

УДК 517.95+532.5

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
И МЕТОДАХ ЕГО РЕШЕНИЯ

В. Н. Ханхасаев, Э. В. Дармахеев

Аннотация. Создание новых технологических процессов, основанных на использовании высокоинтенсивных потоков энергии, вынуждает при определении температурного состояния учитывать конечную скорость распространения тепла. Этот учет может быть осуществлен при помощи гиперболического уравнения теплопроводности, полученного А. В. Лыковым в рамках неравновесной феноменологической термодинамики как следствие обобщения закона Фурье для потоков и уравнения теплового баланса. В прежних работах В. Н. Ханхасаева моделировался процесс коммутационного отключения электрической дуги в спутном потоке газа с использованием этого уравнения. В данной работе развивается математическая модель этого процесса с добавлением периода устойчивого горения дуги до момента отключения, и заменой строго гиперболического уравнения теплопроводности гиперболо-параболическим. Для полученного смешанного уравнения теплопроводности корректно поставлены и численно решаются ряд краевых задач в программных средах Фортран и Маткад с получением полей температур, хорошо согласующихся с имеющимися экспериментальными данными.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12772

Ключевые слова: гиперболо-параболические уравнения, гиперболическое уравнение теплопроводности, схема переменных направлений, уравнения Навье — Стокса, тепловой баланс.

Введение

Несмотря на большой опыт в разработке коммутационных аппаратов и исследовании происходящих в них электродуговых процессов, отраженный, в частности, в монографии А. И. Полтева [1], существует ряд проблем, связанных с изучением квазистационарных и существенно нестационарных процессов в дуге, обдуваемой потоком газа, созданием методов расчета и поиском путей повышения эффективности дутьевых систем для увеличения теплосъема с электрической дуги.

Анализ работы выпускаемых в настоящее время промышленных высоковольтных выключателей классического типа с коммутацией, сопровождающейся возникновением дуги, показывает, что они зачастую не отвечают современным требованиям по уровням отключаемых токов, напряжений на разрыв,

быстродействию и надежности. В работах С. Л. Буянтueva и др. [2] был предложен и экспериментально на первом этапе исследован новый автогазовый способ гашения коммутационной дуги, основанный на принципе возгонки элегаза (SF_6) из одного агрегатного состояния в другое под действием энергии дуги с образованием высокого давления в дуге в камере. На втором этапе необходимо учитывать влияние потока газа в разные стадии горения и гашения дуги от амплитудных до нулевых значений тока, различную геометрию дугевых систем и термохимические эффекты в столбе дуги.

В соответствии с полученными результатами и с целью дальнейшей эффективной доработки этого способа встала задача построения адекватных математических моделей теплообмена и математического аппарата для их описания при определенных режимах работы. В силу тепловой инерции плазмы в области перехода тока через ноль, где находится наиболее удобное время для разъединения электрической цепи, температура дуги достаточно высока (на оси $\approx 7000^\circ \text{K}$), а время гашения и тепловая постоянная времени дуги τ для продольного дутья в воздухе, элегазе или смесях элегаза с азотом имеют длительность от единиц до десятков микросекунд, и тепловое равновесие достигается сравнительно быстро. Поэтому если процессы в области амплитуды тока обычно представляют как установившиеся, описываемые классическим уравнением теплопроводности параболического типа, то дугогашение в области нуля тока необходимо рассматривать как существенно нестационарный процесс, описываемый гиперболической моделью [3–5].

К этой проблеме примыкает моделирование волнового механизма теплопереноса, обусловленного конечной скоростью распространения тепла. Из классической теории переноса известны следующие законы:

$\bar{q}(x, y, z, t) = -\lambda \text{grad } T(x, y, z, t)$ — закон Фурье, λ — коэффициент теплопроводности, \bar{q} — плотность теплового потока, T — температура;

$\bar{q}(x, y, z, t) = -D \text{grad } C(x, y, z, t)$ — закон Фика, D — коэффициент диффузии, \bar{q} — плотность потока диффузии, C — концентрация;

$\bar{q}(x, y, z, t) = -K \text{grad } H(x, y, z, t)$ — закон Дарси, K — коэффициент фильтрации, \bar{q} — поток объемного расхода или скорость фильтрации, H — давление.

Все они имеют одинаковую форму, и в общем виде их можно записать так:

$\bar{q}(x, y, z, t) = -A \text{grad } U(x, y, z, t)$ — обобщенный закон переноса [6], где A — коэффициент переноса, \bar{q} — плотность потока, U — потенциал.

Дифференциальное уравнение переноса, получаемое из данного закона в одномерном случае, имеет параболический тип:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Если продифференцировать фундаментальное решение этого уравнения

$$U(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) \quad (2)$$

и устремить время к нулю, то будет видно, что скорость переноса потенциала в начальный момент времени равна бесконечности. Решение этого парадокса в

том, что при рассмотрении среды на молекулярном уровне ее нельзя считать сплошной, так как между молекулами находится свободное пространство.

Приближение сплошной среды, подразумевающее у нее отсутствие внутренней структуры, означает, что в интегральных законах сохранения для этой среды можно совершать предельный переход при стремлении объема к нулю. Такой предельный переход позволяет получить уравнение сохранения энергии в дифференциальной форме. С физической точки зрения эта процедура некорректна, так как любая среда всегда состоит из отдельных элементов и имеет свою внутреннюю дискретную структуру [7].

В рамках теории теплопроводности Каттанео и Вернотте [8, 9] в 1958 г. из молекулярно-кинетических представлений, используя гипотезу о конечности продолжительности удара молекул и представления о длине свободного пробега молекул, чисто эмпирически предложили новый обобщенный закон теплопроводности, в котором появилось дополнительное слагаемое $\tau \frac{\partial q}{\partial t}$, учитывающее дискретную молекулярную структуру среды и отвечающее за инерционность тепла. В этом слагаемом τ — время релаксации, т. е. время установления термодинамического равновесия между тепловым потоком и градиентом температуры. Тогда обобщенный закон переноса запишется в следующем виде:

$$\tau \frac{\partial q}{\partial t} + q = -A \operatorname{grad} U. \quad (3)$$

Это дополнительное слагаемое, с одной стороны, позволяет оставаться на уровне макроскопических параметров среды при описании процессов переноса потенциала и не опускаться до уровня молекулярной физики, а с другой стороны, оно учитывает дискретную структуру этой среды. Введение этого слагаемого теоретически обосновал А. В. Лыков [10] в рамках неравновесной феноменологической термодинамики как следствие обобщения соотношения Онзагера для потоков. Классические теории переноса справедливы, если скорость протекания процессов много меньше скорости распространения возмущений в рассматриваемой среде, и такие процессы можно назвать *квазистационарными*.

Ряд работ по теплофизике последних лет В. А. Бубнова [11], А. Г. Шашкова [7], О. Н. Шабловского [12], Г. Н. Кувыркина [13], Г. Я. Бородянского [14], А. С. Макаренко [15], В. Ф. Формалева и И. А. Селина [6] также показали, что для существенно нестационарных процессов теплопроводности гиперболическая модель точнее передает свойства процесса теплопереноса.

Продолжая развивать математическую модель исследуемого процесса, заменим постоянный коэффициент тепловой релаксации τ на функцию от времени $k = k(t)$, а возможно, и $k = k(t, x)$, где $k = 0$ в области параболичности оператора теплопроводности смешанного типа (гиперболо-параболического) второго порядка, а также рассмотрим обратную задачу для установления $k = k(t, x)$ по известным экспериментальным данным. Принимая в качестве решения задачи структурной идентификации математической модели со смешанным оператором теплопроводности с установленным $k = k(t, x)$, в дальнейшем можно

решать различные другие задачи параметрической идентификации, т. е. уточнять другие коэффициенты уравнения.

Для одномерного по пространственным переменным гиперболического уравнения теплопроводности опубликовано достаточно много различных аналитических и численных исследований. Можно порекомендовать работы [7, 10], где имеется сравнение решений классического параболического и обобщенного гиперболического уравнений теплопроводности. Главным выводом является также то, что при малых временах и при высокоинтенсивных тепловых нагрузках гиперболическая математическая модель лучше отображает перенос тепла. В одномерном случае приведем для примера численное решение смешанного уравнения теплопроводности в среде Mathcad-15 [16].

В работах [17, 18] приведены теоретическое обоснование, алгоритм и разностные схемы численного расчета для внутренних точек дискретного разбиения области задания более общего гипербола-параболического уравнения. В настоящей работе, более тесно связанной с процессом тепломассообмена, сконцентрируемся на более подробном описании разностных схем для граничных точек области задания при введении краевых условий третьего рода на основе сохранения теплового баланса и консервативности всей схемы.

1. Постановка двумерной задачи

Рассмотрим уравнение смешанного типа в частных производных 2-го порядка

$$k(\tau) \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} + \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q_v(x, y, \tau) \quad (4)$$

в цилиндрической области $G = \Omega \times [T_1, T_2]$, $\Omega = [0, l_x] \times [0, l_y]$; $T_1 < 0$, $T_2 > 0$, $l_x > 0$, $l_y > 0$; $\Gamma = \gamma \times [T_1, T_2]$, $\gamma = \partial\Omega$. При этом $k(\tau) = 0$, $\tau \leq 0$; $k(\tau) > 0$, $\tau > 0$; $(x, y, \tau) \in G$, т. е. при $\tau \leq 0$ уравнение (4) параболическое, а при $\tau > 0$ гиперболическое; λ — коэффициент температуропроводности ($\lambda = 70$ из экспериментальных данных), k — коэффициент тепловой релаксации [10], q_v — джоулево тепло (внутренние источники тепла), $q_v = 0$ при $\tau > 0$.

Краевая задача. Найти решение уравнения (4) в области G такое, что

$$\left[\mp \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha_{0x, lx} T \right]_{x=0, lx} = q_{0x, lx}, \quad \left[\mp \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \alpha_{0y, ly} T \right]_{y=0, ly} = q_{0y, ly}, \quad (5)$$

$$T(x, y, \tau)|_{\tau=T_1} = T_0(x, y), \quad (6)$$

$\alpha_{0x, lx, 0y, ly}$ и $q_{0x, lx, 0y, ly}$ — коэффициенты теплоотдачи и плотности теплового потока поверхностных источников на границе области Ω соответственно, $T_0(x, y)$ — начальное распределение поля температур в момент времени $\tau = T_1$.

2. Основной результат двумерной задачи

Изобразим область переменных (x, y) прямоугольной формы и введем вначале неравномерную пространственную сетку, показанную на рис. 1:

$$\{x_n, y_m\}_{n=1, m=1}^{N, M}, \quad h_{xn} = x_{n+1} - x_n, \quad h_{ym} = y_{m+1} - y_m,$$

и равномерную сетку по времени: $\{\tau_j\}_{j=0}^J$, $\tau_j = T_1 + j\Delta\tau$. Грани элементарных объемов разместим посередине между узловыми точками.

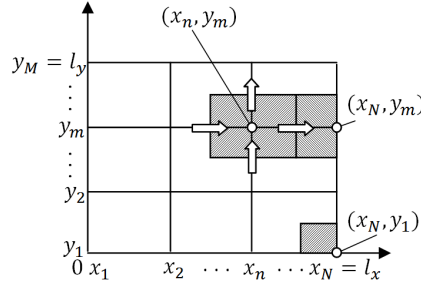


Рис. 1

Сначала составим конечно-разностное уравнение для произвольного внутреннего элементарного объема, содержащего узловую точку (x_n, y_m) . Этот объем окружен четырьмя соседними. Поэтому в уравнении теплового баланса следует учитывать четыре тепловых потока от соседних объемов. Уравнение баланса имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \int_{y_{m-1/2}}^{y_{m+1/2}} k \left(\frac{dT^{j+1}}{d\tau} - \frac{dT^j}{d\tau} \right) dydx + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \int_{y_{m-1/2}}^{y_{m+1/2}} (T^{j+1} - T^j) dydx \\ &= \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[-P_{n+1/2} + P_{n-1/2} - P_{m+1/2} + P_{m-1/2} + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \int_{y_{m-1/2}}^{y_{m+1/2}} q_v dydx \right] d\tau, \end{aligned}$$

где $x_{n\pm 1/2} = (x_n + x_{n\pm 1})/2$ и $y_{m\pm 1/2} = (y_m + y_{m\pm 1})/2$.

Для расчета тепловых потоков $P_{n\pm 1/2}$, $P_{m\pm 1/2}$ используются следующие формулы, основанные на обычном законе Фурье:

$$\begin{aligned} P_{n+1/2} &= \lambda \frac{(u_{n,m} - u_{n+1,m})}{h_n} \frac{(h_m + h_{m-1})}{2}, \\ P_{m-1/2} &= \lambda \frac{(u_{n,m-1} - u_{n,m})}{h_{m-1}} \frac{(h_n + h_{n-1})}{2}, \\ P_{n-1/2} &= \lambda \frac{(u_{n-1,m} - u_{n+1,m})}{h_{n-1}} \frac{(h_m + h_{m-1})}{2}, \\ P_{m+1/2} &= \lambda \frac{(u_{n,m} - u_{n,m+1})}{h_m} \frac{(h_n + h_{n-1})}{2}. \end{aligned}$$

Множители $(h_m + h_{m-1})/2$ и $(h_n + h_{n-1})/2$ соответствуют «площадям» граней элементарного объема, через которые проходят тепловые потоки.

Таким образом, из уравнения теплового баланса получаем следующую неявную схему:

$$k \left[\frac{(u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^j)}{\Delta\tau} - \frac{(u_{n,m}^j - u_{n,m}^{j-1})}{\Delta\tau} \right] \frac{1}{\Delta\tau} \frac{(h_m + h_{m-1})(h_n + h_{n-1})}{4}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^j)}{\Delta\tau} \cdot \frac{(h_m + h_{m-1})(h_n + h_{n-1})}{4} \\
 = & \lambda \left[\frac{(u_{n+1,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1})}{h_n} - \frac{(u_{n,m}^{j+1} - u_{n-1,m}^{j+1})}{h_n} \right] \frac{(h_m + h_{m-1})}{2} \\
 & + \lambda \left[\frac{(u_{n,m+1}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1})}{h_m} - \frac{(u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m-1}^{j+1})}{h_m} \right] \frac{(h_n + h_{n-1})}{2} \\
 & + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \int_{y_{m-1/2}}^{y_{m+1/2}} q_v dydx, \quad (7)
 \end{aligned}$$

где $u_{n,m}^j$ — сеточная функция, соответствующая температуре $T(x_n, y_m, \tau_j)$.

С помощью метода теплового баланса несложно составить разностные уравнения и для граничных элементарных объемов. При этом в уравнениях теплового баланса следует учитывать тепловые потоки на границе области в окружающую среду, выражения для которых вытекают из граничных условий (5).

Например, для объема, прилегающего к границе $x = l_x$ и содержащего узел (x_N, y_m) (см. рис. 1.), получим

$$\begin{aligned}
 k & \left[\frac{(u_{N,m}^{j+1} - u_{N,m}^j)}{\Delta\tau} - \frac{(u_{N,m}^j - u_{N,m}^{j-1})}{\Delta\tau} \right] \frac{1}{\Delta\tau} \frac{(h_m + h_{m-1})h_{N-1}}{4} \\
 & + \frac{(u_{N,m}^{j+1} - u_{N,m}^j)}{\Delta\tau} \frac{(h_m + h_{m-1})h_{N-1}}{4} \\
 = & \left[ql_x - \alpha_{lx} u_{N,m}^{j+1} + \lambda \frac{(u_{N-1,m}^{j+1} - u_{N,m}^{j+1})}{h_{N-1}} \right] \frac{(h_m + h_{m-1})}{2} \\
 & + \left[\lambda \frac{(u_{N,m+1}^{j+1} - u_{N,m}^{j+1})}{h_m} - \lambda \frac{(u_{N,m}^{j+1} - u_{N,m-1}^{j+1})}{h_m} \right] \frac{h_{N-1}}{2} + \int_{x_{N-1/2}}^{x_N} \int_{y_{m-1/2}}^{y_{m+1/2}} q_v dydx.
 \end{aligned}$$

Для элементарных объемов, лежащих в углах, надо учитывать температурные потоки в среду с двух смежных граней. Так, для объема, построенного вокруг узла (x_N, y_1) (см. рис. 1.) и имеющего величину $h_{N-1}h_1/4$, получим

$$\begin{aligned}
 k & \left[\frac{(u_{N,1}^{j+1} - u_{N,1}^j)}{\Delta\tau} - \frac{(u_{N,1}^j - u_{N,1}^{j-1})}{\Delta\tau} \right] \frac{1}{\Delta\tau} \frac{h_1 h_{N-1}}{4} + \frac{(u_{N,1}^{j+1} - u_{N,1}^j)}{\Delta\tau} \frac{h_1 h_{N-1}}{4} \\
 = & \left[ql_x - \alpha_{lx} u_{N,1}^{j+1} + \lambda \frac{(u_{N-1,1}^{j+1} - u_{N,1}^{j+1})}{h_{N-1}} \right] \frac{h_1}{2} \\
 & + \left[\lambda \frac{(u_{N,2}^{j+1} - u_{N,1}^{j+1})}{h_1} + q_{0y} - \alpha_{0y} u_{N,1}^{j+1} \right] \frac{h_{N-1}}{2} + \int_{x_{N-1/2}}^{x_N} \int_0^{h_1/2} q_v dydx.
 \end{aligned}$$

Следует отметить, что если в правой части уравнения (7) заменить индекс времени $j+1$ на j , то получим явную схему.

В ходе численного решения по явной разностной схеме [19, 20] значения $u_{n,m}^{j+1}$ вычисляются непосредственно по значениям предыдущих слоев $u_{n,m}^j$ и $u_{n,m}^{j-1}$. Поэтому общее число арифметических действий, необходимое при переходе со слоя на слой, пропорционально числу N^2 узлов сетки на одном слое. Поскольку условие устойчивости явной схемы для данного случая $\Delta\tau \approx h^2$, для расчета до момента времени T_2 число слоев будет иметь порядок N^2 . Таким образом, общее число арифметических действий будет пропорционально N^4 . Если вести расчеты по неявной (устойчивой) схеме, то можно брать шаги $\Delta\tau$ и h одного порядка, т. е. $\Delta\tau \approx h$. Но в этом случае на каждом слое необходимо решать систему N^2 линейных уравнений. Даже с учетом разреженности матрицы системы для ее решения методом Гаусса потребуется число арифметических действий, пропорциональное N^3 . Поскольку при расчете до момента T_2 надо сделать N шагов по времени, для решения всей задачи потребуется около N^4 действий. Таким образом, для двумерной пространственной задачи как явная, так и неявная схемы приводят к одинаковому объему вычислений. На каждую вычисленную точку при $\tau = T_2$ требуется около N^4 операций.

Чтобы сократить число операций, построим неявную разностную схему по локально одномерному методу, которая является более экономичной по сравнению с упомянутыми ранее схемами.

Для начала введем в рассмотрение вспомогательный [21] (полуцелый) слой $\tau_{j+1/2} = \tau_j + \frac{\Delta\tau}{2}$. Для простоты далее будет использоваться равномерная сетка: $x_n = (n-1)h_x$, $y_m = (m-1)h_y$. Тогда разностная схема (7) при равномерной сетке на полуцелом слое $j + 1/2$ примет вид

$$k \frac{(u_{n,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^j + u_{n,m}^{j-1/2})}{\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^2} + \frac{u_{n,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^j}{\frac{\Delta\tau}{2}} = \Lambda_1 u_{n,m}^{j+1/2} + \Lambda_2 u_{n,m}^j + \frac{q_v}{2}, \quad (8)$$

где

$$\Lambda_1 u_{n,m} = \frac{1}{h_x^2} (u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}), \quad \Lambda_2 u_{n,m} = \frac{1}{h_y^2} (u_{n,m+1} - 2u_{n,m} + u_{n,m-1}).$$

Значения на слое $j + 1$ будут вычисляться аналогичным образом по значениям, полученным на $j + 1/2$ полуцелом слое:

$$k \frac{(u_{n,m}^{j+1} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n,m}^j)}{\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^2} + \frac{u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1/2}}{\frac{\Delta\tau}{2}} = \Lambda_1 u_{n,m}^{j+1/2} + \Lambda_2 u_{n,m}^{j+1} + \frac{q_v}{2}. \quad (9)$$

Вычисление решения разностной схемы (8), (9) осуществляется в два этапа. На первом вычисление значений $u_{n,m}$ на полуцелом слое $\tau_{j+1/2}$ ведется прогонкой в направлении оси $0x$. Второй этап — прогонка на слое τ_j по оси $0y$. Поэтому схему называют *локально одномерной* или *схемой переменных направлений*.

Всего на одном слое осуществляется $2N$ прогонок. Следовательно, число арифметических операций на одном слое пропорционально N^2 . В используемой неявной схеме можем положить $\Delta\tau = h$ и тогда для расчета до момента T_2 по времени надо сделать N шагов. Таким образом, трудоемкость решения всей

задачи оценивается числом, имеющим порядок N^3 , что более чем на порядок лучше по сравнению с вышеописанными схемами.

Из-за наличия граничных условий (7) область сеточной функции $u_{n,m}^j$ разбивается на 9 перечисленных ниже участков. Это связано с тем, что в локально одномерном методе при вычислении сеточной функции $u_{n,m}^{j+1/2}$ на первом полушаге в прогонке вдоль оси $0x$ участвуют помимо $u_{n,m}^j$ соседние по y значения $u_{n,m-1}^j, u_{n,m+1}^j$. На втором полушаге производится прогонка вдоль оси $0y$. При этом область сеточной функции будет точно так же разбиваться на 9 таких же участков.

Локально одномерная схема на пространственной сетке, равномерной по каждой из координат x, y , имеет вид

$$\begin{aligned} u_{n+1,m}^{j+1/2} - \left(\frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{k}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) + 2 \right) u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n-1,m}^{j+1/2} \\ + \frac{h_x^2}{h_y^2} u_{n,m+1}^j + \left(\frac{h_x^2}{\lambda} \left(2 \frac{k}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) - 2 \frac{h_x^2}{h_y^2} \right) u_{n,m}^j \\ + \frac{h_x^2}{h_y^2} u_{n,m-1}^j + \frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{q_v}{2} - \frac{k}{\Delta\tau^2} u_{n,m}^{j-1/2} \right) = 0 \end{aligned}$$

для внутренней точки ($n = 2, \dots, N-1, m = 2, \dots, M-1$);

$$\begin{aligned} - \left(1 + \alpha_{lx} \frac{h_x}{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{k}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) \right) u_{N,m}^{j+1/2} + u_{N-1,m}^{j+1/2} \\ + \frac{1}{2} \frac{h_x^2}{h_y^2} u_{N,m+1}^j + \left(\frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{k}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{2\Delta\tau} \right) - \frac{h_x^2}{h_y^2} \right) u_{N,m}^j \\ + \frac{1}{2} \frac{h_x^2}{h_y^2} u_{N,m-1}^j + \frac{1}{2} \frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{q_v}{2} - \frac{k}{\Delta\tau^2} u_{N,m}^{j-1/2} \right) = 0 \end{aligned}$$

для точки на стороне прямоугольника (например, $n = N, m = 2, \dots, M-1$);

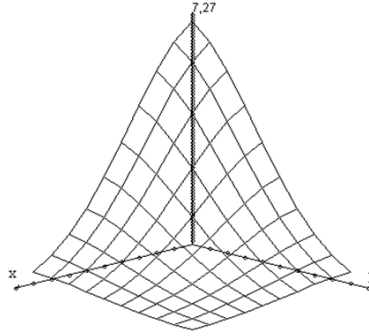
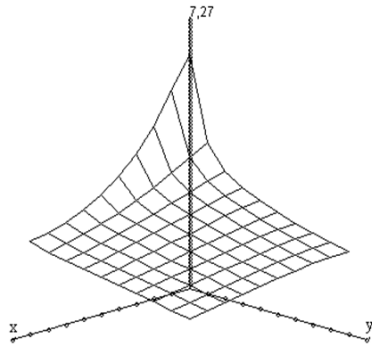
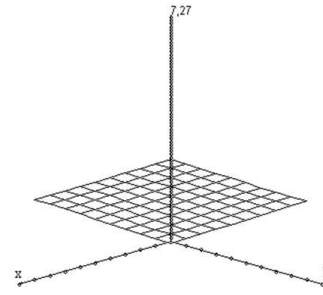
$$\begin{aligned} - \left(1 + \alpha_{lx} \frac{h_x}{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{k}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) \right) u_{N,1}^{j+1/2} + u_{N-1,1}^{j+1/2} + \frac{h_x^2}{h_y^2} u_{N,2}^j \\ + \left(\frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{k}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{2\Delta\tau} \right) - \frac{h_x^2}{h_y^2} - \alpha_{0y} \frac{h_x}{\lambda} \frac{1}{h_y} \right) u_{N,1}^j \\ + \frac{1}{2} \frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{q_v}{2} - \frac{k}{\Delta\tau^2} u_{N,1}^{j-1/2} \right) + q_{lx} \frac{h_x}{\lambda} + q_{0y} \frac{h_x^2}{\lambda} \frac{1}{h_y} = 0 \end{aligned}$$

для угловой точки (например, $n = N, m = 1$).

В качестве примера приводим расчеты температурных полей на рис. 2–4, где показан процесс остывания электрической дуги в одной из математических моделей [22].

3. Постановка трехмерной задачи

Перейдем теперь к рассмотрению осесимметрической трехмерной математической модели с добавлением аксиальной координаты z , т. е. с учетом газодинамики дугового разряда, и приведем постановку смешанной краевой задачи,

Рис. 2. Распределение температуры в начальный момент времени $\tau = T_1$ Рис. 3. Распределение температуры
в момент времени $\tau = 0$ Рис. 4. Распределение температуры
в момент времени $\tau = T_2$

являющейся модификацией задачи Рагаллера [23], где параболическое уравнение энергии заменено на два уравнения (10):

Найти поля температуры и скорости системы

$$\begin{aligned}
 k \frac{\partial q}{\partial t} + q &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_r) = 0, \\
 \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \rho v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\eta r \frac{\partial v_z}{\partial r}), \\
 \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= v_z \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r q),
 \end{aligned} \tag{10}$$

удовлетворяющие начально-краевым условиям

$$\begin{aligned}
 T|_{t=0} &= \varphi_1(r); \quad T|_{r=1} = 0, 3; \quad \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=0} = 0; \\
 \frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0} &= 0; \quad q|_{t=0} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{t=0} = \varphi'_1(r); \\
 q|_{r=0} &= 0; \quad v_z|_{t=0} = v_z|_{r=1} = \left(\frac{2p_0}{\rho} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)\right)^{0,5}; \\
 v_z|_{z=0} &= 0; \quad v_r|_{t=0} = 0; \quad v_r|_{r=0} = 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Система уравнений газодинамики, применяемая в работах Рагаллера [23], является частным случаем системы (10) при $k = 0$. Здесь пренебрегается аксиальными теплопроводностью и вязкостью. Импульс предполагается не зависящим от радиальной координаты. Эффекты турбулентного переноса включаются в коэффициенты радиальных теплопроводности и вязкости. Влияние геометрии разрядной трубки отражено в системе уравнений (10) посредством члена с продольным импульсом $p(z)$, для которого хорошей аппроксимацией в момент времени, близкий к моменту прерывания тока, является продольное распределение давления газа.

Для решения поставленных краевых задач для этих систем был составлен и отлажен комплекс программ на языке программирования Фортран для РС с помощью метода изотерм [4]. В трехмерном пространстве были введены радиальная и аксиальная дискретизации и дифференциальная форма уравнений системы была преобразована к изотермам.

Дискретизация основана на следующих фундаментальных свойствах этой гиперболической системы дифференциальных уравнений в частных производных: соседние зоны, расположенные ниже по течению потока, могут быть рассчитаны зона за зоной, начиная с точки стагнации, где система ведет себя как дуга цилиндрической формы и эволюционирует независимо от областей, находящихся ниже по течению. Для каждого интервала времени рассчитываем все зоны в осевом направлении, чтобы также включить в модель токонесящие фазы (сильноточную дугу и бестоковый режим). Этот расчет необходим для вычисления в каждый данный момент полного сопротивления дуги. Средние значения по зоне определяются как среднеарифметические значения по двум соседним изотермам, служащим границами зоны.

Распределение аксиального давления определяется геометрией нагретого газа и изначально заданной разницей в давлении, которая затем меняется в расчете. В данной работе изучается только случай свободно остывающего шнура электрического разряда, т. е. $Q(T) = 0$, а в этом режиме можно пренебречь излучательным переносом энергии. Кроме начального профиля температуры необходимо задать начальное поле скоростей, для которого хорошую аппроксимацию можно получить в адиабатическом приближении (11). Сетка изотерм выбиралась следующим образом: самая дальняя от центра изотерма равна тем-

пературе холодного газа, т. е. 300°K , начальное приращение — 300°K , начальное число изотерм равно 25. После уменьшения числа изотерм в два раза между старыми изотермами проводятся новые [4, 5].

Заключение

1. По приведенным разностным схемам проводится численный расчет на языках Фортран и С++ с гладкими коэффициентами k и q_v с выводом полей температур в различные моменты времени, вид которых говорит об устойчивости примененных разностных схем.

2. В работах [19, 20] численный расчет предлагалось проводить по обычным явной и неявной схемам, которые почти на порядок менее экономичны, чем предложенная здесь локально одномерная схема. Кроме того, в них используются краевые условия первого рода.

3. Система дифференциальных уравнений в частных производных (10), (11) является одним из этапов обобщения классических уравнений Навье — Стокса на пути к более общим уравнениям Бернетта, вытекающим из молекулярно-кинетической теории газов [24].

ЛИТЕРАТУРА

1. Полтев А. И. Конструкции и расчет элегазовых аппаратов высокого напряжения // Л.: Энергия, 1979.
2. Буянтуев С. Л., Беспрозванных М. Н., Баторов С. С., Бородянский Г. Я. Способ гашения сильноточной дуги высоковольтного выключателя // Автор. свидетельство СССР №1634042. Гос. рег. 08.10.1990.
3. Буянтуев С. Л., Ханхасаев В. Н. Численное исследование нестационарных процессов в нуле тока // Сб. докладов Всесоюзного семинара проблемного совета ФНЦ АН СССР «Нестационарные дуговые и приэлектродные процессы в электрических аппаратах и плазматронах». Алма-Ата: ИММ АН КазССР, 1991. С. 29–36.
4. Буянтуев С. Л., Ханхасаев В. Н. Об одном обобщении уравнений Навье — Стокса в математических моделях электрической дуги в спутном потоке газа в момент прерывания тока // Электричество. 1996. № 11. С. 17–23.
5. Ханхасаев В. Н., Буянтуев С. Л. Численный расчет одной математической модели электрической дуги в потоке газа // Сб. тр. междунар. науч.-практ. конф. «Энергосберегающие и природоохранные технологии на Байкале», Улан-Удэ: ВСГТУ; БГУ, 2001. С. 168–172.
6. Формалев В. Ф., Селин И. А., Кузнецова Е. Л. Возникновение и распространение тепловых волн в нелинейном анизотропном пространстве // Изв. РАН. Сер. Энергетика. 2010. № 3. С. 136–141.
7. Пашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности // М.: УРСС, 2004.
8. Cattaneo G. Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminent le paradoxe d'une propagation instantanee // Compt. Rendus. 1958. V. 247, № 4. P. 431–433.
9. Vernotte P. Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur // Compt. Rendus. 1958. V. 246, № 22. P. 3154–3155.
10. Лыков А. В. Теплообмен. М.: Энергия, 1972.
11. Бубнов В. А. Молекулярно-кинетическое обоснование уравнения переноса тепла // Инж.-физ. журн. 1975. Т. 28, № 4. С. 670–676.
12. Шабловский О. Н. Распространение плоской ударной тепловой волны в нелинейной среде // Инж.-физ. журн. 1985. Т. 49, № 3. С. 436–443.

13. Кувыркин Г. Н. Термодинамический вывод гиперболического уравнения теплопроводности // Теплофизика высоких температур. 1987. Т. 25, № 1. С. 78–82.
14. Бородинский Г. Я. Релаксационная модель динамики электрической дуги // Тез. докладов 7 Всесоюзной сессии науч. совета по проблемам «Физика низкотемпературной плазмы». Улан-Удэ, 1988. С. 19.
15. Даниленко В. А., Кудинов В. М., Макаренко А. С. Влияние эффектов памяти на образование диссипативных структур при быстропротекающих процессах. Препринт № 83-1 / АН УССР, Ин-т электросварки. Киев, 1983. 58 с.
16. Ханхасаев В. Н., Миждон Г. А. Алгоритм численного расчета смешанного уравнения теплопроводности в одномерном случае // Матер. 6 Междунар. конф. «Математика, ее приложения и математическое образование». Улан-Удэ, 2017. С. 357–359.
17. Ханхасаев В. Н., Местникова Н. Н. Схема переменных направлений для численного решения гипербола-параболического уравнения // Сб. тр. междунар. конф. «Кубатурные формулы, методы Монте-Карло и их приложения». Ин-т космич. и информ.технол. Красноярск: СФУ, 2011. С. 117–120.
18. Ханхасаев В. Н., Местникова Н. Н., Ханхасаева Я. В. Численное решение гипербола-параболического уравнения по схеме переменных направлений // Сб. тр. междунар. науч.-практ. конф. «Инновационные технологии в науке и образовании». Улан-Удэ: БГУ, 2011. С. 79–82.
19. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
20. Романова Н. А. О сходимости разностных схем одной краевой задачи для уравнений смешанного типа. Дис. ... канд. физ-мат. наук / Якутск: Якутский гос. университет, 1994.
21. Дульнев Г. Н. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена // М.: Высшая школа, 1990.
22. Ханхасаев В. Н., Дармахаев Э. В. Схема переменных направлений численного решения смешанного уравнения теплопроводности // Матер. семинара с междунар. участием «Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа». Улан-Удэ, 2015. С. 122–127.
23. Ragaller K., Egli W., Brand K. Dielectric recovery of an axially blown SF₆-arc after current zero // IEEE. Transactions on Plasma Sci. 1982. V. PS-10, № 3. P. 154–161.
24. Фердигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.

Статья поступила 1 февраля 2018 г.

Ханхасаев Владислав Николаевич, Дармахаев Эрдэни Владимирович
Восточно-Сибирский гос. технологический университет,
кафедра высшей математики
ул. Ключевская, 40А, стр. 1, Улан-Удэ 670013
hanhvladnick@mail.ru, erdenid.90@mail.ru

ON SOME APPLICATIONS
OF THE HYPERBOLIC HEAT EQUATION
AND THE METHODS FOR SOLVING IT
V. N. Khankhasaev and E. V. Darmakheev

Abstract: Creation of new technological processes based on the use of high-intensity energy fluxes makes it necessary to take into account the final rate of heat propagation when determining the temperature state. This account can be realized with the help of the hyperbolic heat equation obtained by A. V. Lykov in the framework of nonequilibrium phenomenological thermodynamics as a consequence of the generalization of the Fourier law for flows and the heat balance equation. In the previous works by V. N. Khankhasaev, the process of switching off the electric arc in a spiral gas flow was simulated using this equation. In this paper, a mathematical model of this process is developed with the addition of a period of steady burning of the arc until the moment of disconnection and replacement of the strictly hyperbolic heat conduction equation by a hyperbolic-parabolic equation. For the resulting mixed heat conduction equation, a number of boundary value problems in the Fortran and Matcad software environments are correctly posed and numerically solved, obtaining temperature fields that are in good agreement with the available experimental data.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12772

Keywords: hyperbolic-parabolic equations, hyperbolic heat equation, alternating direction scheme, Navier–Stokes equations, heat balance.

REFERENCES

1. Poltev A. I., Construction and Calculation of High-Voltage SF6 Apparatuses [in Russian], Energia, Leningrad (1979).
2. Buyantuev S. L., Besprozvannykh M. N., Batorov S. S., and Borodyansky G. Ya., "Method of quenching a high-current arc of a high-voltage switch," USSR Authors' Cert. No. 1634042, Gos. Reg. 08.10.1990.
3. Buyantuev S. L. and Khankhasaev V. N., "Numerical investigation of nonstationary processes at the current zero [in Russian]," in: Sb. Dokl. Vsesoyuz. Semin. "Nonstationary Arc and Near-Electrode Processes in Electrical Apparatuses and Plasma Torches", pp. 29–36, Inst. Mat. Mekh. Akad. Nauk Kazakh. SSR, Alma-Ata (1991).
4. Buyantuev S. L. and Khankhasaev V. N., "On a generalization of the Navier–Stokes equations in mathematical models of an electric arc in a spiral gas flow at the moment of current interruption [in Russian]," *Elektrichestvo*, No. 11, 17–23 (1996).
5. Khankhasaev V. N. and Buyantuev S. L., "Numerical calculation of a mathematical model of an electric arc in a gas flow [in Russian]," in: Sb. Trudov Mezhdunar. Nauchn.-Prakt. Konf. "Energy Saving and Environmental Technologies at Baikal", pp. 168–172, Ulan-Ude (2001).
6. Formalev V. F., Selin I. A., and Kuznetsova E. L., "The occurrence and propagation of thermal waves in a nonlinear anisotropic space [in Russian]," *Izv. Ross. Akad. Nauk., Ser. Energetika*, No. 3, 136–141 (2010).
7. Shashkov A. G., Bubnov V. A., and Yanovsky S. Yu., Wave Phenomena of Thermal Conductivity [in Russian], URSS, Moscow (2004).

8. Cattaneo G., "Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée," C. R. Acad. Sci., Paris, **247**, No. 4, 431–433 (1958).
9. Vernotte P., "Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur," C. R. Acad. Sci., Paris, **246**, No. 22, 3154–3155 (1958).
10. Lykov A. V., Heat and Mass Transfer [in Russian], Energia, Moscow (1972).
11. Bubnov V. A., "Molecular-kinetic substantiation of the heat transfer equation [in Russian]," Inzh.-Fiz. Zh., **28**, No. 4, 670–676 (1975).
12. Shablovsky O. N., "Propagation of a plane shock heat wave in a nonlinear medium [in Russian]," Inzh.-Fiz. Zh., **49**, No. 3, 436–443 (1985).
13. Kuvyrkin G. N., "Thermodynamic derivation of the hyperbolic heat equation [in Russian]," Termofiz. Vysokih Temperatur **25**, No. 1, 78–82 (1987).
14. Borodyansky G. Ya., "Relaxation model of electric arc dynamics [in Russian]," in: Tez. Dokl. 7th Vsesoyuz. Sessii Nauchn. Soveta "Low-Temperature Plasma Physics", pp. 19, Ulan-Ude (1988).
15. Danilenko V. A., Kudinov V. M., and Makarenko A. S., "Influence of memory effects on the formation of dissipative structures during fast processes [in Russian]," Preprint Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Elektrosvarki, No. 83-1, Kiev (1983), 58 p.
16. Khankhasaev V. N. and Mizhidon G. A., "Algorithm for numerical calculation of the mixed heat equation in the one-dimensional case," in: Proc. 6th Int. Conf. "Mathematics, its Applications and Mathematical Education", pp. 357–359, Ulan-Ude (2017).
17. Khankhasaev V. N. and Mestnikova N. N., "A scheme of alternating directions for the numerical solution of a hyperbolic-parabolic equation [in Russian]," in: Sb. Trudov Mezhdunar. Konf. "Cubature Formulas, Monte Carlo Methods and Their Applications", pp. 117–120, Inst. Kosmich. Informats. Tekhnol. Sib. Feder. Univ., Krasnoyarsk (2011).
18. Khankhasaev V. N., Mestnikova N. N., and Khankhasaeva Ya. V., "Numerical solution of a hyperbolic-parabolic equation by a scheme of alternating directions [in Russian]," in: Sb. Trudov Mezhdunar. Nauchn.-Prakt. Konf. "Innovative Technologies in Science and Education", pp. 79–82, Buryatsk. Gos. Univ., Ulan-Ude (2011).
19. Ladyzhenskaya O. A., Boundary-Value Problems of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1973).
20. Romanova N. A., On the convergence of difference schemes of a boundary-value problem for equations of mixed type. Diss. kand. fiz.-mat. nauk (01.01.02), Yakutsk. Gos. Univ., Yakutsk, 1994, 109 p.
21. Dulnev G. N., The Use of Computers for Solving Heat Transfer Problems [in Russian], Vyssh. Shkola, Moscow (1990).
22. Khankhasaev V. N. and Darmakheev E. V., "A scheme of alternating directions for the numerical solution of the mixed heat equation [in Russian]," in: Mat. Semin. "Aktual'nye Voprosy Veshchestvennogo i Funktsional'nogo Analiza", pp. 122–127, Ulan-Ude (2015).
23. Ragaller K., Egli W., and Brand K., "Dielectric recovery of an axially blown SF₆-arc after current zero," IEEE Trans. Plasma Sci., **PS-10**, No. 3, 154–161 (1982).
24. Ferziger J. and Kaper G., Mathematical Theory of Transport Processes in Gases [in Russian], Mir, Moscow (1976).

Submitted February 1, 2018

Khankhasaev Vladislav Nikolaevich, Darmakheev Erdeni Vladimirovich
 East-Siberian State University of Technology and Management,
 40B, Building 1 Klyuchevskaya Street, Ulan-Ude, 670013 Russia
 hanhvladnick@mail.ru, erdeni.90@mail.ru