

Дополнительные теоремы и формулы к школьному курсу геометрии

Название	Формулировка
Теорема Вариньона	Средины сторон произвольного четырехугольника (в том числе и невыпуклого) являются вершинами параллелограмма, площадь которого в два раза меньше площади исходного четырехугольника.
Теорема Дезарга	Если два треугольника расположены на плоскости таким образом, что прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников, проходят через одну точку, то три точки, в которых пересекаются продолжения трех пар соответственных сторон треугольников, лежат на одной прямой (обратное утверждение тоже верно).
Теорема Менелая	Если на сторонах АВ и ВС и продолжении стороны АС (либо на продолжениях сторон АВ, ВС и АС) взяты соответственно точки С ₁ , А ₁ , В ₁ , то эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство: $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.
Теорема Птолемея	<u>Прямая</u> : если четырехугольник вписан в окружность, то произведение его диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон. <u>Обратная</u> : если произведение диагоналей четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон, то четырехугольник можно вписать в окружность.
Теорема Симпсона	Основания перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника (или их продолжениям) из произвольной точки описанной окружности лежат на одной прямой (она называется прямой Симпсона).
Теорема Чевы	Если на сторонах АВ, ВС, СА треугольника АВС взяты соответственно точки С ₁ , А ₁ , В ₁ , то отрезки АА ₁ , ВВ ₁ , СС ₁ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство: $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.
Теорема Штейнера	Средины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжения боковых сторон лежат на одной прямой.
Формула Эйлера	$d^2 = R^2 - 2Rr$, где d – расстояние между центрами вписанной и описанной около треугольника окружностей, r и R- соответственно радиусы этих окружностей.
Формулы для вневписанной окружности	Окружность называется вневписанной, если она касается одной стороны треугольника и продолжения двух других его сторон. $S_{\Delta} = \sqrt{R r_a r_b r_c}$; $S_{\Delta} = (p - a)r_a$; $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$
Теорема о биссектрисе угла треугольника	Если АА ₁ – биссектриса угла А треугольника АВС, а точка О – точка пересечения биссектрис этого треугольника, то $\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB+AC}{AC}$.
Теорема о второй средней линии трапеции	Если сумма углов при основании трапеции равна 90°, то отрезок, соединяющий средины оснований трапеции, равен их полуразности.
Средние величины в трапеции	Отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно ее основаниям, равен среднему гармоническому ее оснований.
	Отрезок, делящий трапецию на две подобные, равен среднему геометрическому ее оснований.
	Отрезок, соединяющий средины боковых сторон трапеции, равен среднему арифметическому ее оснований.
	Отрезок, делящий трапецию на две равновеликих, равен среднему квадратичному ее оснований.