

## I. Введение.

Данное пособие предназначено как для учащихся, которые впервые сталкиваются с понятием квадратного уравнения и хотят научиться решать такие уравнения, так и для тех, которым необходимо повторить эту тему для подготовки к итоговой контрольной работе, тесту, ГИА или ЕГЭ.

В математике всё должно быть красиво, целесообразно, экономично, поэтому целью написания данного пособия является стремление научить школьников не просто правильно решать квадратные уравнения, а решать их легко и изящно, т.е. наиболее рациональным способом. Это позволит доводить до конца задание В14 (текстовая задача): анализ результатов ЕГЭ показывает, что невозможность получения ответа в этом задании очень часто связана с неумением доводить до конца решение квадратного уравнения. Также неоценимую пользу знание темы "Квадратные уравнения" может принести при решении задания С5 (задание с параметрами).

## II. Краткий исторический обзор.

Квадратные уравнения впервые появились за 2000 лет до нашей эры в Древнем Вавилоне при развитии землемерия, строительного искусства, военного дела. Их решали без использования символики. Изучение астрономии продвинуло вперёд науку о квадратных уравнениях, и следующие этапы её развития были связаны с именами индийских учёных Ариабхата (499 г.н.э.), Брахмагупта (598-660 гг.н.э.), Бхаскара (1114-1178 гг.). Индийские учёные уже умели извлекать квадратные корни. Китайский учёный Ли Чунь-фэн (665 г. н.э.), занимаясь составлением календаря, вывел формулу, выражающую нерегулярности в видимом движении Солнца по небу – это тоже способствовало развитию знаний о квадратных уравнениях. В Древней Греции Пифагор (570-500 гг.до н.э.), Евклид (III в. до н.э.), Диофант Александрийский (III в. до н.э.) решали квадратные уравнения геометрически – путём деления отрезка в крайнем и среднем отношениях. В странах Средней Азии квадратные уравнения решали методом выделения полного квадрата с помощью геометрической интерпретации. Это было в IX в., а ярким представителем учёных Средней Азии был аль-Хорезми (787-850гг.). В 1202 г. в Италии Леонардо Фибоначчи опубликовал "Книгу абака", где были изложены новые способы решения алгебраических задач. В Германии в 1544 г. Михаэль Штифель ввел

практически современное правило решения квадратных уравнений, но самый мощный толчок развитие теории квадратных уравнений получило во Франции в XVI -XVII вв. благодаря Франсуа Виету (1540-1603), который основные свои идеи изложил в труде “Введение в аналитическое искусство”. Он впервые ввел общепринятые теперь знаки для неизвестных величин и коэффициентов, начал исследовать свойства уравнений, благодаря чему стало возможным выведение формул для нахождения корней квадратного уравнения, доказал замечательную теорему о корнях квадратного уравнения, а другой французский учёный Рене Декарт (1596-1650 гг.) затем значительно улучшил систему обозначений, введённых Виетом. История развития учения об уравнениях продолжалась и дальше, и была связана с именами таких учёных, как Пачоли, Кардано, Тарталья и многих других.

### III. Определения.

Квадратным называется уравнение вида  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $x$  – неизвестное,  $a, b, c$  – некоторые числа, причем  $a \neq 0$ . Числа  $a, b, c$  называются коэффициентами квадратного уравнения, причём  $a$  – старший коэффициент (он стоит перед неизвестным в старшей степени),  $b$  – второй коэффициент,  $c$  – свободный член (при нем нет неизвестного).

Требование  $a \neq 0$  соблюдать очень важно, особенно при решении заданий с параметрами. В соответствующем разделе будет подробно объяснено, почему несоблюдение этого требования приводит к ошибкам и к каким именно.

Если какой-то из коэффициентов квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  равен нулю, то уравнение называется неполным квадратным уравнением. Возможны варианты:  $b = 0$ ,  $c = 0$ ,  $b = c = 0$ . Коэффициент  $a$  не может быть равен нулю по определению квадратного уравнения

### IV. Решение неполных квадратных уравнений.

Приведём все решения неполных квадратных уравнений в следующей таблице:

Какой коэффициент равен 0	Вид квадратного уравнения	Решение	Ответ
$b = 0$	$ax^2 + c = 0$	$ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ Если $a$ и $c$ – одного знака, то правая часть уравнения отрицательна, а левая часть, будучи квадратом, неотрицательна. Т.о., уравнение действительных корней не имеет. Если же $a$ и $c$ разных знаков, то правая часть положительна и корнями уравнения будут числа $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ или $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$	Или действительных корней нет, или $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ , $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$
$c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x(ax + b) = 0$ $x = 0$ или $ax + b = 0$ $ax = -b$ $x = -\frac{b}{a}$	$0; -\frac{b}{a}$
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	Т.к. $a$ нулю не равно по определению, то $x = 0$ .	0

## V. Применение формул сокращённого умножения для решения квадратных уравнений.

Если квадратное уравнение оказалось полным, то прежде всего нужно проверить, не является ли его левая часть полным квадратом, и если да, то применить ФСУ: либо формулу квадрата суммы, либо формулу квадрата разности, например:

$$4x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$(2x + 3)^2 = 0$$

$$2x + 3 = 0$$

$$2x = -3$$

$$x = -1,5$$

Ответ: -1,5

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$(2x - 3)^2 = 0$$

$$2x - 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = 1,5$$

Ответ: 1,5

Как узнать, "свернётся" ли левая часть в полный квадрат? Для этого нужно рассмотреть коэффициенты  $a$  и  $c$ : если они представляют собой квадраты чисел, то тогда следует убедиться в том, что удвоенное произведение этих чисел есть не что иное, как второй коэффициент. Например, в только что приведённых примерах  $a = 4$ , т.е. является квадратом числа 2, а  $c = 9$ , т.е. является квадратом числа 3. Удвоенное произведение чисел 2 и 3 равно 12. В 1-м примере  $b = 12$  и речь идёт о квадрате суммы, а во 2-м примере  $b = -12$ , и речь идёт о квадрате разности.

## VI. Свойство коэффициентов квадратного уравнения.

Если не удалось "свернуть" выражение, стоящее в левой части уравнения в полный квадрат, то надо посчитать сумму коэффициентов. Рассмотрим два варианта:  $a + b + c = 0$  или  $a - b + c = 0$ . В первом варианте корнями уравнения будут числа 1 и  $\frac{c}{a}$ , а во втором  $-1$  и  $-\frac{c}{a}$ . То, что 1 и  $-1$  окажутся корнями, легко проверяется подстановкой, а по поводу других корней разъяснения будут даны ниже.

- 1)  $13x^2 - 9x - 4 = 0$  Здесь  $a = 13$ ,  $b = -9$ ,  $c = -4$ , т.о.,  $a + b + c = 13 + (-9) + (-4) = 0$ , значит,  $x = 1$  или  $x = -\frac{4}{9}$ .
- 2)  $13x^2 + 9x - 4 = 0$  Здесь  $a = 13$ ,  $b = 9$ ,  $c = -4$ , значит,  $a - b + c = 13 - 9 + (-4) = 0$ , значит,  $x = -1$  или  $x = \frac{4}{9}$ .

## VII. Вывод общей формулы. Количество корней квадратного уравнения.

Теперь перейдём к случаю, когда левая часть в полный квадрат не “сворачивается” и свойство коэффициентов не “работает”. Преобразуем левую часть уравнения следующим образом: вынесем за скобки коэффициент  $a$ , а в скобках выделим полный квадрат.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Таким образом, после преобразования левой части получим уравнение:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0$$

Теперь перенесём в правую часть второе слагаемое, изменив его знак на противоположный, и разделим обе части уравнения на  $a$  (помним о том, что  $a$  не равно 0 по определению квадратного уравнения), получим:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

В левой части уравнения стоит квадрат выражения - неотрицательное число. Правая часть уравнения представляет собою дробь, знаменатель которой положителен, т.к. является квадратом и  $a \neq 0$ . Рассмотрим числитель дроби, стоящей в правой части уравнения:  $b^2 - 4ac$ .

Возможны три варианта:

$$1) b^2 - 4ac = 0$$

Тогда дробь равна 0, получаем:  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$

$$x + \frac{b}{2a} = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Уравнение имеет единственный корень  $-\frac{b}{2a}$ .

2) Пусть теперь  $b^2 - 4ac < 0$

Тогда уравнение действительных корней не имеет, т.к. в его левой части неотрицательное выражение, а в правой – отрицательное.

3)  $b^2 - 4ac > 0$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Применим в левой части формулу разности квадратов:

$$\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right) \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right) = 0$$

Произведение двух выражений равно 0, когда одно из них равно 0, а другое при этом имеет смысл, получаем:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = 0 \text{ или } \left(x + \frac{b}{2a}\right) - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = 0, \text{ отсюда}$$
$$x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{или} \quad x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

После извлечения квадратного корня из знаменателя дроби и приведения к общему знаменателю получаем:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{или} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Для краткости можно эти оба действительных корня объединить одной формулой  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  (1)

Подытоживая три рассмотренных случая, делаем вывод о том, что количество корней квадратного уравнения напрямую зависит от знака выражения  $b^2 - 4ac$ , которое принято обозначать буквой D и называть дискри-

минантом, что в переводе с латыни (от Discriminar) означает “различать”, а именно: если  $D = 0$ , то уравнение имеет единственный корень, если  $D > 0$ , то уравнение действительных корней не имеет, если  $D < 0$ , то уравнение имеет два различных действительных корня. Таким образом, формула (1) принимает вид:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (2)$$

Это общая формула для решения квадратных уравнений (в дальнейшем будет показано, что не всегда применение общей формулы – наиболее рациональный путь решения квадратного уравнения).

На самом деле, приведённое выше утверждение о количестве корней квадратного уравнения является не совсем точным, потому что противоречит основной теореме алгебры: всякое уравнение  $n$ -ной степени имеет  $n$  корней. Но в школьном курсе основную теорему алгебры и комплексные числа не изучают, поэтому на вопрос о количестве корней квадратного уравнения в школе надо отвечать так, как изложено выше.

Если же учитывать основную теорему алгебры, то ответ на вопрос о количестве корней квадратного уравнения звучит так:

при  $D = 0$  уравнение имеет **два** равных действительных корня;

при  $D < 0$  уравнение имеет **два** различных комплексных корня;

при  $D > 0$  уравнение имеет **два** различных действительных корня.

### VIII. Формула с чётным коэффициентом.

Теперь рассмотрим ситуацию, при которой общая формула для нахождения корней квадратного уравнения (2) значительно упрощается. Это происходит в том случае, когда модуль второго коэффициента оказывается чётным числом, т.е.  $b = 2m$ , тогда:  $D = b^2 - 4ac = (2m)^2 - 4ac = 4m^2 - 4ac = 4(m^2 - ac)$ . Подставим это выражение в (2), получим:

$$x = \frac{-2m \pm \sqrt{4(m^2 - ac)}}{2a}$$

на 2 получаем формулу (3):

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a}$$

где  $m = \frac{b}{2}$ , и которая носит название формулы с чётным коэффициентом.

Приведем примеры.

<p>1) <u><math>2x^2 + 5x + 2 = 0</math></u></p> <p><math>D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9</math></p> <p><math>x = \frac{-5 \pm 3}{4}</math></p> <p><math>x = -\frac{1}{2}</math> или <math>x = -2</math></p> <p>Ответ: -0,5; -2.</p>	<p>Здесь мы воспользовались формулой (1) или другой её формой записи – формулой (2)</p>
<p>2) <u><math>5x^2 + 24x - 68 = 0</math></u></p> <p><math>\frac{D}{4} = 12^2 - 5 \cdot (-68) = 484</math></p> <p><math>x = \frac{-12 \pm 22}{5}</math></p> <p><math>x = 2</math> или <math>x = -6,8</math></p> <p>Ответ: 2; -6,8.</p>	<p>Обращаем внимание на то, что коэффициент <math>b = 24</math> – чётное число, значит, можно для решения воспользоваться формулой (3), т.е. <u>формулой с чётным коэффициентом</u>, тогда <math>m = \frac{24}{2} = 12</math>.</p> <p>Конечно, можно было бы и это уравнение решить по общей формуле, но это сделало бы вычисления более громоздкими: <math>D = 24^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-68) = 1936</math></p> <p><math>x = \frac{-24 \pm 44}{10}</math></p> <p><math>x = 2</math> или <math>x = -6,8</math></p> <p>Ответ: 2; -6,8.</p> <p>В решении по формуле (3) мы имеем дело с числами <b>12, 144, 484</b>, а в решении по формуле (3) – с числами <b>24, 576 и 1936</b> – это замедляет процесс вычисления.</p>



## IX. Правила возведения в квадрат и извлечения квадратного корня.

Теперь самое время обсудить правила возведения в квадрат и извлечения квадратного корня.

Квадраты чисел от 1 до 20 полезно помнить наизусть, в т.ч.  $12^2 = 144$ ,  $13^2 = 169$ ,  $14^2 = 196$ ,  $15^2 = 225$ ,  $16^2 = 256$ ,  $17^2 = 289$ ,  $18^2 = 324$ ,  $19^2 = 361$ . Если надо возвести в квадрат, например, число 43, то пользуемся ФСУ:  $43^2 = (40 + 3)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 3 + 3^2 = 1600 + 240 + 9 = 1849$ , а если бы потребовалось возвести в квадрат число 47, то его удобнее было бы представить не как  $40 + 7$ , а как  $50 - 3$ .

Далее очень полезно запомнить, как подсчитываются квадраты двузначных чисел, оканчивающихся на 5: цифру десятков надо умножить на цифру, на единицу большую, а к результату справа приписать 25, например: чтобы возвести 75 в квадрат, надо 7 умножить на 8 и к 56 приписать справа 25, получим 5625.

Чтобы понять, почему это правило так работает, достаточно воспользоваться формулой возведения в квадрат числа, в котором  $a$  десятков и 5 единиц:  $(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = \mathbf{100a(a + 1) + 25}$ . Теперь понятно, почему мы цифру десятков  $a$  умножаем на цифру, которая на единицу больше, и приписываем в конце 25.

По поводу извлечения квадратного корня можно предложить три варианта.

### 1) Прикидка.

Мы знаем, что  $20^2 = 400$ , а нам надо извлечь корень из числа 484. Ясно, что это должно быть число большее 20, и оно должно оканчиваться такой цифрой, которая при возведении в квадрат давала бы на конце 4. Таких цифр всего две: это  $2^2 = 4$  и  $8^2 = 64$ . Значит, и у нас всего два предположительных ответа: 22 и 28. Далее их можно проверить непосредственным возведением в квадрат. Но если вспомнить, что  $25^2 = 625$  (смотри правило возведения в квадрат двузнач-

ных чисел, оканчивающихся 5), то получится, что вариант 28 отпадает и без проверки, и остаётся единственно возможный вариант 22.

## 2) Разложение на множители.

$$484 = 2 \cdot 242 = 2 \cdot 2 \cdot 121 = 4 \cdot 121$$

А далее применяем теорему о корне из произведения и получаем

$$\sqrt{484} = \sqrt{4 \cdot 121} = 2 \cdot 11 = 22$$

## 3) Алгоритм извлечения квадратного корня.

Разбиваем число на грани - по две цифры в каждой грани - справа налево. Таким образом, первая грань – это число 4. Извлекаем из него корень, получаем **2**. Сносим следующую грань (запись производится как при делении в столбик) – это 84. Число 2 удваиваем и получаем 4. А теперь число 4\* надо умножить на \* так, чтобы получилось 84. Ясно, что в качестве \* берем **2**. Получили 22.

Попробуем применить этот алгоритм для числа 1936. Извлекаем корень из первой грани – это **4**,  $4^2 = 16$ ,  $19 - 16 = 3$ , сносим целиком вторую грань, получаем 336. Число 4 удваиваем, после чего ищем цифру \* такую, чтобы число 8\* при умножении на \* дало 336. Ясно, что в качестве \* выступает число **4**. Ответ 44.

Запись при таком способе извлечения квадратного корня ведётся как при делении в столбик; различие состоит в том, что при делении в столбик мы сносим по одной цифре, а здесь сразу по две.

$$\sqrt{1936} = 44$$

$$\begin{array}{r} \underline{16} \\ 84 \overline{) 336} \\ \underline{4 \phantom{0} 336} \\ 0 \end{array}$$

## Х. Приведённое квадратное уравнение.

Если в квадратном уравнении  $a = 1$ , то его называют приведённым.  
Ясно, что любое квадратное уравнение можно сделать приведённым, для этого достаточно обе его части разделить на коэффициент  $a$ :  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Теперь получим формулу для нахождения корней приведённого квадратного уравнения, но учтём, что приведённое квадратное уравнение принято записывать так:  $x^2 + px + q = 0$

Чтобы получить формулу для его решения, поступим так, как поступали при выводе формулы (1), т.е. выделим полный квадрат в левой части

уравнения и тогда:  $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$  (4)

Для приведенного квадратного уравнения формула для нахождения корней может быть даже выражена в стихотворной форме – для лучшего запоминания:

**Минус напишем сначала,**

**Рядом с ним  $p$  пополам,**

**Плюс-Минус знак радикала,**

**С детства знакомого нам.**

**Ну, а под корнем, приятель,**

**Сводится все к пустяку**

**$p$  пополам и в квадрате**

**Минус несчастное  $q$ .**

Эти стихи прозвучали в передаче "Радионяня"

Понятно, что пользоваться этой формулой удобно лишь тогда, когда  $p$  – чётное число, иначе возникнут дроби, а с ними потом будет больше хлопот.  
Например:  $x^2 + 6x + 8 = 0$

$$x = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{3^2 - 8}; x = -3 \pm 1; \text{ответ: } -2; -4$$

Приведём ещё пример, который нередко вызывает затруднение у учащихся:  $x^2 - 2x\sqrt{3} - 6 = 0$ . Здесь в роли коэффициента  $p$  выступает число  $-2\sqrt{3}$ .

Решаем по формуле (4) или пользуемся стихотворной подсказкой:

$$X = \sqrt{3} \pm \sqrt{3 - (-6)}; x = \sqrt{3} \pm 3$$

А если всё-таки квадратное уравнение является приведённым, но число  $p$  нечётное? Тогда на помощь приходит теорема Франсуа Виета (1540-1603), состоящая из двух утверждений:

Если числа  $x_1$  и  $x_2$  являются корнями квадратного уравнения

$x^2 + px + q = 0$ , то их сумма равна второму коэффициенту с противоположным знаком, а произведение равно свободному члену, т.е.  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1x_2 = q$ .

И обратно: если числа  $x_1$  и  $x_2$  таковы, что  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1x_2 = q$ , то они являются корнями квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$ .

Например, нужно решить уравнение  $x^2 - 9x + 18 = 0$  с использованием теоремы Виета. Поступаем следующим образом: раскладываем число 18 на два множителя всеми возможными способами: 1 и 18, 2 и 9, 3 и 6. Теперь составляем из этих пар множителей суммы:  $1 + 18 = 19$ ,  $2 + 9 = 11$ ,  $3 + 6 = 9$ . Понятно, что пара чисел 3 и 6 нас устраивает, потому что они таковы, что их произведение равно свободному члену 18, а сумма 9 равна второму коэффициенту с противоположным знаком. Числа из двух других пар такой проверки не выдерживают. Если бы мы решали уравнение  $x^2 + 9x + 18 = 0$ , то в нем ответами были бы числа  $-3$  и  $-6$ , в чём легко убедиться, воспользовавшись теоремой Виета. Чтобы применение теоремы Виета не вызывало затруднений, нужно легко раскладывать числа на множители, а для этого необходимо хорошо знать признаки делимости и приёмы устного счёта.

Приведём также пример применения первой части теоремы Виета.

Пусть нам требуется составить квадратное уравнение с корнями

2 и 5. Их сумма равна 7, значит, второй коэффициент будет равен  $-7$ , а свободный член будет равен  $2 \cdot 5 = 10$ . Таким образом, требуемое уравнение выглядит так:  $x^2 - 7x + 10 = 0$ . В качестве тренировки попробуйте составить квадратные уравнения с корнями 2 и  $-5$ ;  $-2$  и  $5$ ;  $-2$  и  $-5$ .

Если квадратное уравнение записано в виде  $ax^2 + bx + c = 0$ , то для применения теоремы Виета можно воспользоваться другой стихотворной шпаргалкой:

По праву достойна в стихах быть воспета

О свойствах корней теорема Виета.

Что лучше, скажи, постоянства такого:

Умножишь ты корни – и дробь уж готова:

В числителе  $c$ , в знаменателе  $a$ ;

А сумма корней тоже дроби равна.

Хоть с минусом дробь эта, что за беда – в числителе  $b$ , в знаменателе  $a$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Докажем теорему Виета. Пусть нам известно, что числа  $x_1$  и  $x_2$  – корни квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$ . Убедимся, что их сумма равна  $-p$ , а произведение равно  $q$ .

$$x_1 + x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} + \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q} - p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{p^2 - 4q})^2}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{p^2 - p^2 + 4q}{4} = \frac{4q}{4} = q,$$

что и

требовалось доказать. Вторую часть теоремы Виета попробуйте доказать самостоятельно.

Часто встречаются задания, которые легко выполняются при помощи теоремы Виета, например: для уравнения  $x^2 - 5x + 1 = 0$  найти значение выражения  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ , где  $x_1$  и  $x_2$  – корни данного уравнения. Ясно, что корни у данного уравнения иррациональные и вычисления с ними будут довольно громоздкими, тогда как применение теоремы Виета всё значительно упрощает, но сначала надо преобразовать данное выражение:  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1 x_1 + x_2 x_2}{x_2 x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} - \frac{2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{5^2}{1} - 2 = 23$  (мы привели дроби к общему знаменателю, выделили полный квадрат и по теореме Виета сумму корней заменили числом 5, а произведение – числом 1, в результате получили 23). Часто в подобного рода заданиях делается оговорка: найти значение выражения  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ , не вычисляя корней квадратного уравнения, тогда применение теоремы Виета – единственный способ решения.

В качестве тренировки для данного уравнения можно найти значения таких выражений, как:  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ;  $x_1^2 + x_2^2$ ;  $x_1^3 + x_2^3$ ;  $x_1^4 + x_2^4$ .

**XI. Наконец, составим полную схему решения квадратного уравнения:**

$ax^2 + bx + c = 0$  – полное?

нет

$b = 0$	$c = 0$	$b = c = 0$
$x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ $x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$x = 0$ или $x = -\frac{b}{a}$	$x = 0$

да

Левая часть – полный квадрат?

нет

да

$a + b + c = 0?$

$a - b + c = 0?$

$(kx \pm n)^2 = 0$

$X = \pm \frac{n}{k}$

нет

да

$a = 1?$

$x = 1; x = \frac{c}{a}$  или  $x = -1; x = -\frac{c}{a}$

нет

модуль  $b$  – четное?

нет

да

$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a}$

$x^2 + px + q = 0$

$p$  – четное?

нет

да

теорема Виета

$x_1 + x_2 = -p, x_1 x_2 = q$

$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Попробуем найти рациональный способ для решения квадратного уравнения  $3x^2 + 10x + 3 = 0$ , пользуясь приведённой выше схемой.

Для этого будем последовательно отвечать на предложенные вопросы и продвигаться по схеме в соответствии со стрелками.

- 1) Это уравнение полное ? – Да
- 2) Левая его часть – полный квадрат? – Нет
- 3)  $3 + 10 + 3 = 0?$ ,  $3 + (-10) + 3 = 0?$  – Нет
- 4) Это уравнение приведённое? – Нет
- 5) Модуль второго коэффициента – чётное число? – Да

Значит, решать это уравнение мы будем по формуле  $x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a}$ ,  
где  $m = \frac{10}{2} = 5$ .

Попробуем решить уравнение  $2013x^2 + 2014x + 1 = 0$ .

- 1) Это уравнение полное ? – Да
- 2) Левая его часть – полный квадрат? – Нет
- 3)  $2013 + 2014 + 1 = 0?$  – нет, а  $2013 + (-2014) + 1 = 0?$  – Да

Значит,  $x = -1$  или  $x = -\frac{1}{2013}$

Ещё пример:  $225x^2 + 30x + 1 = 0$ .

- 1) Это уравнение полное? – Да
- 2) Левая его часть – полный квадрат? – Да

Значит, “сворачиваем” её в полный квадрат  $(15x + 1)^2 = 0$  и получаем ответ:  $-\frac{1}{15}$ .

Решить уравнение  $x^2 - x - 72 = 0$ .

Попробуйте самостоятельно пройти по схеме. Если на все вопросы дан верный ответ, то получится, что наиболее рациональный способ решения – по теореме Виета. Ответ: 9; - 8.

Далее предлагаются несколько уравнений, попробуйте для каждого найти наиболее рациональный способ решения:

1)  $x^2 - 5x - 50 = 0$



- 2)  $73x^2 - x - 72 = 0$
- 3)  $9x^2 - 24x + 16 = 0$
- 4)  $x^2 - 2x - 1 = 0$
- 5)  $3x^2 - 16x - 12 = 0$
- 6)  $x^2 - 64 = 0$
- 7)  $x^2 - 64x = 0$
- 8)  $4x^2 - 7x - 2 = 0$
- 9)  $6x^2 = 0$

Теперь можете проверить правильность выбора наиболее рационального пути решения:

- 1) по теореме Виета;
- 2) по свойству коэффициентов;
- 3) с применением ФСУ – “сворачивание” в полный квадрат;
- 4) по формуле с буквой  $p$ ;
- 5) по формуле с буквой  $m$ ;
- 6) по формуле для неполных уравнений – случай  $b = 0$ ;
- 7) по формуле для неполных уравнений – случай  $c = 0$ ;
- 8) по формуле с дискриминантом;
- 9) по формуле для неполных уравнений – случай  $b = c = 0$ .

## ХII. Несложные задания, касающиеся квадратных уравнений с параметрами.

- 1) Сколько корней в зависимости от значений параметра  $k$  имеет уравнение  $(k - 1)x^2 = 0$ ?

При  $k \neq 1$  это неполное квадратное, и оно имеет единственный корень.

При  $k = 1$  это уравнение квадратным не является и имеет бесконечно много корней.

- 2) При каких значениях параметра  $k$  уравнение  $(k - 1)x^2 + kx + 1 = 0$  имеет единственный корень?

При  $k = 1$  уравнение принимает вид:  $x + 4 = 0$ . Ясно, что оно имеет единственный корень, не являясь при этом квадратным.

При  $k \neq 1$  уравнение является квадратным, следовательно, единственный корень имеет при условии  $D = 0$ . Составим  $D$ :  $D = k^2 - 4(k-1) = k^2 - 4k + 4 = (k - 2)^2$ . Ясно, что  $D = 0$  при  $k = 2$ .

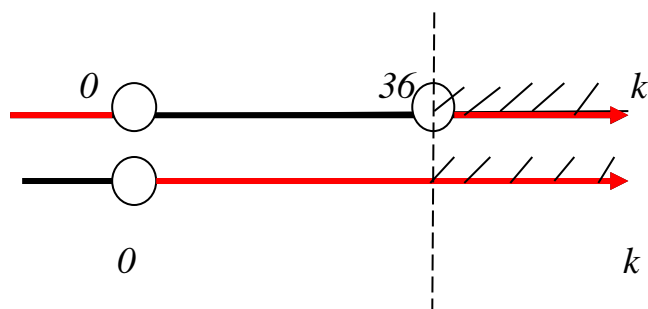
Ответ: данное уравнение имеет единственный корень при  $k = 1$  и при  $k = 2$ .

Самая распространённая ошибка учащихся заключается в том, что зачастую уравнение  $(k - 1)x^2 + kx + 1 = 0$  воспринимается ими как квадратное и поэтому получается только один ответ ( $k = 2$ ), тогда как при  $k \neq 1$  уравнение квадратным не является, но тоже имеет единственный корень

**3) При каком значении параметра  $k$  уравнение  $kx^2 + kx + 9 = 0$  имеет корни одного знака?**

При  $k = 0$  уравнение принимает вид  $0x = 9$  и, следовательно, корней не имеет вообще. При  $k \neq 0$  данное уравнение является квадратным и имеет два корня при  $D > 0$ .

$D = k^2 - 36k > 0$  при  $k < 0$  или  $k > 36$ . Чтобы корни были одного знака, свободный член в соответствующем приведённом квадратном уравнении должен быть положительным, т.е.  $\frac{9}{k} > 0$ , откуда  $k > 0$ . Сопоставляя решения обоих неравенств, получаем, что  $k > 36$ .



Распространённая ошибка в решении подобного рода заданий: учащиеся забывают, что для того, чтобы корни были одного знака, для начала надо, чтобы они вообще существовали. Если про это не вспомнить, то получится неверный ответ  $k > 0$ .

## ХII. Заключение.

Чтобы применить на практике полученные знания о рациональных способах решения квадратных уравнений, рекомендую обратиться к соответствующему разделу из сборника задач по алгебре для 8-9 классов М.Л.Галицкого, А.М.Гольдмана, Л.И.Звавича Москва Издательство “Просвещение” 2001 г.

**М.В. Закуцкая**

**Что надо знать**

**школьнику**

**квадратных уравнениях**

**Санкт-Петербург**

**2013**

