей, аксиоматические и экзотические доказательства (например, с помощью дифференциальных уравнений).

В ходе проделанной работы, рассмотрены различные виды доказательств теоремы Пифагора. Проведен сравнительный анализ разных учебников геометрии за 8 класс по теме «Теорема Пифагора». Мной собрано и обработано много материала из литературных источников и интернета по данной теме. Изучены некоторые исторические сведения о Пифагоре и его теореме, выяснены некоторые области применения теоремы Пифагора.

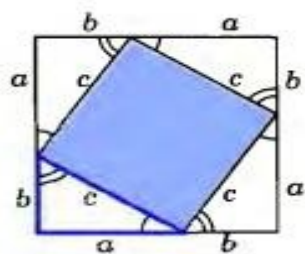
Результатом моей работы является:

- приобретение навыка работы с литературными источниками;
- приобретение навыка поиска нужного материала в Интернете;
- научилась работать с большим объёмом информации, отбирать нужную информацию;
- это моя первая работа по математике, в результате которого я приобрела опыт обработки данных и написания исследовательской работы.

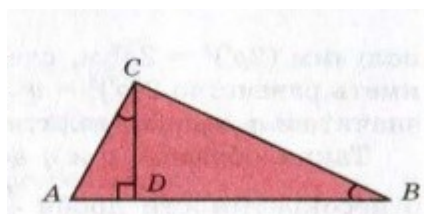
Приложение №1



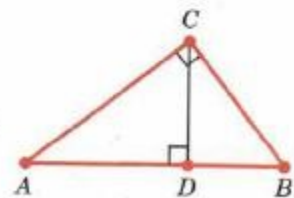
a)



Приложение №2

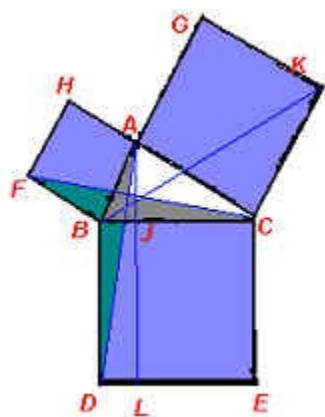


Приложение №3



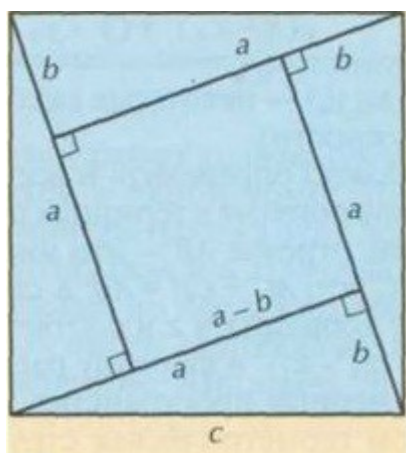
Приложение № 4

Доказательство Евклида



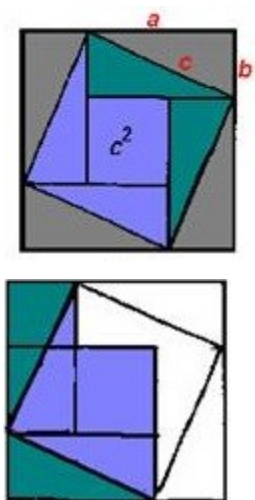
Приложение № 5

Древнеиндийское доказательство



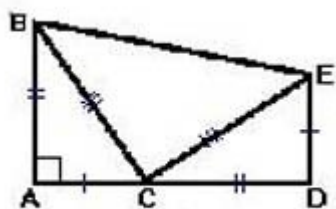
Приложение № 6

Древнекитайское доказательство



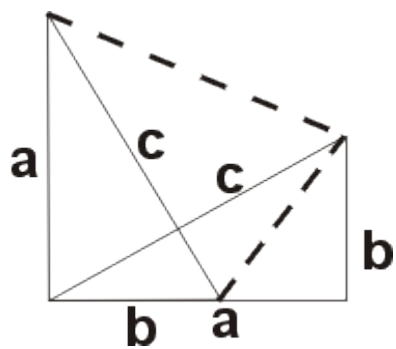
Приложение № 7

«Метод Гарфилда».



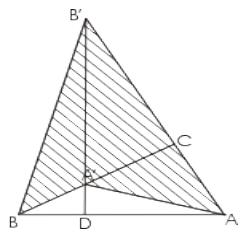
Приложение № 8

Доказательство Вальдхейма



Приложение № 9

Доказательство Хоукинса



Использованная литература:

1. Атанасян Л.С. и др. «Геометрия 7-9», М. «Просвещение», 2002, с.383
2. Волошинов А.В. «Математика и искусство», М. «Просвещение», 2000, с.117- 119, с.399
3. Волошинов А.В. «Пифагор», М. «Просвещение», 1993, с.223
4. Литцман В. «Теорема Пифагора», М. «Государственное издательство физико-математической литературы», 1960, с.114
5. Погорелов А.В. «Геометрия 7-11», М. «Просвещение» 1992, с.383
6. Руденко В.Н. «Геометрия 7-9», М. «Просвещение» 1992, с.383
7. Смирнова И.М. «Геометрия 7-9», «Мнемозина», 2007, с.376

Интернет ресурсы:

<http://encyklopedia.narod.ru/bios/nauka/pifagor/pifagor.ht>

1985 https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Пифагор