

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Филиал в г. Златоусте
Кафедра «Математика и вычислительная техника»

681.3.06(07)
С594

Е.В. Соколова, Е.Н. Заскалина

MICROSOFT EXCEL
В ИНЖЕНЕРНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Сборник заданий

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2007

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ

1. Условие задачи

Найти корни уравнения $x^3 - 2x^2 - 4x = -7$ на отрезке $[-3, 3]$.

2. Постановка задачи

Определение корней уравнения разбивается на два этапа. Во-первых, этап отделения корня, то есть выделения достаточно малого промежутка, содержащего единственный корень. Приведя уравнение к виду $f(x) = 0$, воспользуемся одним из способов отделения корней – проанализируем таблицу значений функции $f(x)$, построенной с достаточно малым шагом. Очевидно, что на границе окрестности, содержащей один корень, функция $f(x)$ меняет свой знак.

Второй этап – это уточнение корня, то есть определение значения корня с заданной степенью точности. Для этого используем команду **Подбор параметра...** меню **Сервис**. Относительную погрешность можно задать на вкладке **Вычисления** команды **Параметры...** меню **Сервис**. По умолчанию эта величина составляет значение 0,001.

3. Решение задачи

В начале определим, сколько корней имеет уравнение на данном отрезке. Для чего построим таблицу значений функции $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 7$ с шагом 0,3, как показано на рис. 1. Из таблицы следует, что уравнение имеет 3 корня: первый – на отрезке $[-2,1; -1,8]$, второй – на отрезке $[1,2; 1,5]$, а третий – на отрезке $[2,4; 2,7]$.

	В	С	D
	-3	-26,00	
	-2,7	-16,46	
	-2,4	-8,74	
	-2,1	-2,68	
	-1,8	1,89	
	-1,5	5,13	
	-1,2	7,19	
	-0,9	8,25	
	-0,6	8,46	
	-0,3	7,99	
	0	7,00	
	0,3	5,65	
	0,6	4,10	
	0,9	2,51	
	1,2	1,05	
	1,5	-0,13	
	1,8	-0,85	
	2,1	-0,96	
	2,4	-0,30	
	2,7	1,30	
	3	4,00	

Рис 1. Таблица для отделения корней уравнения

Для нахождения более точного значения первого корня, введем в ячейку **E5** середину первого найденного интервала изоляции корня – 1,95, в ячейку **F5** по-

местим функцию $f(x)$. Выделив ячейку **F5**, вызовем команду **Подбор параметра** меню **Сервис**. В диалоговом окне (рис. 2) адрес **\$F\$5** появится автоматически.

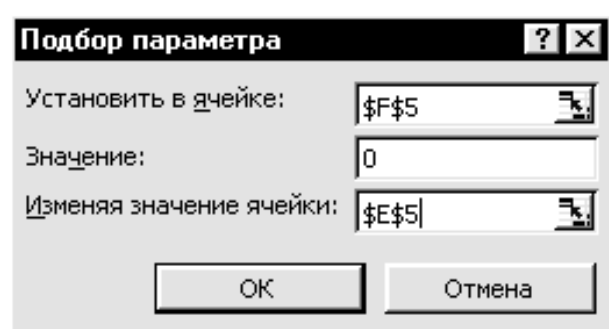


Рис. 2. Диалоговое окно подбора параметра

В поле **Значение:** введем **0**, а в поле **Изменяя значение ячейки:** ссылку на **\$E\$5**, щелкнув на ней мышью. Нажав **ОК**, получим в ячейке **\$E\$5** искомое значение корня. Аналогичные действия необходимо проделать и для нахождения других корней. Результаты расчетов приведены на рис. 3.

=E20^3-2*E20^2-4*E20+7					
В	С	Д	Е	Ф	С
-2,4	-8,74				
-2,1	-2,68		-1,94	0,00056	
-1,8	1,89				
0,9	2,51				
1,2	1,05		1,46	0,00004	
1,5	-0,13				
2,1	-0,96				
2,4	-0,30		2,47	-0,00001	
2,7	1,30				
3	4,00				

Рис. 3. Фрагмент таблицы со значениями корней

Варианты заданий представлены в табл. 1.

ТАБУЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ

1. Условие задачи

Протабулировать функцию, т.е. для каждого значения x из предложенного интервала найти значение функции:

$$y(x) = 1,5 \cdot x + \sqrt{e^{1-x} + 5 \cdot \sin^2(x - 1,34)}, \quad x \in [0, 2], \quad \Delta x = 0,1.$$

2. Постановка задачи

На интервале табуляции, где функция определена и непрерывна, можно использовать традиционный способ задания переменной как дискретной величины.

3. Решение задачи

Таблица 1

№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные
1	$f(x) = e^{x-1} - x^3 - x,$ $x \in [0, 1]$	16	$f(x) = x^4 + 3x^3 - 9x - 9,$ $x \in [1, 2]$
2	$f(x) = x - \frac{1}{3 + \sin(3,6x)},$ $x \in [0, 1]$	17	$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4,$ $x \in [-1, 0]$
3	$f(x) = \arccos x - \sqrt{1 - 0,3x^3},$ $x \in [0, 1]$	18	$f(x) = x^4 + 4x^2 + x - 3,$ $x \in [0, 1]$
4	$f(x) = \sqrt{1 - 0,4x^2} - \arcsin x,$ $x \in [0, 1]$	19	$f(x) = x^4 - 10x^2 - 16x + 5,$ $x \in [0, 1]$
5	$f(x) = 3x - 14 + e^x - e^{-x},$ $x \in [1, 3]$	20	$f(x) = x^4 - 6x^2 + 12x - 8,$ $x \in [1, 2]$
6	$f(x) = \sqrt{2x^2 + 1,2} - \cos x - 1,$ $x \in [0, 1]$	21	$f(x) = x^4 - 9x^2 + 10x - 10,$ $x \in [-4, -3]$
7	$f(x) = \cos\left(\frac{2}{x}\right) - 2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x},$ $x \in [1, 2]$	22	$f(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 3,$ $x \in [-3, -2]$
8	$f(x) = 0,1x^2 - x \ln x, x \in [1, 2]$	23	$f(x) = x^4 - 7x^2 - 8x - 6,$ $x \in [3, 4]$
9	$f(x) = 0,25x^3 + x - 2,$ $x \in [1, 2]$	24	$f(x) = x^4 + 3x^2 - 2,$ $x \in [1, 2]$
10	$f(x) = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2} - x,$ $x \in [2, 3]$	25	$f(x) = x^2 - 3x + 2,$ $x \in [2, 4]$
11	$f(x) = 3x - 4 \ln x - 5,$ $x \in [2, 4]$	26	$f(x) = x^2 + 3x + 2,$ $x \in [-1, 3]$
12	$f(x) = e^x - e^{-x} - 2,$ $x \in [0, 1]$	27	$f(x) = x^2 - x - 2,$ $x \in [-3, 1]$
13	$f(x) = \sqrt{1 - x} - \operatorname{tg} x,$ $x \in [0, 1]$	28	$f(x) = x^2 - 8x + 7,$ $x \in [1, 5]$
14	$f(x) = 1 - x + \sin x - \ln(1 + x),$ $x \in [1, 2]$	29	$f(x) = x^2 + 4x + 4,$ $x \in [-2, 2]$
15	$f(x) = x^5 - x - 0,2,$ $x \in [1, 2]$	30	$f(x) = x^2 - 4x + 4,$ $x \in [2, 4]$

Аргумент изменяется с постоянным шагом, что можно использовать для быстрого ввода значений этого ряда. Введем в ячейку **A3** число 0, в **A4** – число 0,1. Выделим эти ячейки и маркером автозаполнения сформируем весь ряд изменения аргумента. Теперь в ячейку **B3** введем формулу, имеющую вид

$$=1,5*A3+КОРЕНЬ(EXP(-A3+1)+5*SIN(A3-1,34)^2).$$

Далее скопируем формулу в другие ячейки столбца **B**. Отформатируем данные первого столбца, указав один знак в дробной части, для второго столбца назначим в дробную часть 3 знака. В окончательном виде таблица значений аргумента x и соответствующих им значений функции $y(x)$ показана на рис. 4.

x	$y(x)$
0,0	2,731
0,1	2,783
0,2	2,821
0,3	2,844
0,4	2,855
0,5	2,853
0,6	2,840
0,7	2,820
0,8	2,795
0,9	2,769
1,0	2,747
1,1	2,740
1,2	2,757
1,3	2,815
1,4	2,930
1,5	3,106

Рис. 4. Табулирование функции

Для большей наглядности построим график значений этой функции (рис. 5). В окне первого шага **Мастера диаграмм** на закладке **Стандартные** выберем тип **График**. В окне второго шага укажем диапазон вычисленных данных и расположение рядов – **в столбцах**. На вкладке **Ряд** укажем столбец аргументов в строке **Подписи оси X**. Далее внесем название графика, а на закладке **Линии сетки** активизируем опции **основные линии** по обеим осям.



Рис. 5. График функции $y(x)$

Варианты заданий представлены в табл. 2.

Таблица 2

№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные
1	$y = e^x \cdot \cos(2x),$ $x \in [0; 2], \Delta x = 0,1$	16	$y = (x^3 + 1) \cdot e^x,$ $x \in [0; 3], \Delta x = 0,2$
2	$y = \ln x + 1 \cdot \sin(3x),$ $x \in [0; 3], \Delta x = 0,2$	17	$y = \sqrt{x} \cdot \cos x,$ $x \in [0; 2], \Delta x = 0,2$
3	$y = \frac{e^{x-4}}{x},$ $x \in [1; 10], \Delta x = 0,5$	18	$y = \frac{x^{19} \cdot \sin^3(x^2 + 3x)}{\ln^2 x },$ $x \in [2; 6], \Delta x = 0,8$
4	$y = \sqrt{x} \cdot \sin(x^2 - 3x),$ $x \in [0; 2], \Delta x = 0,1$	19	$y = x^3 \cdot \cos^6 x + 5x^4,$ $x \in [1; 3], \Delta x = 0,5$
5	$y = x \cdot e^{x^2 - 3x + 1},$ $x \in [-1; 1], \Delta x = 0,1$	20	$y = \ln x^2 - 5x + 2 \cdot \frac{1}{x},$ $x \in [1; 3], \Delta x = 0,2$
6	$y = (x^3 + 3x + 5) \cdot \sin(x),$ $x \in [-1; 1], \Delta x = 0,2$	21	$y = \ln x \cdot \sqrt{x},$ $x \in [1; 4], \Delta x = 0,2$
7	$y = \frac{6x^2 \cdot e^{3x}}{\sqrt[3]{x}},$ $x \in [1; 2], \Delta x = 0,1$	22	$y = \frac{8x \cdot \cos x}{(x^3 + \sqrt{x})},$ $x \in [3; 5], \Delta x = 0,4$
8	$y = \frac{\cos^3(\sqrt[3]{x} + 4x)}{x},$ $x \in [2; 4], \Delta x = 0,2$	23	$y = \frac{x^7 \cdot \operatorname{tg}^4 x}{e^{2x}},$ $x \in [0; 1], \Delta x = 0,06$
9	$y = e^x \cdot \sin(\ln x),$ $x \in [10; 100], \Delta x = 2$	24	$y = e^x \cdot \sin x,$ $x \in [0; 3], \Delta x = 0,3$
10	$y = x^2 \cdot \cos x - 1 ,$ $x \in [3; 4], \Delta x = 0,03$	25	$y = \ln(x + 2) \cdot e^{2x},$ $x \in [0; 4], \Delta x = 0,4$
11	$y = \arcsin^2(x^3),$ $x \in [-1; 1], \Delta x = 0,1$	26	$y = (x^2 + 1/x + \sqrt{x}) \cdot e^{x^2},$ $x \in [1; 40], \Delta x = 2$

№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные
12	$y = \frac{\sin(x^2 - 2)}{e^x},$ $x \in [0; 10], \Delta x = 1$	27	$y = \frac{\ln(x^2 + 2)}{\sqrt{x}},$ $x \in [2; 10], \Delta x = 0,5$
13	$y = \cos^2 x \cdot \ln x ,$ $x \in [1; 2], \Delta x = 0,05$	28	$y = 2^{ x } \cdot (x^2 + 4),$ $x \in [1; 3], \Delta x = 0,2$
14	$y = 31 \cdot x^2 \cdot \sin(e^x),$ $x \in [2; 50], \Delta x = 4$	29	$y = e^x \cdot \cos(x),$ $x \in [0; 1], \Delta x = 0,1$
15	$y = \frac{\sqrt{x} + \operatorname{tg} x}{x^2},$ $x \in [1; 3], \Delta x = 0,2$	30	$y = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 16}},$ $x \in [0; 2], \Delta x = 0,1$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

1. Условие задачи

Вычислить значение функции в зависимости от условия. Использовать встроенную функцию **ЕСЛИ**

$$y = \begin{cases} \sin x, & x < -1; \\ \cos x, & -1 \leq x < 1; \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$$

2. Постановка задачи

Задана функция $y(x)$, имеющая разрывы в точках -1 и 1 . Для вычисления ее значений удобно использовать встроенную функцию **ЕСЛИ**, позволяющую наряду с единственным условием в качестве аргумента использовать другие функции, в том числе функцию **ЕСЛИ**. Такая вложенная структура позволяет учесть все точки разрыва.

3. Решение задачи

В одном из столбцов (рис. 6) располагают значения аргумента.

В данном случае – в виде прогрессии с постоянным шагом, что вовсе не обязательно. Весь диапазон пунктом **Вставить...** команды **Имя** меню **Вставка** назван вполне понятным именем **х**. Соседний столбец заполнен с помощью маркера автозаполнения одной формулой:

$$=\text{ЕСЛИ}(\text{х} < -1; \text{SIN}(\text{х}); \text{ЕСЛИ}(\text{х} > 1; \text{LN}(\text{х}); \text{COS}(\text{х}))).$$

В формуле используется вложенная функция **ЕСЛИ**, которая и вычисляет значение **Y(x)** в зависимости от значения самого аргумента **х**.

	A	B	C	D	E
1	x	y(x)			
2	-5	=ЕСЛИ(x<-1;SIN(x);ЕСЛИ(x>1;LN(x);COS(x)))			
3	-4,5	0,978			
4	-4	0,757			
5	-3,5	0,351			
6	-3	-0,141			
7	-2,5	-0,598			
8	-2	-0,909			
9	-1,5	-0,997			
10	-1	0,540			
11	-0,5	0,878			
12	0	1,000			
13	0,5	0,878			
14	1	0,540			
15	1,5	0,405			
16	2	0,693			
17	2,5	0,916			
18	3	1,099			
19	3,5	1,253			
20	4	1,386			

Рис. 6. Вычисление значений функции по условию

Варианты заданий представлены в табл. 3.

Таблица 3

№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные
1	$y = \begin{cases} \sqrt{x^3 - \cos x}, & x \geq 0; \\ x \cdot \ln x , & x < 0 \end{cases}$	16	$y = \begin{cases} x^2 + \cos^3(x^2 - 3x), & x > 4; \\ \frac{\sin x - \sqrt{x} }{25x}, & x \leq 4 \end{cases}$
2	$y = \begin{cases} \sin(x^2 + \sqrt{x}), & x \geq 0; \\ x^2 \cdot \operatorname{tg}(\sqrt[3]{x}), & x < 0 \end{cases}$	17	$y = \begin{cases} x \cdot \ln \sin x + 1 \cdot e^{2x^3}, & x < 0; \\ \cos^3(x^2 - 2x + 3), & x \geq 0 \end{cases}$
3	$y = \begin{cases} \ln(3x^4 + 0,8x^2), & x \geq 0; \\ \frac{\sqrt{ x } - \sqrt[3]{x^2}}{\sin x}, & x < 0 \end{cases}$	18	$y = \begin{cases} -x \cdot \sin(x^2) \cdot \ln(x^2 + \sqrt{x}) , & x > 0; \\ 2, & x = 0; \\ x \cdot e^{x^4}, & x < 0 \end{cases}$
4	$y = \begin{cases} \sin(x^2 + 2x - \sqrt{x}), & x \geq 0; \\ \sqrt{ \cos x + x}, & x < 0 \end{cases}$	19	$y = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 2; \\ (x - 2)^2 \cdot e^{ x } \cdot \cos^3(4x), & 0 \leq x \leq 2; \\ \ln x , & x < 0 \end{cases}$

№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные
5	$y = \begin{cases} 2^x, & x > 0; \\ 5, & x = 0; \\ x^2 - \sqrt{ x^3 } + \operatorname{tg} x, & x < 0 \end{cases}$	20	$y = \begin{cases} e^{x+5}, & x > 1; \\ 4\sqrt{x} - x , & 0 \leq x < 1; \\ \ln \sin(x^2) + 15x , & x < 0 \end{cases}$
6	$y = \begin{cases} x \cdot \sqrt{ x }, & x \leq 0; \\ x^2 \cdot \ln \cos x , & 0 < x \leq 14; \\ 10 - x, & x > 14 \end{cases}$	21	$y = \begin{cases} e^{\sin x}, & x < 1; \\ \ln x , & 1 \leq x < 3; \\ x^3 + 8, & x \geq 3 \end{cases}$
7	$y = \begin{cases} x^5, & x > 0; \\ \sqrt[3]{ x } + \sin(x^3), & -1 < x \leq 0; \\ 10 - x, & x \leq -1 \end{cases}$	22	$y = \begin{cases} x \cdot \cos x, & x < 0; \\ \ln x^2 - 1 , & 0 \leq x < 0,5; \\ e^{\sqrt{x}}, & x \geq 0,5 \end{cases}$
8	$y = \begin{cases} \sin(x^3), & 0 < x < 1; \\ x , & x \leq 0, \\ x^3 - \sqrt{x} \cdot \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$	23	$y = \begin{cases} \sin(x^2), & x < 10; \\ \sqrt{x} \cdot \ln x , & 10 \leq x < 20; \\ \operatorname{tg} x, & x \geq 20 \end{cases}$
9	$y = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2}, & x < -1; \\ \sin x, & -1 \leq x < 1; \\ \cos x - \sqrt{x} , & x \geq 1 \end{cases}$	24	$y = \begin{cases} e^{2x}, & x < 1; \\ x \cdot \cos x, & 1 \leq x < 3; \\ \operatorname{arctg} x, & x \geq 3 \end{cases}$
10	$y = \begin{cases} x, & x < 2; \\ \sqrt{x} \cdot \ln x , & 2 \leq x < 10; \\ \operatorname{tg}(x^3), & x \geq 10 \end{cases}$	25	$y = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 2; \\ \ln 3x^2 - 2 , & 1 < x \leq 2; \\ e^{\cos x}, & x \leq 1 \end{cases}$
11	$y = \begin{cases} e^{\sqrt{ x }}, & x < 2; \\ -x^3 + \cos x , & 2 \leq x < 8; \\ \ln(x^5 - 6x), & x \geq 8 \end{cases}$	26	$y = \begin{cases} x^2 - 3, & x < 1; \\ \ln x + 1 , & 1 \leq x < 3; \\ \cos(e^x), & x > 3 \end{cases}$
12	$y = \begin{cases} \cos(x^2), & x < -1; \\ \sin\sqrt{ x + 2 }, & -1 \leq x < 2; \\ \ln(\sqrt[3]{x^2} + 7x), & x \geq 2 \end{cases}$	27	$y = \begin{cases} \sqrt{x} + 1, & x > 3; \\ x , & 1 < x \leq 3; \\ \sin(x^2), & x \leq 1 \end{cases}$

№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные
13	$y = \begin{cases} \sin x, & -1 \leq x < 1; \\ \ln^2(x-2), & x > 1; \\ \sqrt{ x }, & x < -1 \end{cases}$	28	$y = \begin{cases} x^2, & x < 1; \\ \ln x, & 1 \leq x < 2; \\ \sin(x^2 - 5), & x \geq 2 \end{cases}$
14	$y = \begin{cases} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\cos^3 x}, & x > 1; \\ 3^x, & 0 < x \leq 1; \\ x^4 - \sqrt[5]{x^2}, & x \leq 0 \end{cases}$	29	$y = \begin{cases} \sqrt{3,5x}, & x < 0,1; \\ \frac{x^{-0,3} - 1}{x}, & 0,1 \leq x < 0,5; \\ x^2 + \sin x, & x \geq 0,5 \end{cases}$
15	$y = \begin{cases} \frac{x^2 + e^x}{x^3}, & x > 2; \\ \ln^2 x^3 - \cos x , & x \leq 2 \end{cases}$	30	$y = \begin{cases} x + \frac{\pi}{4}, & x \leq 1,5; \\ \lg x - x^{1,3}, & 1,5 < x \leq 2; \\ 1 + x^2, & x \geq 2 \end{cases}$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Условие задачи

Вычислить методами прямоугольников и трапеций определенный интеграл

$$I = \int_0^6 X^2 dX. \quad (1)$$

2. Постановка задачи

Как известно, определенный интеграл

$$I = \int_a^b Y(x) dx \quad (2)$$

представляет собой площадь фигуры, образуемой кривой подынтегральной функции $Y(X)$, отрезком оси абсцисс, ограниченным нижним (a) и верхним (b) пределами интегрирования, и перпендикулярами, восстановленными из концов интервала интегрирования до пересечения с кривой функции $Y(X)$. Вид подынтегральной функции определяет геометрическую форму образующейся фигуры.

Площадь такой фигуры в силу разнообразия видов подынтегральных функций, как правило, не может быть точно вычислена по известным аналитическим зависимостям. Поэтому фигуру разбивают на простые геометрические формы, для на-

хождения площади которых, имеются аналитические зависимости. Это могут быть, например, прямоугольники или трапеции. Подсчитанные площади простых фигур затем суммируются. В рамках погрешности метода эта сумма принимается за значение определенного интеграла.

Метод прямоугольников

Интервал интегрирования $[a, b]$ разбивается на N равных отрезков, длина каждого из которых

$$H = (b - a) / N. \quad (3)$$

Величина H называется шагом интегрирования.

В результате разбиения получаем на оси абсцисс ряд равноудаленных друг от друга точек $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$. Точки X_0 и X_n совпадают соответственно с нижним (a) и верхним (b) пределами интегрирования. Восстанавливаем из точек разбиения перпендикуляры до пересечения с кривой подынтегральной функции и завершаем построение прямоугольников (рис. 7).

Площадь каждого прямоугольника S_i выражается как произведение основания, равного шагу разбиения H , на высоту, равную значению подынтегральной функции $Y(X)$ в точке:

$$S_i = HY(X_i). \quad (4)$$

Просуммируя площади и вынеся за знак суммы значение шага H получим итерационную формулу:

$$S = H \sum_{i=0}^{n-1} Y(X_i) = H \sum_{x=a}^{b-H} Y(X). \quad (5)$$

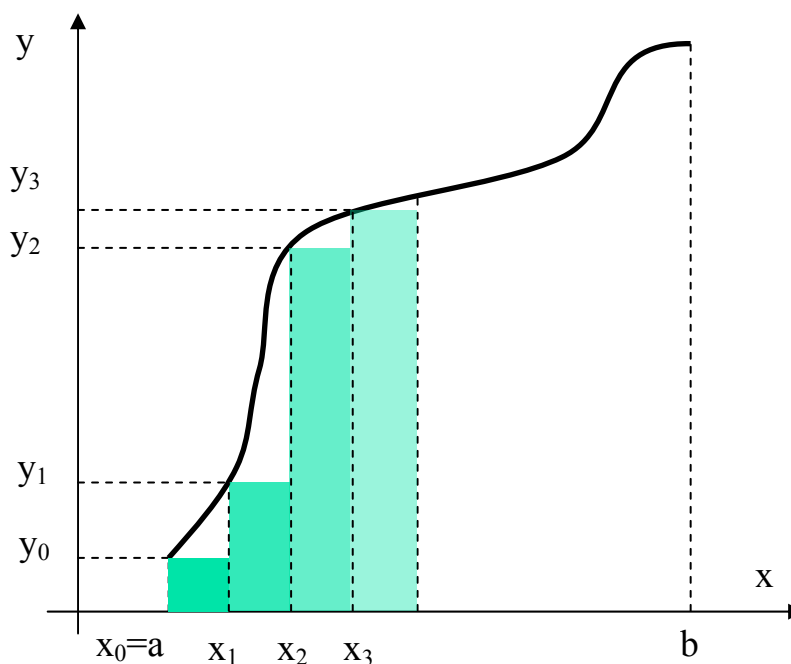


Рис. 7. Геометрическая интерпретация метода прямоугольников

Метод трапеций

Интервал интегрирования также разбивается на N отрезков, а искомая фигура заменяется совокупностью прямоугольных трапеций (рис. 8).

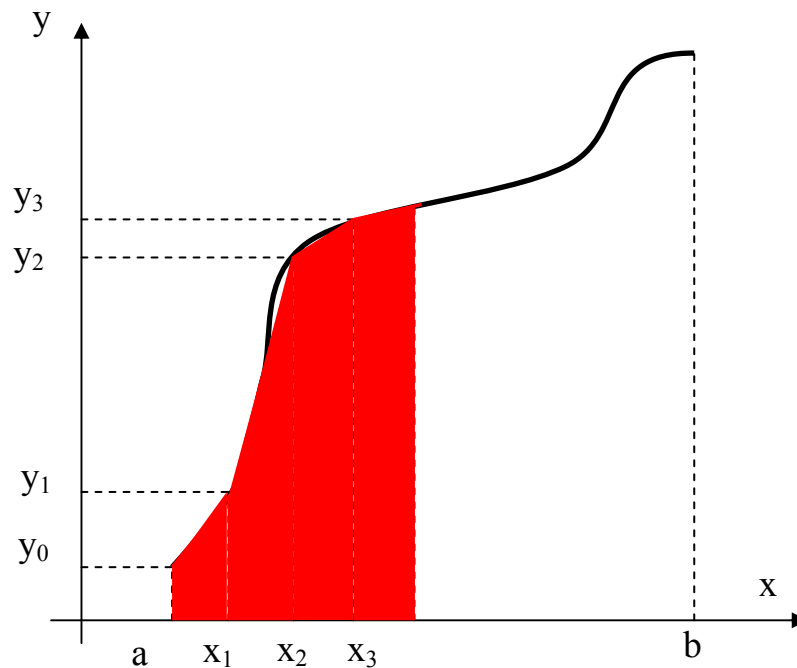


Рис. 8. Геометрическая интерпретация метода трапеций

Площадь трапеции, как известно, определяется произведением полусуммы оснований на высоту. В нашем случае имеем

$$S_i = \frac{Y(X_{i-1}) + Y(X_i)}{2} \cdot H. \quad (6)$$

Просуммировав площади элементарных фигур и проведя элементарные преобразования, можно записать формулу для приближенного вычисления интеграла:

$$S = H \cdot \left[\frac{Y(a) + Y(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} Y(X_i) \right]. \quad (7)$$

3. Решение задачи

Создадим макет таблицы и подготовим исходные данные для расчета (рис. 9). Для этого впишем значения нижнего (ячейка **A3**) и верхнего (ячейка **B3**) пределов интегрирования в соответствии с заданным интегралом (1); зададим количество отрезков N (ячейка **C3**) и рассчитаем величину шага H по формуле (2).

Далее в ячейке **A5** зададим начальное значение аргумента X , равное нижнему пределу интегрирования (**=A3**); в ячейку **A6** запишем формулу расчета приращения аргумента (**=A5+\$D\$3**), указав абсолютную адресацию для ячейки, в которой записана величина шага и скопируем формулу из ячейки **A6** в нижележащие ячейки вплоть до ячейки **A25**, в которой значение аргумента станет равным b , т. е.

верхнему пределу интегрирования заданного интеграла. Столбец со значениями аргумента подготовлен.

	A	B	C	D
1	Численное интегрирование			
2	Нижний предел, a	Верхний предел, b	Количество отрезков, N	Шаг, H
3	0	6	20	0,3
4	Аргумент, X	Функция, Y(X)	Метод прямоугольников	Метод трапеций
5				
6				
7				

=A3

=A5+\$D\$3

=A5^2

=C5+B5*\$D\$3

0

=D5+(B5+B6)*\$D\$3/2

=(B3-A3)/C3

Рис. 9. Подготовка таблицы

Теперь заполним столбец со значениями функции. В ячейку **B5** запишем выражение для подынтегральной функции (**=A5^2**) и скопируем его в нижележащие ячейки.

Переходим к составлению расчетной формулы метода прямоугольников. Знак суммы в выражении (5) для Excel непонятен, поэтому выражение надо записать иначе и для накопления суммы использовать рекуррентную зависимость:

$$S_{i+1} = S_i + HY(X_i). \quad (8)$$

Здесь каждое последующее значение суммы S_{i+1} рассчитывается на основании предыдущего S_i плюс следующий член последовательности $HY(X_i)$. Обратите внимание, что значение аргумента берется от предыдущего шага X_i . Чтобы не произошло накопление ошибки, первоначальную сумму надо обнулить, поэтому в ячейку **C5** запишем ноль. Саму рекуррентную зависимость, выраженную в адресах, запишем в ячейку **C6** (**=C5+B5*\$D\$3**). Затем скопируем формулу из ячейки **C6** в ячейки диапазона **C7:C25**. Получим ряд промежуточных сумм, а в ячейке **C25** будет представлен окончательный результат (рис. 10). Он равен 66,69.

Для реализации метода трапеций также организуем накопление площадей, используя рекуррентную зависимость:

$$S_{i+1} = S_i + \frac{Y(X_i)+Y(X_{i+1})}{2} \cdot H. \quad (9)$$

Это означает, что на каждом шаге к сумме, накопленной за предыдущие шаги, добавляется площадь очередной трапеции. В ячейку **D6** запишем выражение для суммы площадей на втором шаге (**=D5+(B5+B6)*\$D\$3/2**). Скопируем выражение в ячейки диапазона **D7:D25**. Результат представлен на рис. 10.

Интересно сравнить результаты, полученные методом прямоугольников (66,69) и трапеций (72,09), с точным решением определенного интеграла (72), а так же исследовать влияние на точность вычислений числа отрезков N, на которые разбивается интервал интегрирования $[a, b]$.

Варианты заданий представлены в табл. 4.

	А	В	С	Д
1	Численное интегрирование			
2	Нижний предел, а	Верхний предел, b	Количество отрезков, N	Шаг, H
3	0	6	20	0,3
4	Аргумент, X	Функция, Y(X)	Метод прямоугольников	Метод трапеций
5	0	0,00	0	0
6	0,3	0,09	0,000	0,014
7	0,6	0,36	0,027	0,081
8	0,9	0,81	0,135	0,257
9	1,2	1,44	0,378	0,594
10	1,5	2,25	0,810	1,148
11	1,8	3,24	1,485	1,971
12	2,1	4,41	2,457	3,119
13	2,4	5,76	3,780	4,644
14	2,7	7,29	5,508	6,602
15	3	9,00	7,695	9,045
16	3,3	10,89	10,395	12,029
17	3,6	12,96	13,662	15,606
18	3,9	15,21	17,550	19,832
19	4,2	17,64	22,113	24,759
20	4,5	20,25	27,405	30,443
21	4,8	23,04	33,480	36,936
22	5,1	26,01	40,392	44,294
23	5,4	29,16	48,195	52,569
24	5,7	32,49	56,943	61,817
25	6	36,00	66,690	72,090
26				

Рис. 10. Результаты численного определения интеграла

Таблица 4

№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные
1	$\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$	16	$\int_0^{\pi/6} \operatorname{tg}^2 x dx$
2	$\int_0^{\pi/3} \sin x dx$	17	$\int_0^{10} (x-5)^2 (10-x) dx$
3	$\int_0^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$	18	$\int_0^1 e^{2x} \sin s dx$
4	$\int_1^9 \frac{dx}{x}$	19	$\int_{0.2}^{0.56} e^x \cos x dx$

№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные
5	$\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$	20	$\int_1^2 x^2 \ln x dx$
6	$\int_0^8 \sqrt[3]{x} dx$	21	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
7	$\int_0^3 \sqrt{4+x^2} dx$	22	$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$
8	$\int_0^2 e^{-x} \cos \frac{\pi x}{4} dx$	23	$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$
9	$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx$	24	$\int_0^1 x \ln x dx$
10	$\int_1^7 x e^x dx$	25	$\int_0^1 \frac{(1-x)x^3 dx}{\sqrt{x}}$
11	$\int_0^5 e^x \sin x^2 dx$	26	$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$
12	$\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 x} dx$	27	$\int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x}$
13	$\int_1^7 \frac{dt}{(1+t^2)(4+t^2)}$	28	$\int_2^3 \frac{dx}{(x-3)(x-2)}$
14	$\int_0^6 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$	29	$\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x} dx$
15	$\int_1^7 -\frac{\sin x dx}{\sqrt{1-0.25 \sin^2 x}}$	30	$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

1. Условие задачи

Найти производную функции $y = \sin(x)$ на промежутке $x \in [0; 6,2]$ при шаге дискретизации $\Delta x = 0,2$.

2. Постановка задачи

Производной функции $y=f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной заключается в том, что производная $f'(x)$ есть угловой коэффициент (тангенс угла наклона α) касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x (рис. 11).

Продифференцировать функцию (найти ее производную) можно, используя таблицу производных и правила дифференцирования. Однако в ряде случаев правилами дифференцирования воспользоваться достаточно сложно. Например, когда функция задана таблично или получена в результате наблюдений. В этих случаях прибегают к численным методам дифференцирования.

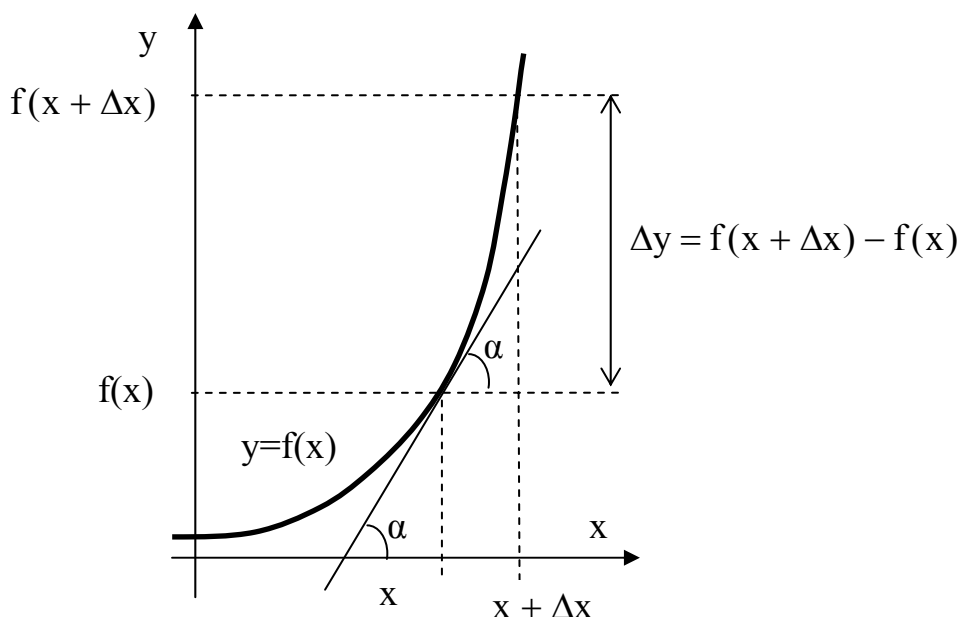


Рис. 11. Геометрический смысл производной

Численное дифференцирование очень чувствительно к ошибкам, вызванным неточностью исходных данных, отбрасываемых членов ряда и т.д., и поэтому должно применяться с осторожностью.

Существуют различные формулы численного дифференцирования. Из них простейшими являются явные трехточечные формулы, в частности:

$$y'_0 = \frac{1}{2\Delta x}(-y_{-1} + y_1). \quad (10)$$

Здесь y_{-1} , y_0 и y_1 – три последовательные точки, Δx – достаточно малый шаг дискретизации. Погрешность вычисления производной δ по формуле (10) может быть оценена из выражения

$$\delta = \frac{\Delta x^2}{6} y''(\xi), \quad (11)$$

где $x_{-1} < \xi < x_1$. Когда экспериментальные данные имеют большие погрешности, используют методы дифференцирования по большему числу точек. Примером может являться так называемая формула численного дифференцирования после сглаживания:

$$y'_k = \frac{1}{10\Delta x}(-2y_{k-2} - y_{k-1} + y_{k+1} + 2y_{k+2}). \quad (12)$$

3. Решение задачи

Для решения задачи, прежде всего, необходимо ввести данные в рабочую таблицу: в ячейку **A2** – первое значение аргумента – 0 (левую границу диапазона), в ячейку **A3** – второе значение (левая граница плюс шаг дискретизации – 0,2), затем необходимо скопировать формулу в ячейки **A4:A33**. Далее в ячейку **B2** с помощью мастера функций следует ввести формулу **=SIN(A2)**, которую после скопировать в ячейки **B3:B33**, например, маркером автозаполнения.

По введенным в рабочую таблицу данным необходимо найти значения производной. Для этого в ячейку **C3** вводим формулу дифференцирования (10): **=(B4 – B2)/(2*0,2)**. Протягиванием (за правый нижний угол) копируем ее из ячейки **C3** в ячейки **C4:C32** (в ячейках **C2** и **C33** значения производной не определены, так как не заданы значения синуса в ячейках **B1** и **B34**). Получены значения производной (рис. 12).

Вычислить производную подынтегральной функции для вариантов, представленных в табл. 4.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Условие задачи

Решить систему линейных уравнений, используя различные способы:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 1, \\ 4 \cdot x_1 + x_2 + 4 \cdot x_3 = 2. \end{cases} \quad (13)$$

2. Постановка задачи

Исходную систему часто представляют в виде $A \cdot X = B$, где A – матрица коэффициентов при неизвестных, X – матрица неизвестных, B – матрица свободных членов.

Матричный способ основан на использовании обратной матрицы: $X = A^{-1} \cdot B$.

	А	В	С
1	Аргумент	Синус	Производная
2	0,0	0,0000	
3	0,2	0,1987	0,9735
4	0,4	0,3894	0,9149
5	0,6	0,5646	0,8198
6	0,8	0,7174	0,6921
7	1,0	0,8415	0,5367
8	1,2	0,9320	0,3599
9	1,4	0,9854	0,1688
10	1,6	0,9996	-0,0290
11	1,8	0,9738	-0,2257
12	2,0	0,9093	-0,4134
13	2,2	0,8085	-0,5846
14	2,4	0,6755	-0,7325
15	2,6	0,5155	-0,8512
16	2,8	0,3350	-0,9360
17	3,0	0,1411	-0,9834
18	3,2	-0,0584	-0,9917
19	3,4	-0,2555	-0,9604
20	3,6	-0,4425	-0,8908
21	3,8	-0,6119	-0,7857
22	4,0	-0,7568	-0,6493
23	4,2	-0,8716	-0,4870
24	4,4	-0,9516	-0,3053
25	4,6	-0,9937	-0,1114
26	4,8	-0,9962	0,0869
27	5,0	-0,9589	0,2818
28	5,2	-0,8835	0,4654
29	5,4	-0,7728	0,6305
30	5,6	-0,6313	0,7704
31	5,8	-0,4646	0,8796
32	6,0	-0,2794	0,9538
33	6,2	-0,0831	

Рис. 12. Значения производной

Метод Крамера для нахождения неизвестных использует определители матриц: $X_1 = \det(AX_1) / \det(A)$; $X_2 = \det(AX_2) / \det(A)$; $X_3 = \det(AX_3) / \det(A)$.

Встроенная команда **Поиск решения** меню **Сервис** позволяет найти неизвестные, добиваясь равенства матрицы свободных членов (правой части) произведению матрицы коэффициентов на матрицу неизвестных (левой части), причем, варьировать можно лишь значениями неизвестных.

3. Решение задачи

Для каждого из трех методов сформируем матрицу коэффициентов при неизвестных и матрицу свободных членов, например, в блоках **B5:D7** и **G5:G7**.

Реализация матричного способа в Excel базируется на математических функциях, оперирующих массивами. Выделяем диапазон ячеек **J5:J7**, вводим формулу

=МУМНОЖ(МОБР(B5:D7), (G5:G7))

и нажимаем **Ctrl + Shift + Enter**. Результат представлен на рис. 13.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
3											
4											
5		2	1	0	X ₁		1		X ₁ =	0,416667	
6		1	3	2	X ₂	=	1		X ₂ =	0,166667	
7		4	1	4	X ₃		2		X ₃ =	0,041667	
8											

Рис. 13. Результат решения системы линейных уравнений

Перед использованием правила Крамера, сформируем матрицы, полученные поочередной заменой одного столбца в матрице свободных членов столбцом правых частей системы. На рис. 14 указанные матрицы расположены в блоках **B10:D12**, **F10:H12**, **J10:L12**. С помощью пункта **Присвоить...** команды **Имя** меню **Вставка** указанным блокам дадим имена **ДЕЛЬТА1**, **ДЕЛЬТА2**, **ДЕЛЬТА3**, а блоку **B5:D7**, содержащему коэффициенты при неизвестных, присвоим имя **ДЕЛЬТА**.

В этом случае, употребляя встроенную функцию для подсчета определителя, формулы для неизвестных запишем в виде:

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{МОПР(ДЕЛЬТА1)/МОПР(ДЕЛЬТА)}; \\ X_2 &= \text{МОПР(ДЕЛЬТА2)/МОПР(ДЕЛЬТА)}; \\ X_3 &= \text{МОПР(ДЕЛЬТА3)/МОПР(ДЕЛЬТА)}. \end{aligned}$$

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
4	A											
5	2	1	0	X ₁		1			X ₁ =	=МОПРЕД(B10:D12)/МОПРЕД(\$B\$5:\$D\$7)		
6	1	3	2	X ₂	=	1			X ₂ =	=МОПРЕД(F10:H12)/МОПРЕД(\$B\$5:\$D\$7)		
7	4	1	4	X ₃		2			X ₃ =	=МОПРЕД(J10:L12)/МОПРЕД(\$B\$5:\$D\$7)		
8												
9	AX ₁				AX ₂				AX ₃			
10	1	1	0		2	1	0		2	1	1	
11	1	3	2		1	1	2		1	3	1	
12	2	1	4		4	2	4		4	1	2	

Рис. 14. Решение системы по правилу Крамера

Для последнего способа сформируем левую часть системы (13): в ячейку **E5** введем формулу: **=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$D\$10;B5:D5)** и скопируем ее с помощью маркера заполнения в ячейки **E6** и **E7**.

Выполним команду **Сервис – Поиск решения** (рис. 15). В поле **Ограничения**: внесем равенство диапазонов **\$E\$5:\$E\$7=\$G\$5:\$G\$7**. В качестве изменяемых значений используются ячейки **B10**, **C10**, **D10**, их и указываем в поле **Изменяемые ячейки**. Результат представлен на рис. 16.

Варианты заданий представлены в табл. 5.

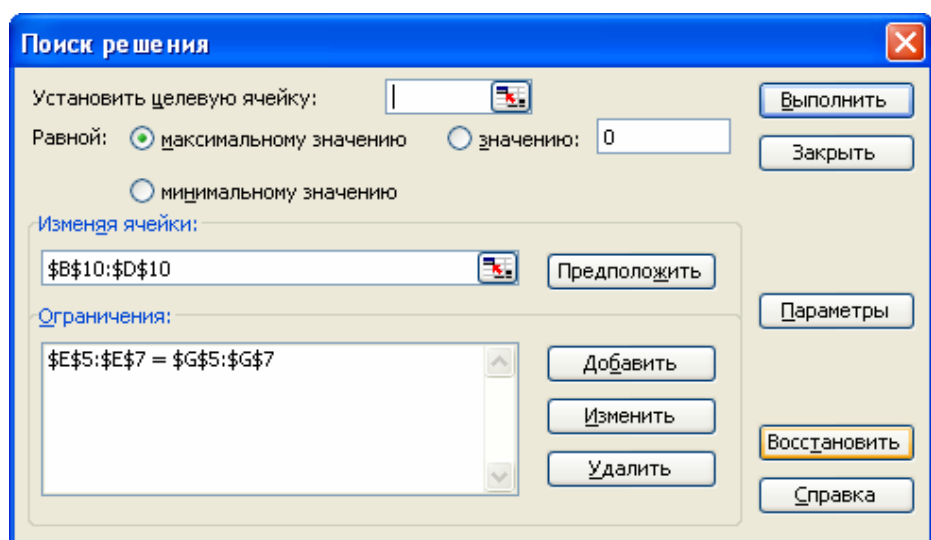


Рис. 15. Диалоговое окно Поиск решения

	A	B	C	D	E	F	G
4							
5		2	1	0	1		1
6		1	3	2	1		1
7		4	1	4	2		2
8							
9		X1	X2	X3			
10		0,417	0,167	0,042			
11							
12							

Рис. 16. Результаты решения системы

Таблица 5

№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные
1	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8; \\ 3x_1 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 18; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 22; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 17; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8; \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = -7; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 9x_1 + 10x_2 - 7x_3 - x_4 = 23; \\ 7x_1 - x_3 - 5x_4 = 37; \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 = 22; \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

4	$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = 158; \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 128; \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 7; \\ x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 88; \\ 5x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 88; \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 181; \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 99 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 8x_4 = -7 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -8 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 7 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 15; \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 18; \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 37; \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 30 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -7; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1; \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$
8	$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 165; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -15; \\ 9x_1 + 4x_3 - x_4 = 194; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -19 \end{cases}$	23	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -4; \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -7; \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2; \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -2 \end{cases}$	24	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -6 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 26; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 34; \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 26; \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$	25	$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -18; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 28; \\ x_2 + x_3 + x_4 = 10; \\ 11x_2 + x_3 + 2x_4 = 21 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные
12	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 66; \\ 2x_2 - 6x_3 + x_4 = -63; \\ 8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 146; \\ 2x_1 - 7x_2 + 6x_3 - x_4 = 80 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 2x_1 - y - z = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = -16; \\ 2x_1 - x_2 + 13x_3 + 4x_4 = 213; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 72; \\ x_1 - 12x_3 - 5x_4 = -159 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 3; \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 5; \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 60; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 27; \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$	29	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 5x_3 + x_4 = 124; \\ 7x_2 - 5x_3 - x_4 = -54; \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 83; \\ 3x_1 - 9x_2 + x_3 + 6x_4 = 45 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

1. Условие задачи

Для табличных данных (табл. 6) найти аппроксимирующую зависимость в виде линейной функции. Для расчета использовать метод наименьших квадратов, встроенные функции, команду **Сервис – Поиск решения**, построение линии тренда.

Таблица 6

x	1	2	3	4	5	6
y	7	9	12	13	14	17

2. Постановка задачи

С точки зрения метода наименьших квадратов предпочтительней, при прочих равных условиях, является та функция, для которой сумма квадратов отклонений табличной величины от расчетной, является наименьшей.

Метод наименьших квадратов

Линейная аппроксимация ($y=ax+b$) приводит к необходимости вычисления коэффициентов a и b с помощью следующей системы двух уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \cdot \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

где n – количество экспериментальных точек.

Встроенные функции

Встроенные функции рабочего листа так же позволяют определить коэффициенты a и b .

НАКЛОН (известные значения y ; известные значения x) определяет коэффициент наклона линейного тренда.

ОТРЕЗОК (известные значения y ; известные значения x) определяет свободный член линейного тренда.

ЛИНЕЙН (известные значения y ; известные значения x ...) использует метод наименьших квадратов, чтобы вычислить параметры линейной зависимости, в том числе для множественной регрессии.

Построение линии тренда

Линия тренда – это линия регрессии, которая аппроксимирует точки данных, или линия скользящего среднего. Из меню **Диаграмма** или контекстного меню диаграммы исходных данных можно выбрать тип зависимости и задать возможность вывода уравнения в поле графика.

Встроенная команда **Поиск решения** меню **Сервис** позволяет найти параметры линейной зависимости a и b , минимизируя предварительно составленную сумму квадратов разностей расчетного и табличного значений y .

3. Решение задачи

Для любого из методов следует сформировать таблицу с исходными данными, расположив их в двух столбцах.

Для поиска коэффициентов линейной зависимости исходную таблицу дополним двумя столбцами: x^2 и $x \cdot y$. В нижней строчке таблицы подсчитаем сумму значений каждого из столбцов (рис. 17).

Далее сформируем матрицу коэффициентов при неизвестных и матрицу свободных членов. Удобно не просто ввести значения, а сделать ссылки на соответствующие ячейки. С помощью функции **МОБР** вычислим матрицу, обратную матрице коэффициентов, для чего в блок ячеек **F8:G9** введем формулу:

$$=\text{МОБР}(\text{F3:G4}),$$

а ввод закончим сочетанием клавиш **Ctrl+Shift+Enter**.

С помощью функции **МУМНОЖ** вычислить значения неизвестных коэффициентов a и b , выделив блок **I8:I9**, введем формулу

$$\text{МУМНОЖ}(\text{F8:G9};\text{I3:I4}),$$

после чего нажмем сочетание **Ctrl+Shift+Enter**.

I8		= {=МУМНОЖ(F8:G9;I3:I4)}								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	x	y	x^2	xy		Матрица коэффициентов при неизвестных			Матрица свободных членов	
2	1	7	1	7						
3	2	9	4	18						
4	3	12	9	36		91	21		285	
5	4	13	16	52		21	6		72	
6	5	14	25	70		Обратная матрица			Значения неизвестных	
7	6	17	36	102						
8	21	72	91	285						
9						0,057143	-0,2		1,885714286	
10						-0,2	0,866667		5,4	

Рис. 17. Определение a и b решением системы уравнений

Применение встроенных функций продемонстрировано на рис. 18. В ячейках C2 и D2 введены соответственно формулы:

= НАКЛОН(B2:B7;A2:A7),

= ОТРЕЗОК(B2:B7;A2:A7).

C2		=НАКЛОН(B2:B7;A2:A7)			
	A	B	C	D	E
1	x	y	a	b	
2	1	7	1,885714	5,4	
3	2	9			
4	3	12			
5	4	13			
6	5	14			
7	6	17			

Рис. 18. Определение a и b с помощью встроенных функций

Результат нахождения коэффициентов a и b с помощью функции **ЛИНЕЙН** представлен на рис. 19. Заметим, что необязательные аргументы этой функции **константа** и **стат** должны быть логическими константами – истина (1) или ложь (0), и по умолчанию используются соответственно истина и ложь.

D2			= {=ЛИНЕЙН(B2:B7;A2:A7)}		
	A	B	C	D	E
1	x	y		a	b
2	1	7		1,885714	5,4
3	2	9			
4	3	12			
5	4	13			
6	5	14			
7	6	17			

Рис. 19. Результат использования функции **ЛИНЕЙН**

Прежде, чем строить линию тренда, с помощью мастера диаграмм выведем график с нанесенными на нем точками, координаты которых соответствуют исходным данным (рис. 20).

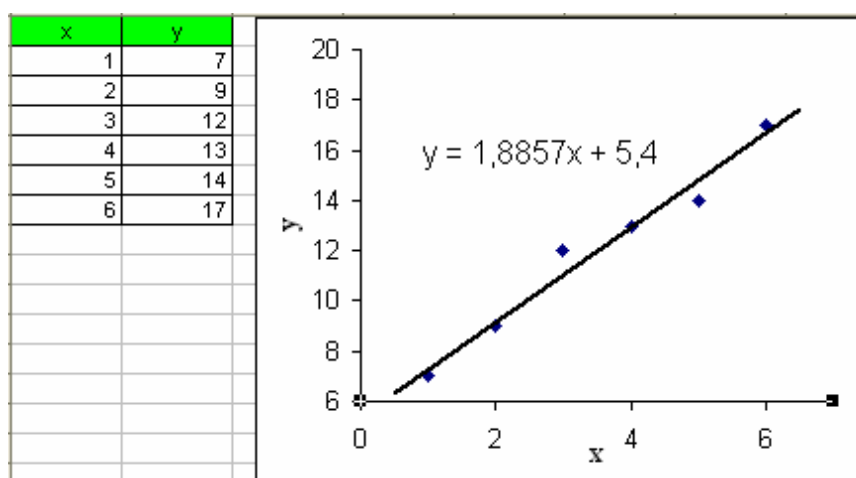


Рис. 20. Автоматическое построение линии тренда

Выделим ряд данных, щелкнув один раз на одном из маркеров и из контекстного или меню **Диаграмма** выберем **Добавить линию тренда**. В появившемся диалоговом окне **Линия тренда** на вкладке **Тип** выберем **линейный**, а на вкладке **Параметры** – **Показывать уравнение на диаграмме**.

Применение инструмента **Поиск решения** требует дополнения таблицы с исходными данными (рис. 21).

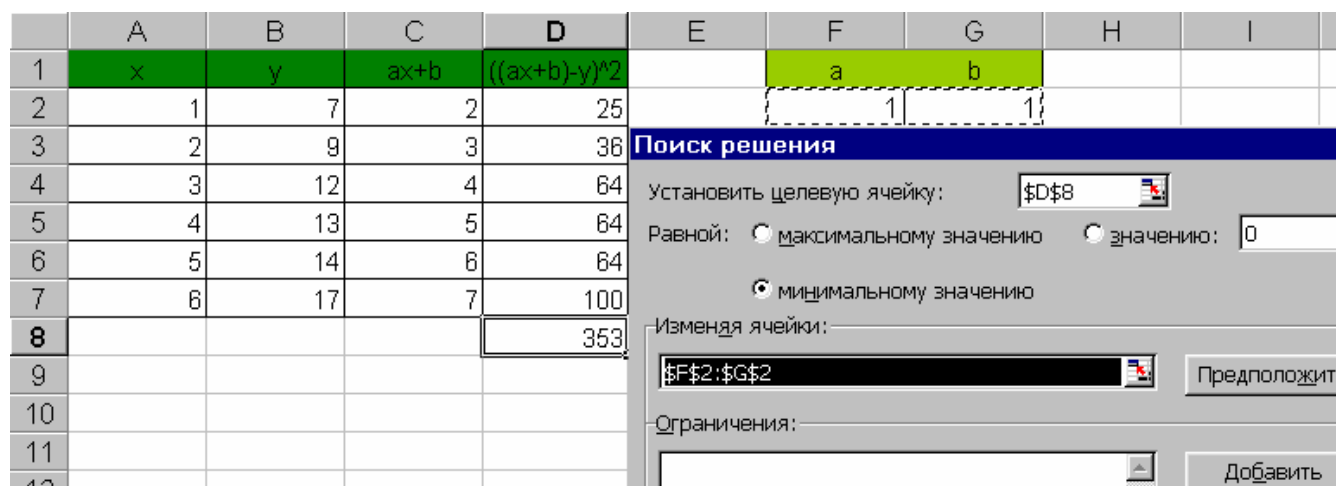


Рис. 21. Использование инструмента **Поиск решения**

В две свободные ячейки, например, **F2** и **G2**, введем приближенные значения коэффициентов **a** и **b**. Используя эти приближенные значения и исходные данные **x**, сформируем столбец значений расчетной линейной функции $ax+b$. Используя только что полученные расчетные значения и исходные значения **y**, сформируем столбец с квадратами их разностей, а также рассчитаем сумму по этому столбцу – сумму квадратов отклонений. Из меню **Сервис** выберем команду **Поиск реше-**

ния. В диалоговом окне **Поиск решения** в поле **Установить целевую ячейку** указать ячейку с суммой квадратов отклонений; в поле **Равной – минимальному значению**; в поле **Изменяя ячейки** указать ячейки с приближенными значениями коэффициентов а и b. Затем – **Выполнить**. Результат нахождения коэффициентов а и b с помощью инструмента **Поиск решения** представлен на рис. 22.

x	y	ax+b	((ax+b)-y)^2		a	b
1	7	7,2857141	0,0816325		1,885714	5,4
2	9	9,1714282	0,0293876			
3	12	11,057142	0,8889807			
4	13	12,942856	0,0032654			
5	14	14,82857	0,6865291			
6	17	16,714285	0,0816333			
			1,7714286			

Рис. 22. Результат нахождения а и b помощью **Поиск решения**

Варианты заданий приведены в табл. 7.

Таблица 7

№ вар.	Значения											
1	x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
	y	0,68	0,74	0,76	0,64	0,80	0,77	0,97	0,93	0,93	0,97	1
2	x	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
	y	2,31	2,25	2,41	2,75	2,45	2,7	3,02	3,07	2,42	2,66	3,24
3	x	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
	y	4,61	4,59	5,13	5,48	5,49	5,55	5,47	5,72	5,79	6,11	6,60
4	x	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
	y	8,47	8,80	9,09	8,99	9,31	9,46	9,77	9,61	9,72	11,4	10,2
5	x	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0
	y	0,68	0,74	0,76	0,64	0,80	0,77	0,97	0,93	0,93	0,97	1,0
6	x	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
	y	17,6	19,7	19,7	18,8	19,8	21,1	20,02	19,4	20,1	20,5	21,2
7	x	7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0
	y	25,2	25,1	25,6	26,6	26,7	27,2	26,4	26,8	27,2	28,0	27,7
8	x	8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0
	y	30,5	34,2	34,2	34,1	33,5	34,0	34,4	35,8	35,6	37,4	35,6
9	x	9	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10,0
	y	41,7	42,2	43,8	42,1	43,6	45,0	42,4	45,7	44,0	45,8	44,9
10	x	10	10,1	10,2	10,3	10,4	10,5	10,6	10,7	10,8	10,9	11,0
	y	49,7	51,9	50,0	52,3	53,4	54,9	52,7	54,1	55,4	55,6	56,1
11	x	11	11,1	11,2	11,3	11,4	11,5	11,6	11,7	11,8	11,9	12,0
	y	62,1	63,0	63,7	64,2	64,0	63,5	65,4	65,	65,0	68,8	65,7

№ вар	Значения											
12	x	12	12,1	12,2	12,3	12,4	12,5	12,6	12,7	12,8	12,9	13,0
	y	49,7	51,9	50,0	52,3	53,4	54,9	52,7	54,1	55,4	55,6	65,1
13	x	13	13,1	13,2	13,3	13,4	13,5	13,6	13,7	13,8	13,9	14,0
	y	86,6	85,4	87,8	88,6	89,0	89,2	89,6	90,7	91,3	91,4	91,7
14	x	14	14,1	14,2	14,3	14,4	14,5	14,6	14,7	14,8	14,9	15,0
	y	99,8	100	99,4	102	103	104	104	105	104	106	105
15	x	15	15,1	15,2	15,3	15,4	15,5	15,6	15,7	15,8	15,9	16,0
	y	115	115	115	116	117	119	121	119	120	121	124
16	x	16	16,1	16,2	16,3	16,4	16,5	16,6	16,7	16,8	16,9	17,0
	y	131	126	132	131	132	133	133	135	134	139	133
17	x	17	17,1	17,2	17,3	17,4	17,5	17,6	17,7	17,8	17,9	18,0
	y	147	150	149	150	147	147	152	154	154	153	152
18	x	18	18,1	18,2	18,3	18,4	18,5	18,6	18,7	18,8	18,9	19,0
	y	164	163	164	165	166	167	169	169	170	174	173
19	x	19	19,1	19,2	19,3	19,4	19,5	19,6	19,7	19,8	19,9	20,0
	y	186	180	184	186	189	188	184	186	194	192	191
20	x	20	20,1	20,2	20,3	20,4	20,5	20,6	20,7	20,8	20,9	21,0
	y	200	200	200	202	208	208	209	206	209	211	214
21	x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	—	—	—
	y	0,3	0,44	0,68	0,98	1,49	2,2	3,32	4,99	—	—	—
22	x	0,6	0,8	1	3	5	7	8	9	—	—	—
	y	0	0,38	0,5	1,7	2,01	2,55	2,48	2,79	—	—	—
23	x	7,5	11	16,5	23	29	42	52	—	—	—	—
	y	5	10	20	35	50	85	130	—	—	—	—
24	x	20	24,8	30,2	35	40,1	44,9	50	—	—	—	—
	y	86,7	88,03	90,32	91,15	93,26	94,9	96,33	—	—	—	—
25	x	1,236	1,580	1,838	2,012	2,260	2,398	2,536	—	—	—	—
	y	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	—	—	—	—
26	x	8	8	10	15	20	25	30	35	—	—	—
	y	3,53	2,67	2,1	1,04	0,69	0,56	0,46	0,43	—	—	—
27	x	10	20	30	40	50	60	—	—	—	—	—
	y	150	580	1340	2380	3740	5390	—	—	—	—	—
28	x	0,1	0,5	1	2	2,5	3	4	—	—	—	—
	y	0,003	0,075	0,32	1,1	1,87	2,62	4,81	—	—	—	—
29	x	5	10	20	35	50	85	130	—	—	—	—
	y	0,67	0,91	1,21	1,52	1,72	2,02	2,50	—	—	—	—
30	x	0,1	0,5	1	2	2,5	3	4	—	—	—	—
	y	0,003	0,075	0,32	1,1	1,87	2,62	4,81	—	—	—	—

ЗАДАЧИ МНОГОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Задача 1. Планирование производства материалов

1. Условие задачи

Для изготовления различных изделий А, В, С предприятие использует три различных вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена каждого изделия, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, представлены в табл. 8.

Таблица 8

Вид сырья	Нормы затрат сырья, кг			Общее количество сырья, кг
	А	В	С	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена изделия, руб.	9	10	16	–

Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

2. Постановка задачи

Вначале выполним математическую постановку задачи. Искомый выпуск изделий А обозначим через x_1 , изделий В – через x_2 , изделий С – через x_3 . Поскольку имеются ограничения на выделенный предприятию фонд сырья каждого вида, переменные x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 18 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 \leq 360, \\ 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 \leq 192, \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 180. \end{cases}$$

Общая стоимость произведенной предприятием продукции, которую следует максимизировать, составляет $F = 9 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 16 \cdot x_3$.

По своему экономическому содержанию переменные x_1, x_2, x_3 могут принимать только лишь неотрицательные значения: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

3. Решение задачи

Исходные данные внесены в таблицу (рис. 23). Ячейки **A1:C1** содержат начальные неотрицательные значения неизвестных; **A2:C4** – нормы затрат сырья; **E2:E4** – общее количество сырья; **A6:C6** – цену каждого изделия; **D2:D4** – левые части ограничений-неравенств; **D6** – целевую функцию. Целевая функция и левые части ограничений сформированы с помощью функции **СУММПРОИЗВ**, которая позволяет суммировать произведения элементов указанных в ней массивов, например количество изделий на их цену – для целевой функции.

Определение плана производства, максимизирующего функцию прибыли, выполним с помощью инструмента **Поиск решения**. Ограничения сформулированы в соответствующем окне диалога (рис. 24). Полученное решение представлено на рис. 25.

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	1				
2	18	15	12	=СУММПРОИЗВ(\$A\$1:\$C\$1;A2:C2)	360		
3	6	4	8	=СУММПРОИЗВ(\$A\$1:\$C\$1;A3:C3)	192		
4	5	3	3	=СУММПРОИЗВ(\$A\$1:\$C\$1;A4:C4)	180		
5							
6	9	10	16	=СУММПРОИЗВ(\$A\$1:\$C\$1;A6:C6)			

Рис. 23. Исходные данные задачи

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: ☒ максимальному значению ☐ значению: ☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

Рис. 24. Диалоговое окно поиска решения

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0	8	20	неизвестные задачи							
2	18	15	12	360	360						
3	6	4	8	192	192						
4	5	3	3	84	180						
5											
6	9	10	16	400	максимум целевой функции						

Рис. 25. Решение задачи

Варианты заданий

1. Фирма производит два продукта А и В, рынок сбыта которых не ограничен. Каждый продукт должен быть обработан каждой из машин I, II, III (табл. 9).

Таблица 9

Продукт	Время обработки в часах		
	I	II	III
A	0,5	0,4	0,2
B	0,25	0,3	0,4

Время работы машин соответственно: 40, 36, 36 часов в неделю. Прибыль от изделий А и В составляет соответственно 5\$ и 3\$. Фирме надо определить недельные нормы выпуска изделий А и В, максимизирующие прибыль.

2. Фирме требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,03% и с долей зольных примесей не более 3,25%. Как смешивать три доступных сорта угля (табл. 10), чтобы получить минимальную цену и удовлетворить ограничениям?

Таблица 10

Сорт угля	Р, %	Зола, %	Цена, \$ за т
А	0,06	2,0	30
В	0,04	4,0	30
С	0,02	3,0	40

3. Средства очистки пола оценивают по трем показателям: а) очищающие свойства, б) дезинфицирующие свойства, в) раздражающее воздействие на кожу. Каждый измеряется по линейной шкале от 1 до 100. Продукт на рынке должен иметь, по крайней мере, по 60 единиц очищающих и дезинфицирующих свойств. Раздражающее воздействие должно быть минимально. Конечный продукт – смесь трех очистителей (табл. 11).

Таблица 11

Очистители	Показатели		
	а	б	в
А	90	30	70
В	65	85	50
С	45	70	10

4. В распоряжении завода железобетонных изделий имеется три вида сырья в объемах 15, 9, 30 ед³. Требуется произвести продукцию четырех видов. Известна технологическая норма потребления отдельного вида сырья для изготовления каждого изделия (ед³), а также прибыль от продажи единицы продукции (табл. 12). Определить объемы производства, максимизирующие прибыль.

Таблица 12

Виды сырья	Изделия			
	1	2	3	4
Песок	3	5	2	7
Щебень	4	3	3	5
Цемент	5	6	4	8
Прибыль, \$	40	50	30	20

5. Компания производит полки двух размеров. Агенты считают, что на рынке в неделю может быть реализовано 550 полок. Для каждой полки А требуется 4 м² материала, а для полки В – 6 м². Компания может получить до 1200 м² в неделю. Для изготовления одной полки типа А требуется 12 минут, а полки В – 30 минут.

Машинное время ограничено 160 часами в неделю. Прибыль от продажи полки А составляет 3\$, В – 4\$. Сколько полок каждого типа следует выпускать в неделю?

6. Автозавод выпускает две модели: «Каприз» (\$1000 прибыли) и «Фиаско» (\$500 прибыли). На заводе работает 1000 неквалифицированных и 800 квалифицированных рабочих, каждому оплачивается 40 часов в неделю. Для изготовления модели «Каприз» требуется 30 часов неквалифицированного и 50 часов квалифицированного труда; для «Фиаско» – 40 и 20 часов соответственно. Каждая модель «Фиаско» требует затрат в размере \$500 на сырье и комплектующие, «Каприз» – \$1000. Суммарные затраты не должны превышать \$900 000 в неделю. Рабочие, осуществляющие доставку, работают по пять дней в неделю и могут забрать не более 210 машин. Какой объем выпуска рекомендуете?

7. Фирма производит три вида продукции (А, В, С), для выпуска каждого из которых требуется время для обработки на четырех устройствах (табл. 13).

Таблица 13

Виды продукции	Время обработки на устройствах, ч				Прибыль, \$
	1	2	3	4	
А	1	3	1	2	3
В	6	1	3	3	6
С	3	3	2	4	4

Время работы на устройствах ограничено в 84, 42, 21, 42 часа соответственно. Определите, какую продукцию и в каких количествах следует производить.

8. Производитель безалкогольных напитков располагает двумя различными машинами А и В. Количество бутылок, производимых в одну минуту, представлено в табл. 14.

Каждая из машин работает ежедневно по 6 часов при 5 рабочих днях в неделю. Прибыль от 0,5 л бутылки составляет 0,04\$, 1,0 л бутылки – 0,10\$. Недельная продукция не может превосходить 50 000 л; рынок принимает 44 000 бутылок 0,5 л и 30 000 – 1 л. Производитель хочет максимизировать прибыль при имеющихся средствах.

Таблица 14

Машины	Емкость бутылок, л	
	0,5	1,0
А	50	20
В	40	30

9. Производитель элементов центрального отопления изготавливает радиаторы четырех моделей (А, В, С, D). Ограничения на производство обусловлено количеством рабочей силы и количеством стального листа (табл. 15).

Решить задачу максимизации прибыли, если возможно использование не более 1100 чел.-ч и 1050 м² листа.

Таблица 15

Показатели	Модели			
	A	B	C	D
Количество рабочей силы, чел.-ч	0,5	1,5	2,0	1,5
Количество стального листа, м ²	4	2	6	8
Прибыль, \$	5	5	12,5	10

10. Небольшая фирма производит два типа подшипников А и В, каждый из которых должен быть обработан на трех станках (табл. 16).

Полное возможное время работы станков в неделю составляет 160, 120, 150 часов соответственно. Продажа каждого подшипника типа А приносит прибыль 80 центов, типа В – 125 центов.

Фирма хотела бы производить подшипники в количествах, максимизирующих её прибыль.

Таблица 16

Типы подшипников	Время обработки на станках, ч		
	I	II	III
A	0,01	0,02	0,04
B	0,02	0,01	0,01

11. Фирма рекламирует свою продукцию с использованием телевидения, радио, газет афиш. Известно, что эти средства приводят к увеличению прибыли на 10, 3, 7 и 4 \$ в расчете на 1 \$ затрат.

При распределении рекламного бюджета фирма придерживается правил:

- а) полный бюджет не должен превосходить 500 000 \$;
- б) расходовать не более 40 % на телевидение, не более 20 % на афиши;
- в) на радио следует расходовать, по крайней мере, половину того, что запланировано на телевидение.

12. Фирма занимается составлением диеты, содержащей, по крайней мере, 20 единиц белков, 30 единиц углеводов, 10 единиц жиров, 40 единиц витаминов, используя: хлеб, сою, сушеную рыбу, фрукты, молоко. Как дешевле достичь этого при указанном содержании и ценах за 1 кг или (1 л) продуктов (табл. 17)?

13. Фабрика производит три основных типа товаров. Изделию I требуется 3 ед. сырья А и 1 ед. сырья В; оно приносит прибыль 3\$. Изделию II: А – 4 ед., В – 3 ед., прибыль – 6\$. Изделию III: А – 1 ед., В – 2 ед., прибыль – 2\$. Найти оптимальный план производства, если доступны всего: 20 ед. сырья А и 10 ед. сырья В.

14. Прибыль от изделий А, В, С составляет соответственно 3, 4, 5\$. Для каждого изделия требуется использовать станки I и II (табл. 18), которые доступны соответственно 12 и 15 часов в день. Найти оптимальный план производства.

Таблица 17

Показатели	Содержание веществ в продуктах, ед.				
	хлеб	соя	рыба	фрукты	молоко
Белки	2	12	10	1	2
Углеводы	12	0	0	4	3
Жиры	1	8	3	0	4
Витамины	2	2	4	6	2
Цена, руб.	12	36	32	18	10

Таблица 18

Время, необходимое для изготовления изделий, ч			
Станки	Изделия		
	А	В	С
I	3	2	3
II	4	1	2

15. Фирма производит три вида буфетов для гостиниц, что требует различных затрат на переделах (табл. 19). В течение недели можно планировать работу на лесопилке – 360, сборке – 520, отделке – 220 человеко-часов. Прибыль от продажи составляет 9, 11, 15 \$. Составить оптимальный план производства.

Таблица 19

Переделы	Виды буфетов		
	А	В	С
Лесопилка	1	2	4
Сборка	2	4	2
Отделка	1	1	2

16. Аудитории и лаборатории университета рассчитаны не более чем на 5000 студентов. Университет принимает не более 4000 бюджетных студентов (б.с.) и любое количество контрактных (к.с.). Профессорско-преподавательский состав университета – 440 человек. Для обучения 12 б.с. и 10 к.с. требуется один преподаватель. Необходимо, чтобы 40 % б.с. 80 % к.с. могли разместиться в аудитории, где имеется 2800 мест. Университет получает \$200 в месяц за б.с. и \$300 за к.с. Предположив, что цель – максимизация прибыли, определить прием студентов.

17. Фирма производит четыре сорта изделий. Производство лимитируется временем использования станков (до 90 часов в день) и количеством комплектующих изделий (до 80 штук в день). Каков оптимальный план, если известны параметры производства (табл. 20)?

18. Для изготовления изделий № 1 и № 2 имеется 100 кг металла. На изготовление одного изделия № 1 расходуется 2 кг металла, а изделия № 2 – 4 кг. Составить план производства, обеспечивающий получение наибольшей выручки от продажи изделий, если отпускная стоимость изделия № 1 установлена \$3, а за из-

делие № 2 – \$2, причем, изделий № 1 требуется изготовить не более 40, а изделий № 2 – не более 20.

Таблица 20

Показатели	Изделия			
	I	II	III	IV
Время использования станков, ч	1	3	8	4
Количество комплектующих, шт.	2	2	1	3
Прибыль, \$	10	20	40	30

19. Производственная мощность цеха сборки – 120 изделий типа А и 360 изделий типа В в сутки. Технический контроль пропускает в сутки всего 200 изделий. Изделия типа А вчетверо дороже изделий типа В. Требуется спланировать выпуск продукции так, чтобы была обеспечена наибольшая прибыль.

20. Для изготовления изделий № 1 и № 2 можно отпустить металла не более 80 кг, причем на изделие № 1 расходуется 2 кг металла, а на изделие № 2 – 1 кг металла. Требуется спланировать производство так, чтобы была обеспечена наибольшая прибыль. Изделий № 1 требуется изготовить не более 30 шт., а изделий № 2 – не более 40 шт., причем одно изделие № 1 стоит \$5, а № 2 – \$3.

21. Мебельная фабрика выпускает стулья двух типов. На изготовление одного стула первого типа стоимостью \$8 расходуется 2 метра досок стандартного сечения, 0,5 м² обивочной ткани и 2 человеко-часа рабочего времени. Аналогичные данные для стульев второго типа составляют соответственно: \$12; 4 м; 0,25 м²; 2,5 человеко-часа. В распоряжении имеются 440 метров досок, 65 м² обивочной ткани, 320 человеко-часов рабочего времени.

22. Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы (табл. 21).

Определить план выпуска продукции с максимальной прибылью.

Таблица 21

Ресурсы		Стол	Шкаф	Общее количество
Древесина, м ³	I вида	0,2	0,1	40
	II вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость, чел.-ч		1,2	1,5	371,4
Прибыль, \$		6	8	–

23. На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов с определенной их долей в рационе (табл. 22).

Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной.

Таблица 22

Показатели	Лисица	Песец	Общее количество
I корм	1	3	180
II корм	4	1	240
III корм	6	7	426
Прибыль, \$	6	8	—

24. Сбыт изделий А, В, С, производимых предприятием, не ограничен. Составить оптимальный план производства, учитывая нормы расхода сырья, общее его количество, цену каждого изделия (табл. 23).

Таблица 23

Показатели	А	В	С	Общее количество
I сырьё	13	12	10	320
II сырьё	4	3	9	192
III сырьё	5	2	4	160
Цена изделия, \$	10	12	15	—

25. Для изготовления трех видов изделий А, В, С используется четыре вида оборудования. Составить оптимальный план производства, учитывая затраты времени на обработку одного изделия каждого вида, общий фонд рабочего времени оборудования (станко-часов) и прибыль от продаж (табл. 24).

Таблица 24

Показатели	А	В	С	Общий фонд
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль, \$	10	14	12	—

26. В распоряжении завода железобетонных изделий имеется три вида ресурсов в объемах 16, 8, 31 ед. Требуется произвести продукцию четырех видов. Известна норма расхода отдельного вида ресурса для изготовления каждого из четырех видов изделия (ед.), а также прибыль от продажи единицы каждого вида продукции (табл. 25). Определить объемы производства максимизирующие прибыль.

27. Фирма производит два типа изделий А и В, каждый из которых должен быть обработан на трех станках (табл. 26).

Полное возможное время работы станков в неделю составляет 180, 100, 120 часов соответственно. Продажа каждого подшипника типа А приносит прибыль 70 центов, типа В – 105 центов.

Таблица 25

Ресурсы	Изделия			
	1	2	3	4
Песок	4	4	2	8
Щебень	5	3	2	6
Цемент	6	7	4	9
Прибыль, \$	42	51	29	23

Таблица 26

Время обработки, ч

Типы изделий	Станки		
	I	II	III
A	0,3	0,4	0,5
B	0,1	0,2	0,6

28. Мебельная фабрика выпускает шкафы двух типов. На изготовление одного шкафа первого типа стоимостью \$8 расходуется 3 метра досок стандартного сечения, $0,7 \text{ м}^2$ шпона и 2 чел.-ч рабочего времени. Аналогичные данные для шкафов второго типа составляют соответственно: \$10; 5 м; $0,5 \text{ м}^2$; 3 чел.-ч. В распоряжении имеются 460 метров досок, 165 м^2 шпона, 300 чел.-ч рабочего времени.

29. Фирма производит два продукта A и B, рынок сбыта которых не ограничен. Каждый продукт должен быть обработан каждой из машин I, II, III (табл. 27).

Таблица 27

Время обработки, ч

Продукт	Машины		
	I	II	III
A	0,6	0,5	0,1
B	0,3	0,4	0,3

Время работы машин соответственно: 39, 37, 35 ч в неделю. Прибыль от изделий A и B составляет соответственно 4 и 3 \$. Фирме надо определить недельные нормы выпуска изделий A и B, максимизирующие прибыль.

30. В распоряжении хлебо-булочного завода имеется три вида сырья в объемах 15, 9, 30 ед. Требуется произвести продукцию четырех видов. Известна технологическая норма потребления отдельного вида сырья для изготовления каждого из четырех видов изделия (ед.), а также прибыль от продажи единицы каждого вида продукции (центы). Определить объемы производства максимизирующие прибыль, используя данные табл. 28.

Таблица 28

Ресурс	Изделия			
	1	2	3	4
Мука	3	5	2	7
Сахар	4	3	3	5
Яйцо	5	6	4	8
Прибыль	40	50	30	20

Задача 2. Транспортная задача

1. Условие задачи

Производство продукции осуществляется на 4-х предприятиях, а затем развозится в 5 пунктов потребления. Предприятия могут выпускать в день 235, 175, 185 и 175 единиц продукции. Пункты потребления готовы принимать ежедневно 125, 160, 60, 250 и 175 единиц продукции. Хранение на предприятии единицы продукции обходится в 2 у.е. в день, штраф за недопоставленную продукцию – 3,5 у.е. в день. Стоимость перевозки единицы продукции (в у.е.) с предприятий в пункты потребления приведена в табл. 29.

Необходимо минимизировать суммарные транспортные расходы по перевозке продукции.

Таблица 29

Предприятия	Пункты потребления				
	1	2	3	4	5
1	3,2	3	2,35	4	3,65
2	3	2,85	2,5	3,9	3,55
3	3,75	2,5	2,4	3,5	3,4
4	4	2	2,1	4,1	3,4

2. Постановка задачи

Неизвестными в этой задаче являются объемы перевозок. Пусть x_{ij} – объем перевозок с i -го предприятия в j -й пункт потребления. Суммарные транспортные расходы – это функционал качества (критерий цели):

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij},$$

где c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукции с i -го предприятия в j -й пункт потребления.

Неизвестные в этой задаче должны удовлетворять следующим ограничениям:

- объемы перевозок не могут быть отрицательными;
- поскольку модель сбалансирована, то есть суммарное потребление равно суммарному производству, то вся продукция должна быть вывезена с предпри-

ятий, а потребности всех пунктов потребления должны быть полностью удовлетворены.

Итак, имеем следующую задачу:

– найти минимум функционала:

$$F = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$$

– при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^4 x_{ij} = b_j, \quad j \in [1, 5],$$

$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} = a_i, \quad i \in [1, 4],$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in [1, 4], \quad j \in [1, 5],$$

где a_i – объем производства на i -м предприятии, b_j – спрос в j -м пункте потребления.

3. Решение задачи

Подготовку рабочего листа для задачи осуществляем в соответствии с рис. 26.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2	Стоимость перевозок	Пункты потребления							
3		1	2	3	4	5			
4	Производители	1	3,2	3	2,35	4	3,65		
5		2	3	2,85	2,5	3,9	3,55		
6		3	3,75	2,5	2,4	3,5	3,4		
7		4	4	2	2,1	4,1	3,4		
9	Объемы перевозок	Пункты потребления						Ограничения	
10		1	2	3	4	5			
11	Производители	1						=СУММ(C11:G11)	235
12		2						=СУММ(C12:G12)	175
13		3						=СУММ(C13:G13)	185
14		4						=СУММ(C14:G14)	175
15	Ограничения		=СУММ(C11:C14)	=СУММ(D11:D14)	=СУММ(E11:E14)	=СУММ(F11:F14)	=СУММ(G11:G14)		
16			125	160	60	250	175		
17									
18	Целевая		=СУММПРОИЗВ(C4:G7;C11:G14)						

Рис. 26. Исходные данные для решения транспортной задачи

Блок ячеек **C4:G7** занят тарифами перевозок; блок **C11:G14** подготовлен для объемов перевозок от каждого производителя каждому потребителю; ячейки **I11:I14** содержат максимальные возможности производителей, а **C16:G16** – максимальные запросы потребителей; ячейки диапазонов **H11: H14** и **C15:G15** выражены как суммы перевозок по соответствующему производителю (строчке) или потребителю (столбцу), именно эти суммы должны быть равны максимальным границам потребления или производства. Выражение для целевой функции, которую предстоит минимизировать, записано в ячейке **C18**. Заметим, что вывод фор-

мул на поле рабочего листа возможен, если на вкладке **Вид** команды **Параметры...** меню **Сервис** использовать параметр окна **формулы**.

Ввод данных в окно **Поиск решения** производим в соответствии с рис. 27. Не следует забывать также об опциях **Линейная модель**, **Относительная погрешность** окна **Параметры поиска решения**, вызываемого кнопкой **Параметры** в окне **Поиск решения**.

Полученное оптимальное решение представлено на рис. 28.

Рис. 27. Ввод данных в окно **Поиск решения** для транспортной задачи

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2		Стоимость	Пункты потребления						
3		перевозок	1	2	3	4	5		
4	Производители	1	3,2	3	2,35	4	3,65		
5		2	3	2,85	2,5	3,9	3,55		
6		3	3,75	2,5	2,4	3,5	3,4		
7		4	4	2	2,1	4,1	3,4		
9		Объемы	Пункты потребления					Ограничения	
10		перевозок	1	2	3	4	5		
11	Производители	1	0	0	60	65	110	235	235
12		2	125	0	0	0	50	175	175
13		3	0	0	0	185	0	185	185
14		4	0	160	0	0	15	175	175
15	Ограничения		125	160	60	250	175		
16			125	160	60	250	175		
17									
18		Целевая	2374						

Рис. 28. Оптимальное решение транспортной задачи

Варианты заданий

1. В городе имеются два склада муки и два хлебозавода. Ежедневно с первого склада вывозится 50 т муки, а со второго – 70 т. Эта мука доставляется на хлебозаводы. Примем, первый получает 40 т, второй – 80 т. Перевозка одной т муки с первого склада на первый завод стоит \$1,2, с первого склада на второй завод – \$1,6, со второго склада на первый завод – \$0,8, со второго склада на второй завод – \$1. Как нужно спланировать перевозки, чтобы их стоимость была минимальной?

2. Четыре сталелитейных завода I, II, III, IV производят еженедельно соответственно 950, 300, 1350 и 450 т стали определенного сорта. Стальные болванки должны быть переданы потребителям A, B, C, D, E, еженедельные запросы которых составляют соответственно 250, 1000, 700, 650 и 450 т стали.

Определить план перевозок, учитывая приведенные стоимости транспортировки от заводов к потребителям одной тонны стали (табл. 30).

Таблица 30

Поставщики	Потребители				
	A	B	C	D	E
I	12	16	21	19	32
II	4	4	9	5	24
III	3	8	14	10	26
IV	24	33	36	34	49

3. В двух пунктах отправления A и B находится соответственно 150 и 90 т горючего. Пункты № 1, 2, 3 требуют соответственно 60, 70, 110 т горючего. Стоимость перевозки одной тонны горючего из пункта A в пункты № 1, 2, 3 составляет 6, 10 и 4 \$, а из пункта B – 12, 2 и 8 \$ за т. Составить оптимальный план перевозок.

4. На двух складах A и B находится по 90 т горючего. Перевозка одной тонны горючего со склада A в пункты № 1, 2, 3 соответственно стоит 1, 3, 5 \$, а перевозка одной тонны горючего со склада B в те же пункты – 2, 5, 4 \$. В каждый пункт надо доставить по одинаковому количеству горючего. Составить такой план перевозки горючего, при котором транспортные расходы будут наименьшими.

5. В резерве трех железнодорожных станций A, B, C находятся соответственно 60, 80, 100 вагонов. Составить оптимальный план перегона этих вагонов к пунктам погрузки хлеба № 1, 2, 3 с потребностями 40, 60, 80, 60 вагонов соответственно. Стоимость перегона одного вагона со станции A в указанные пункты соответственно равна 1, 2, 3, 4 \$, со станции B – 4, 3, 2, 0 \$, со станции C – 0, 2, 2, 1 доллар.

6. Завод имеет три цеха A, B, C и четыре склада № 1, 2, 3, 4. Цех A производит 30, цех B – 40, цех C – 20 тыс. шт. изделий. Пропускная способность складов за то же время характеризуется следующими показателями: склад № 1 – 20, № 2 – 30, № 3 – 30, № 4 – 10 тыс. шт. Стоимость перевозки из цеха A в склады № 1, 2, 3,

4 составляет соответственно 2, 3, 2, 4 \$ за тыс. шт. изделий, из цеха В составляет 3, 2, 5, 1 доллар, а из цеха С – соответственно 4, 3, 2, 6 \$. Составить такой план перевозки изделий, при котором расходы на перевозку 90 тыс. изделий были бы наименьшими.

7. На трех складах А, В, С находится сортовое зерно, соответственно 10, 15, 25 т, которое надо доставить в четыре пункта: № 1 – 5 т, № 2 – 10 т, № 3 – 20 т, № 4 – 15 т. Стоимость доставки одной тонны со склада А в указанные пункты соответственно равна 8, 3, 5, 2 \$, со склада В – 4, 1, 6, 7 \$, со склада С – 1, 9, 4, 3 \$. Составить оптимальный план перевозки зерна в четыре пункта, минимизирующий стоимость перевозок.

8. В трех пунктах отправления сосредоточен однородный груз в количествах, соответственно равных 420, 380, 400 т. Этот груз необходимо перевезти в три пункта назначения в количествах, соответственно равных 260, 520, 420 т. Тарифы перевозок одной т груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения являются известными и задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти план перевозок при минимальной общей стоимости перевозок.

9. На трех складах оптовой базы сосредоточен однородный груз в количествах 90, 60 и 150 единиц. Этот груз необходимо перевезти в четыре магазина, каждый из которых должен получить соответственно 120, 40, 60 и 80 единиц. Тарифы перевозок единицы груза из каждого склада во все магазины задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составить план перевозок, обеспечивающий их минимальную стоимость.

10. Производственное объединение имеет в своем составе три филиала, которые производят однородную продукцию соответственно в количествах, равных 50, 30, 10 единиц. Эту продукцию в разных местах получают четыре потребителя с потребностями в 30, 30, 10, 20 единиц каждый. Составить план перевозок, учитывая тарифы перемещения единицы продукции от каждого из филиалов соответствующим потребителям, заданных матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

11. Три предприятия данного экономического района могут производить некоторую однородную продукцию в количествах, соответственно равных 350, 180 и 20 единиц. Эта продукция должна быть поставлена пяти потребителям в количе-

ствах, соответственно равных 110, 90, 120, 80 и 150 единиц. Затраты, связанные с производством и доставкой единицы продукции, задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 13 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план прикрепления потребителей к поставщикам, при котором общие затраты являются минимальными.

12. Для строительства четырех дорог используется гравий из трех карьеров. Запасы гравия в каждом из карьеров соответственно равны 120, 220 и 140 условных единиц. Потребности в гравии для строительства каждой из дорог соответственно равны 130, 220, 60 и 70 условных единиц. Известны также тарифы перевозок одной условной единицы гравия из каждого карьера к каждой из строящихся дорог, заданные матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок гравия, при котором потребности в нем каждой из строящихся дорог были бы удовлетворены при наименьшей общей стоимости.

13. Для строительства четырех объектов используется кирпич, изготавливаемый на трех заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготавливать 100, 150 и 50 условных единиц кирпича. Ежедневные потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов соответственно равны 75, 80, 60 и 85 условных единиц. Известны также тарифы перевозок, заданные матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составить оптимальный план перевозок.

14. На трех хлебокомбинатах ежедневно производится 110, 190 и 90 т муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности которых равны соответственно 80, 60, 170 и 80 т. Тарифы перевозок заданы матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Составить план доставки муки с минимальными затратами.

15. В трех хранилищах горючего ежедневно хранится 170, 125 и 95 тонн бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 180, 110, 60 и 40 тонн. Тарифы перевозок одной тонны бензина заданы матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составить оптимальный план перевозок бензина.

16. Сталеплавильная компания располагает тремя заводами M_1 , M_2 , M_3 , способными произвести за некоторый промежуток времени 80, 100 и 70 тыс. т стали соответственно. Свою продукцию компания поставляет четырем потребителям C_1 , C_2 , C_3 , C_4 в количестве 80, 50, 50 и 70 тыс. т стали. Стоимость транспортировки одной тыс. т стали с различных заводов потребителям приведены в матрице

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальный план перевозок.

17. Имеются три участка земли площадью соответственно 600, 180 и 220 га, на которых могут быть засеяны кукуруза, пшеница, ячмень, просо. С учетом наличия семян этих культур следует засеять 290, 180, 110 и 420 га соответственно. Затраты на посев каждой культуры для каждого участка различны и заданы матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 40 & 45 & 50 \\ 30 & 28 & 22 \\ 18 & 22 & 14 \\ 24 & 18 & 16 \end{pmatrix}.$$

Определить, сколько гектаров каждой культуры на каждом из участков следует засеять, чтобы минимизировать затраты.

18. Мясокомбинат имеет в своем составе четыре завода, на каждом из которых может изготавливаться три вида колбасных изделий. Мощности каждого из заводов соответственно равны 320, 280, 270 и 350 т в сутки. Ежедневные потребности в колбасных изделиях каждого вида соответственно равны 450, 370 и 400 т. Зная себестоимость одной тонны каждого вида колбасных изделий на каждом заводе, которые определяются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix},$$

найти такое распределение выпуска колбасных изделий между заводами, при котором себестоимость продукции является минимальной.

19. Для строительства четырех объектов используется кирпич, изготавливаемый на трех заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготавливать 140, 100 и 60 усл. ед. кирпича. Ежедневные потребности в кирпиче на каждом из строящихся

объектов соответственно равны 80, 80, 60 и 80 усл. ед. Известны также тарифы перевозок, заданные матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составить оптимальный план перевозок.

20. Производственное объединение имеет в своем составе три филиала, которые производят однородную продукцию соответственно в количествах, равных 135, 45, 170 ед. Продукцию в разных местах получают четыре потребителя: 45, 45, 100, 160 ед. Составить план перевозок, учитывая тарифы перевозок ед. продукции от каждого из филиалов соответствующим потребителям, заданные матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

21. Завод имеет три цеха А, В, С и четыре склада № 1, 2, 3, 4. Цех А производит 8 тыс. шт. изделий, цех В – 11, цех С – 16. Пропускная способность складов за то же время характеризуется следующими показателями: № 1 – 4, № 2 – 9, № 3 – 9, № 4 – 13 тыс. шт.. Стоимость перевозки из цеха А в склады за одну тыс. шт. изделий соответственно составляет 4, 3, 3, 1 доллар, из цеха В – соответственно 3, 2, 4, 8 \$, а из цеха С – соответственно 5, 4, 6, 3 \$. Составить такой план перевозки изделий, при котором расходы были бы наименьшими.

22. Фирма предложила владельцам трех авиалиний перевозить бригады специалистов в различные части света. Стоимость перевозок в условных единицах известна (табл. 31).

Таблица 31

Авиалинии	Направления				
	Сидней	Калькутта	Бейрут	Даллас	Сан-Паулу
I	24	16	8	10	14
II	21	15	7	12	16
III	23	14	7	14	12
Количество рейсов	10	15	20	10	15

Контракты на перевозку заключаются с владельцами авиалиний I, II и III в отношении 2:3:2. Организовать рейсы, минимизируя затраты.

23. Компания владеет тремя заводами А, В, С с объемами производства 4000, 3000 и 3000 ед. соответственно. Компания обязалась поставлять 1500, 2500, 2700 и 3300 ед. в города W, X, Y, Z. При заданных стоимостях перевозок единицы продукта (в центах) составьте оптимальный план (табл. 32).

Таблица 32

Города	Заводы		
	А	В	С
W	1	9	6
X	4	2	1
Y	1	2	7
Z	9	8	3

24. Компания владеет двумя фабриками А и В, производящими электронное оборудование в количестве 16 и 14 тыс. изделий. Компанией снабжаются три потребителя в количестве 10, 13 и 7 тыс. изделий. Найти оптимальное распределение, зная стоимости перевозок, представленные матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

25. Три предприятия данного экономического района могут производить некоторую однородную продукцию в количествах, соответственно равных 180, 350 и 20 ед. Эта продукция должна быть поставлена трем потребителям в количествах, соответственно равных 180, 350 и 20 ед. Затраты, связанные с производством и доставкой единицы продукции задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план прикрепления потребителей к поставщикам, при котором общие затраты являются минимальными.

26. Имеется три источника финансирования A_1 , A_2 , A_3 и четыре периода финансирования B_1 , B_2 , B_3 , B_4 . Известны затраты, связанные с выделением единицы денежных ресурсов из каждого источника в каждом периоде, а также объемы финансовых источников и потребности каждого периода (табл. 33).

Требуется определить выделяемые финансовые средства из каждого источника на каждый период, задействуя все источники, обеспечивая финансирование в полном объеме в каждом периоде и минимизируя затраты.

Таблица 33

Источники	Периоды				Объем источника
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	70	38	24	92	14
A_2	58	18	56	72	20
A_3	19	10	100	30	26
Потребность периода	20	12	5	23	—

27. Имеется четыре пункта сборки мебельных гарнитуров A_1, A_2, A_3, A_4 и четыре магазина для их реализации B_1, B_2, B_3, B_4 . Известны затраты на перевозку одного гарнитура из каждого пункта сборки в каждый магазин, а также возможности по сборке и реализации продукции (табл. 34).

Определить оптимальный план перевозок мебельных гарнитуров.

Таблица 34

Пункты сборки	Магазины				Объемы сборки
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	70	38	24	92	14
A_2	58	18	56	72	20
A_3	19	10	100	30	26
A_4	3	36	121	8	41
Объемы реализации	30	22	15	34	—

28. Для строительства четырех объектов используется кирпич, изготавливаемый на трех заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготавливать 150, 90 и 70 усл. ед. кирпича. Ежедневные потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов соответственно равны 80, 90, 70 и 80 усл. ед. Известны также тарифы перевозок, заданные матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составить оптимальный план перевозок.

29. В двух пунктах отправления A и B находится соответственно 100 и 120 т горючего. Пункты № 1, 2, 3 требует соответственно 60, 50, 110 т горючего. Стоимость перевозки одной т горючего из пункта A в пункты № 1, 2, 3 составляет 6, 10, и 4 \$, а из пункта B – 12, 2 и 8 \$ за т. Составить оптимальный план перевозок.

30. На трех хлебокомбинатах ежедневно производится 110, 190 и 90 т муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности которых равны соответственно 80, 60, 170 и 80 т. Тарифы перевозок заданы матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 9 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Составить план доставки муки с минимальными затратами.

Задача 3. Задача о назначениях

1. Условие задачи

Каждый из преподавателей может провести определенные виды занятий. Почасовая оплата (c_{ij}) i -му преподавателю по j -му виду занятий приведена в табл. 35. Составить план проведения учебных занятий так, чтобы все виды заня-

тий были проведены, каждый преподаватель проводил занятия только по одному виду, а суммарная стоимость почасовой оплаты была минимальной.

Таблица 35

Преподаватели	Почасовая оплата курсов			
	1	2	3	4
1	350	420	610	200
2	890	130	650	900
3	430	520	600	720
4	830	610	780	470

2. Постановка задачи

Проверим задачу на сбалансированность. Задача является сбалансированной, если количество преподавателей соответствует числу возможных видов занятий. Наше условие описывает сбалансированную задачу: 4 преподавателя и 4 вида занятий. В случае несбалансированности задачи необходимо ввести недостающее число фиктивных преподавателей (строчек) или видов занятий (столбцов).

Построим математическую модель задачи. Пусть $x_{ij} = 1$ в случае назначения i -го преподавателя на j -й вид занятий и $x_{ij} = 0$ – в случае отсутствия такого назначения. Тогда математическая модель задачи примет вид:

– найти минимум функционала:

$$F = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$$

– при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 x_{ij} &= 1, \quad j = \overline{1,4}, \\ \sum_{j=1}^4 x_{ij} &= 1, \quad i = \overline{1,4}, \\ x_{ij} &\in \{0,1\}, \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

3. Решение задачи

Подготовку рабочего листа осуществляем в соответствии с рис. 29.

Блок ячеек **C4:F7** занят тарифами оплаты преподавателей для разного вида занятий; блок **C11:F 14** подготовлен для назначений каждого преподавателя; ячейки **H11:H14** содержат ограничения, чтоб каждый из преподавателей был назначен на один вид занятий, а **C16:G16** – каждый курс должен проводиться только одним преподавателем; ячейки диапазонов **H11:H14** и **C15:G15** выражены как суммы назначений по соответствующему преподавателю (строчке) или курсу (столбцу), именно эти суммы должны быть равны единице. Выражение для целевой функции, которую предстоит минимизировать, записано в ячейке **C18**.

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	Стоимость занятий	Читаемые курсы						
3		1	2	3	4			
4	Преподаватели	1	350	420	610	200		
5		2	890	130	650	900		
6		3	430	520	600	720		
7		4	830	610	780	470		
9	Назначение занятий	Читаемые курсы						
10		1	2	3	4	Ограничения		
11	Преподаватели	1				=СУММ(C11:F11)	1	
12		2				=СУММ(C12:F12)	1	
13		3				=СУММ(C13:F13)	1	
14		4				=СУММ(C14:F14)	1	
15	Ограничения		=СУММ(C11:C14)	=СУММ(D11:D14)	=СУММ(E11:E14)	=СУММ(F11:F14)		
16			1	1	1	1		
18	Целевая		=СУММПРОИЗВ(C4:F7;C11:F14)					

Рис. 29. Исходные данные для решения задачи о назначениях

Устанавливаем ограничения в окне **Поиск решения**, как показано на рис. 30. Следует обратить внимание на условие целочисленности неизвестных задачи. В окне **Параметры поиска решения** необходимо также установить флажок **Линейная модель**.

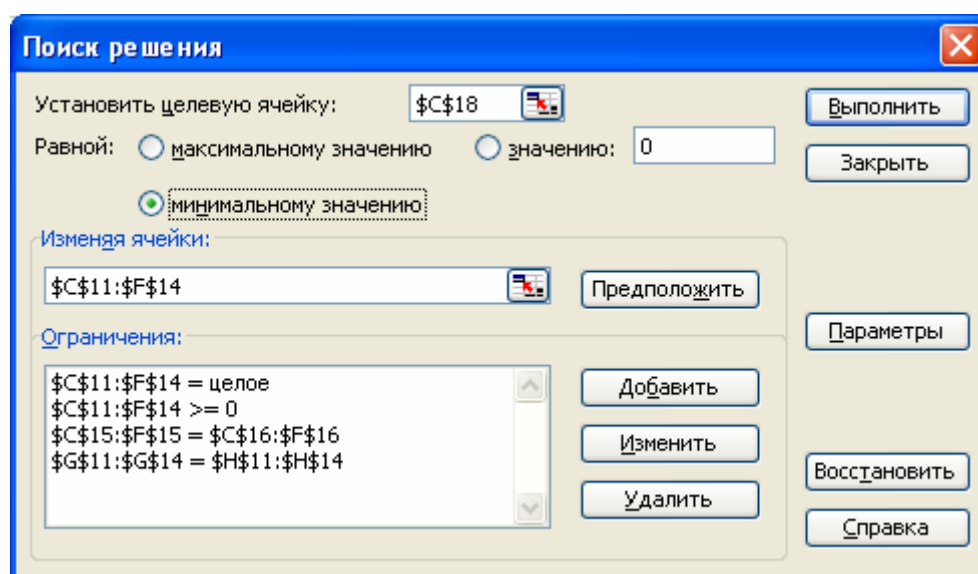


Рис. 30. Установка параметров в окне **Поиск решения**

Решение задачи представлено на рис. 31.

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	Стоимость занятий	Читаемые курсы						
3			1	2	3	4		
4	Преподаватели	1	350	420	610	200		
5		2	890	130	650	900		
6		3	430	520	600	720		
7		4	830	610	780	470		
9	Назначение занятий	Читаемые курсы						
10			1	2	3	4	Ограничения	
11	Преподаватели	1	0	0	0	1	1	1
12		2	0	1	0	0	1	1
13		3	1	0	0	0	1	1
14		4	0	0	1	0	1	1
15	Ограничения		1	1	1	1		
16			1	1	1	1		
18	Целевая		1540					

Рис. 31. Решение задачи о назначениях

Варианты заданий

1. Имеется n преподавателей и m видов занятий. Стоимость c_{ij} выполнения i -м преподавателем j -го вида занятия приведена в табл. 36, где преподавателям соответствуют строки, а видам занятий – столбцы. Составить план проведения учебных занятий так, чтобы все виды занятий были проведены, каждый преподаватель был занят только на одном виде занятий, а суммарная стоимость проведения всех видов занятий была минимальной.

Таблица 36

№ вар	Преподаватели	Почасовая оплата курсов				
		1	2	3	4	5
1	1	320	360	210	650	1100
	2	100	200	670	780	340
	3	510	120	110	900	210
	4	270	540	200	950	500
2	1	310	300	600	520	700
	2	500	200	720	800	350
	3	320	550	100	590	200
	4	600	240	200	980	450

№ вар	Преподаватели	Почасовая оплата курсов				
3	1	900	400	780	500	700
	2	120	200	900	880	300
	3	300	800	100	900	200
	4	330	440	240	460	530
4	1	860	620	200	500	—
	2	510	230	910	860	—
	3	300	800	120	900	—
	4	100	410	210	330	—
	5	300	720	990	500	—
5	1	1000	820	610	200	700
	2	600	250	900	800	330
	3	300	700	100	780	500
	4	910	980	220	300	440
6	1	690	380	220	700	—
	2	500	490	900	800	—
	3	670	800	100	1000	—
	4	100	910	1010	340	—
	5	200	700	800	550	—
7	1	9	4	6	2	10
	2	6	2	10	8	4
	3	3	7	1	10	5
	4	7	10	5	3	9
8	1	900	300	220	430	—
	2	510	950	990	800	—
	3	700	810	100	900	—
	4	1100	1000	900	1200	—
	5	320	700	800	1030	—
9	1	640	400	120	100	1000
	2	600	540	340	800	400
	3	310	720	690	1000	480
	4	1000	100	500	1100	920
10	1	500	1200	200	700	—
	2	1000	900	670	1030	—
	3	720	810	1080	890	—
	4	820	1040	750	130	—
	5	1200	670	800	300	—

№ вар	Преподаватели	Почасовая оплата курсов				
11	1	640	1000	330	800	—
	2	1000	910	860	1100	—
	3	800	800	1070	910	—
	4	340	790	800	1080	—
	5	1080	700	810	500	—
12	1	610	1070	400	700	—
	2	1200	900	800	1100	—
	3	700	800	1050	900	—
	4	430	1080	910	1100	—
	5	1080	900	810	550	—
13	1	320	360	110	650	1200
	2	100	600	670	780	340
	3	510	220	110	950	210
	4	270	540	300	900	600
14	1	300	300	600	500	700
	2	510	240	700	800	300
	3	320	500	300	590	200
	4	600	200	200	960	450
15	1	900	400	700	500	700
	2	100	200	900	800	300
	3	300	800	100	900	200
	4	330	400	240	400	600
16	1	1000	620	200	500	—
	2	600	300	910	900	—
	3	300	800	300	900	—
	4	100	500	210	700	—
	5	300	720	1100	500	—
17	1	1000	900	700	100	700
	2	600	250	900	800	530
	3	500	700	100	880	500
	4	1100	100	280	300	640
18	1	990	480	720	700	—
	2	500	690	900	800	—
	3	770	800	400	1000	—
	4	100	910	1010	440	—
	5	200	700	800	750	—
19	1	8	7	6	5	10
	2	6	2	12	8	6
	3	9	8	7	14	7
	4	7	10	5	3	9

№ вар	Преподаватели	Почасовая оплата курсов				
20	1	900	300	420	630	—
	2	710	650	890	800	—
	3	700	910	100	900	—
	4	1200	1000	900	1100	—
	5	420	700	800	1030	—
21	1	740	600	720	700	1000
	2	600	540	340	900	400
	3	510	520	290	1000	880
	4	1200	100	500	1100	620
22	1	500	1300	200	900	—
	2	1000	900	970	1030	—
	3	520	410	1180	890	—
	4	1020	1040	750	530	—
	5	1200	970	800	300	—
23	1	840	1000	330	500	—
	2	1200	710	960	1100	—
	3	800	800	1170	910	—
	4	540	690	800	1380	—
	5	1080	700	610	500	—
24	1	810	1370	400	700	—
	2	1100	900	700	1300	—
	3	700	500	1250	900	—
	4	630	1180	910	1100	—
	5	1080	900	410	750	—

2. Имеется n рабочих и m видов работ. Стоимость c_{ij} выполнения i -м рабочим j -го вида работы приведена в табл. 37, где рабочим соответствуют строки, а видам работ – столбцы. Составить план проведения работ так, чтобы все виды работ были проведены, каждый рабочий был занят только на одном виде работ, а суммарная стоимость проведения всех видов работ была минимальной.

Таблица 37

№ вар	Рабочие	Стоимость выполнения работ				
		1	2	3	4	5
25	1	3	6	2	5	11
	2	1	2	7	11	3
	3	5	12	11	9	1
	4	2	4	2	10	5

№ вар	Рабочие	Стоимость выполнения работ				
		1	2	3	4	5
26	1	1	3	6	5	7
	2	5	2	7	8	3
	3	3	5	1	9	2
	4	6	4	2	10	5
27	1	9	4	8	5	7
	2	1	2	9	8	3
	3	3	8	1	9	2
	4	3	4	2	4	5
28	1	8	6	2	5	—
	2	5	2	9	8	—
	3	3	8	1	9	—
	4	1	4	2	3	—
	5	3	7	10	5	—
29	1	10	8	6	2	7
	2	6	2	9	8	3
	3	3	7	1	10	5
	4	9	10	2	3	4
30	1	9	3	2	7	—
	2	5	4	9	8	—
	3	7	8	1	10	—
	4	1	9	10	3	—
	5	2	7	8	5	—

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Условие задачи

Имеется дифференциальное уравнение первого порядка

$$Y' = \sqrt{X + 8Y} \quad (14)$$

с начальными условиями $Y_0 = 3$ при $X_0 = 1$.

Требуется найти решение на интервале от X_0 до $X_{\text{еи}} = 10$ методом Эйлера.

2. Постановка задачи

Решение будем искать в виде точек на координатной плоскости. Первая точка известна из начальных условий. Для нахождения остальных точек воспользуемся методом Эйлера. Рис. 32 иллюстрирует суть этого метода.

Для дифференциального уравнения первого порядка с правой частью

$$Y' = f(X, Y) \quad (15)$$

и начальными условиями $(X_0; Y_0)$ интервал $[X_0, X_{\text{кон}}]$, на котором ищется решение, разделим на N равных отрезков. Длина каждого из отрезков

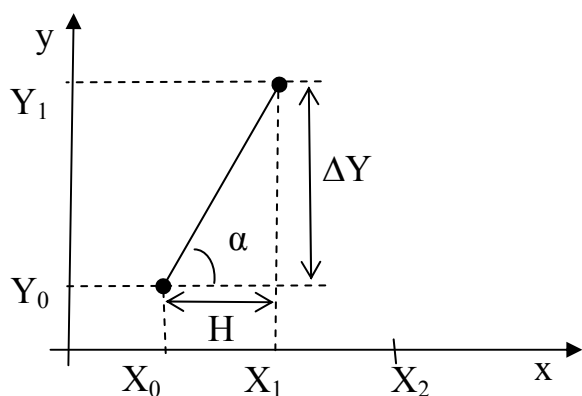


Рис. 32. Геометрическая интерпретация метода Эйлера

$$H = (X_{\text{кон}} - X_0) / N. \quad (16)$$

Таким образом, имеем абсциссу второй точки X_1 :

$$X_1 = X_0 + H. \quad (17)$$

Чтобы найти соответствующую ей ординату (Y_1), обратимся к рис. 32. Из прямоугольного треугольника следует, что ординату Y_1 , можно выразить как сумму

$$Y_1 = Y_0 + \Delta Y = Y_0 + H \cdot \text{tg}(\alpha). \quad (18)$$

Из математики известно, что геометрической интерпретацией первой производной является тангенс угла наклона касательной к графику функции в данной точке. Как видно из рис. 32, тангенс в выражении (18) – это тангенс угла наклона касательной в точке (X_0, Y_0) . Таким образом, тангенс – это первая производная, а первая производная равна правой части дифференциального уравнения (14). Заменяв тангенс угла правой частью дифференциального уравнения (15), преобразуем формулу (18) к следующему виду:

$$Y_{i+1} = Y_i + H \cdot f'(X_i, Y_i). \quad (19)$$

Это выражение отражает суть метода Эйлера и означает, что каждое последующее значение ординаты вычисляется на основе значения ординаты **предыдущего** шага плюс произведение шага на **правую часть** дифференциального уравнения для точки **предыдущего** шага.

3. Решение задачи

Запишем выражение метода Эйлера с учетом условий задачи для ординаты второй точки:

$$Y_1 = Y_0 + H \cdot \sqrt{X_0 + 8 \cdot Y_0}. \quad (20)$$

Для ординаты третьей точки, соответственно, имеем:

$$Y_2 = Y_1 + H \cdot \sqrt{X_1 + 8 \cdot Y_1}. \quad (21)$$

Зависимость аналогична для остальных точек.

Подготовим макет таблицы (рис. 33). Впишем исходные данные для $X_0, Y_0, X_{\text{кон}}$ и зададим число отрезков N . В ячейку **E4** впишем формулу для расчета величины шага.

	A	B	C	D	E
1	Численное дифференцирование				
2	Начальные условия		Конечное,	Число	Величина
3	X_0	Y_0	$X_{\text{кон}}$	отрезков, N	шага, N
4	1	3	10	20	
5	Абсцисса, X	Ордината, Y			
6					
7					
8					

=A4

=B4

=(C4-A4)/D4

=A6+\$E\$4

=B6+\$E\$4*(корень(A6+8*B6))

Рис. 33. Подготовка таблицы

Запишем в ячейки **A6:A7** расчетные зависимости. Так как ячейка **A6** соответствует первой точке, то в нее надо записать значение X_0 из начальных условий. Для этого присвоим ячейке **A6** содержимое ячейки **A4**. В дальнейшем значение абсциссы должно увеличиваться от точки к точке на величину шага. Чтобы обеспечить это, в ячейку **A7** запишем формулу **=A6+\$E\$4** и скопируем ее в ячейки диапазона **A8:A26**.

В ячейки **B6:B7** введем расчетные формулы. Так как ячейка **B6** соответствует ординате первой точки, то присвоим ей содержимое ячейки **B4**. В ячейку **B7** запишем формулу Эйлера с учетом условий задачи **=B6+\$E\$4*корень(A6+8*B6)**. Скопируем формулу из ячейки **B7** в ячейки диапазона **B8:B26**.

Решение дифференциального уравнения первого порядка в виде последовательности точек с координатами (X; Y), записанными в ячейках **A6:B26** (рис. 34), получено.

Варианты заданий представлены в табл. 38.

Таблица 38

№ вар.	Уравнение $F(x, y, y')=0$	Начальное условие
1	$(e^x+1)dy + e^x dx = 0$	$y(0) = 0,5$
2	$y \ln y + xy' = 0$	$y(1) = e$
3	$\sqrt{4-x^2} y' + xy^2 + x = 0$	$y(0) = -\text{tg } 2$
4	$3e^x \text{tg } y \, dx + \frac{2-e^x}{\cos^2 x} dy = 0$	$y(1) = \text{arctg}(2-e)$
5	$(1+e^x)yy' = e^x$	$y(0) = 1$
6	$y' \sin x = y \ln y$	$y(\pi/2) = e$

№ вар	Уравнение $F(x, y, y')=0$	Начальное условие
7	$\frac{x dx}{1+y} - \frac{y dy}{1+x} = 0$	$y(1) = 1$
8	$(1+y^2) dx = x dx$	$y(\pi / 4) = 1$
9	$2\sqrt{y} = y'$	$y(0) = 1$
10	$(e^x + 2) dy + 2e^x dx = 0$	$y(0) = 1 / 9$
11	$2y \ln y + xy' = 0$	$y(1) = e$
12	$\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2} y' + xy^2 + x = 0$	$y(0) = -1$
13	$\frac{x dx}{1+y} - \frac{y dy}{1+x} = 0$	$y(0) = 1$
14	$y \ln y dx + x dy = 0$	$y(1) = 1$
15	$6x dx - 6y dy = 2x^2y dy - 3xy^2 dx$	$y(1) = 2$
16	$x dx - y dy = yx^2 dy - xy^2 dx$	$y(1) = 1$
17	$3(x^2y + y) dy + \sqrt{2+y^2} dx = 0$	$y(0) = 1$
18	$y' \sin x = \sin y$	$y(\pi / 2) = \pi / 2$
19	$\sqrt{1-x^2} y' + xy^2 + x = 0$	$y(0) = 0$
20	$(e^{2x} + 3) dy + 2e^{2x} dx = 0$	$y(0) = 0,25$
21	$(1+y^2) dx = x dy$	$y(0) = 1$
22	$2\sqrt{y} = y'$	$y(\pi / 2) = e$
23	$(e^x + 2) dy + 2e^x dx = 0$	$y(1) = 1$
24	$2y \ln y + xy' = 0$	$y(\pi / 4) = 1$
25	$\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2} y' + xy^2 + x = 0$	$y(0) = 1$
26	$\frac{x dx}{1+y} - \frac{y dy}{1+x} = 0$	$y(0) = 1,9$
27	$y \ln y dx + x dy = 0$	$y(1) = e$

№ вар	Уравнение $F(x, y, y')=0$	Начальное условие
28	$6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3xy^2 dx$	$y(0) = -1$
29	$x dx - y dy = yx^2 dy - xy^2 dx$	$y(0) = 1$
30	$3(x^2 y + y) dy + \sqrt{2 + y^2} dx = 0$	$y(1) = 1$

	A	B	C	D	E
1	Численное дифференцирование				
2	Начальные условия		Конечное, $X_{\text{кон}}$	Число отрезков, N	Величина шага, N
3	X_0	Y_0			
4	1	3	10	20	0,45
5	Абсцисса, X	Ордината, Y			
6	1	3			
7	1,45	5,25			
8	1,9	8,2162476			
9	2,35	11,916933			
10	2,8	16,364551			
11	3,25	21,568162			
12	3,7	27,534614			
13	4,15	34,26925			
14	4,6	41,776351			
15	5,05	50,059418			
16	5,5	59,121364			
17	5,95	68,964655			
18	6,4	79,591395			
19	6,85	91,003409			
20	7,3	103,20229			
21	7,75	116,18943			
22	8,2	129,96609			
23	8,65	144,53337			
24	9,1	159,89226			
25	9,55	176,04368			
26	10	192,98843			

Рис. 34

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Условие задачи

Заданы комплексные числа. Требуется выполнить арифметические операции над ними.

2. Постановка задачи

Для работы с комплексными числами в Excel должен быть подключен инструмент **Пакет анализа** с помощью **Сервис – Надстройки**.

Комплексные числа вводятся в ячейки в алгебраическом формате $x + y \cdot i$. Если вещественная часть отрицательная, то перед числом ставится апостроф, а если значение мнимой части равно 1, то она все равно должна вводиться, например, $'-3+1 \cdot i$.

Для получения различных элементов комплексных чисел и их преобразований существует ряд встроенных функций:

МНИМ.ВЕЩ(компл_число) и **МНИМ.ЧАСТЬ(компл_число)** – определяют, соответственно, вещественную и мнимую части комплексного числа **компл_число**, представленного в алгебраической форме и записанного в одну ячейку в формате $x + y \cdot i$;

МНИМ.ABS(компл_число) и **МНИМ.АРГУМЕНТ(компл_число)** – вычисляют, соответственно, значения модуля и аргумента комплексного числа, представленного в алгебраической форме в формате $x + y \cdot i$;

МНИМ.СОПРЯЖ(компл_число) – вычисляет сопряженное комплексное число для комплексного числа, представленного в алгебраической форме в формате $x + y \cdot i$;

КОМПЛЕКСН(действительная_часть;мнимая_часть;мнимая_единица) – преобразует коэффициенты при вещественной и мнимой частях комплексного числа в комплексное число в форме $x + y \cdot i$; если аргумент **мнимая_единица** опущен, то предполагается, что он равен 1;

МНИМ.СУММ(компл_число1;компл_число2;...) и **МНИМ.ПРОИЗВЕД(компл_число1; компл_число2;...)** – предназначены для вычисления суммы и произведения, соответственно, до 29 комплексных чисел, представленных в алгебраической форме;

МНИМ.РАЗН(компл_число1;компл_число2) и **МНИМ.ДЕЛ(компл_число1; компл_число2)** – предназначены, соответственно, для вычисления разности и частного от деления двух комплексных, представленных в алгебраической форме;

МНИМ.СТЕПЕНЬ(компл_число;число) и **МНИМ.КОРЕНЬ(компл_число)** – вычисляет целую или дробную степень (**число**) комплексного числа (**компл_число**) и квадратный корень из комплексного числа (**компл_число**), представленного в алгебраической форме;

МНИМ.EXP(компл_число), **МНИМ.LN(компл_число)**, **МНИМ.LOG10(компл_число)**, **МНИМ.SIN(компл_число)**, **МНИМ.COS(компл_число)** – соответственно экспоненциальная функция комплексного числа, функция натурального логарифма, функция десятичного логарифма, функция синуса, функция косинуса комплексного числа.

3. Решение задач

Задача 1. Вычислить модуль и аргумент комплексного числа $z = 2 + i \cdot 3$.

Для решения задачи введем число z в ячейку **A1** в форме $2+3 \cdot i$. Для нахождения модуля комплексного числа z в ячейку **A2** вводим формулу **=МНИМ.ABS(A1)**, для нахождения аргумента в ячейку **A3** введем формулу **=МНИМ.АРГУМЕНТ(A1)**. Результаты вычислений представлены на рис. 35.

	А	В
1	$2+3i$	
2	3,605551	модуль
3	0,982794	аргумент

Рис. 35. Нахождение модуля и аргумента комплексного числа

Задача 2. Найти $(4 + i \cdot 6)^{-3}$.

Для решения задачи введем комплексное число в ячейку **A1** в форме $4+6 \cdot i$. Для нахождения степени комплексного числа в ячейку **A2** вводим формулу **=МНИМ.СТЕПЕНЬ(A1;-3)**.

Результат вычислений представлен на рис. 36.

	А	В	С	Д	Е
1	$4+6i$				
2	-2,61720527992717E-003-5,12061902594447E-004i				

Рис. 36. Нахождение степени комплексного числа

Задача 3. Найти значение $e^{3-i \cdot 2}$.

Для решения задачи введем число в ячейку **A1** в форме $3-2 \cdot i$. Для нахождения экспоненциальной функции комплексного числа в ячейку **A2** вводим формулу **=МНИМ.EXP(A1)**.

Результат вычислений представлен на рис. 37.

	А	В	С	Д
1	$3-2i$			
2	-8,35853265093537-18,2637270406668i			

Рис. 37. Нахождение экспоненциальной функции комплексного числа

Варианты заданий представлены в табл. 39–41.

Задача 1. Найти действительную и мнимую части следующих комплексных чисел.

Таблица 39

№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные
1	$(1-i)^9 + (1+i)^2 - i$	16	$(2+3i)^{13}$
2	$\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}\right)^5$	17	$\left(\frac{2+i^5}{1+i^{19}}\right)^2$
3	$\frac{1}{(1-i)^4} - \frac{1}{(1+i)^4}$	18	$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$
4	$(1+i)^3 + i(1-i)^4$	19	$(3-i\sqrt{3})^5$
5	$\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$	20	$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$

№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные
6	$(3 + i\sqrt{3})^2 - (3 - i\sqrt{3})^2$	21	$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)^4$
7	$(2 + i\sqrt{2})^4$	22	$i(1 + i)^3 - (1 - i)^4$
8	$\left(1 + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$	23	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$
9	$\frac{1}{(\sqrt{3} - i)^3}$	24	$\frac{\sqrt{2} + i}{2 - i\sqrt{2}}$
10	$(1 - i\sqrt{3})^2 - (1 + i\sqrt{3})^2$	25	$(1 + i\sqrt{3})^8$
11	$\frac{(1 - i)^3}{(1 + i)^5}$	26	$\frac{1}{(1 + i)^2} + \frac{1}{(1 - i)^2}$
12	$\frac{(1 + i)^9}{(1 - i)^7}$	27	$\frac{1}{(1 + i)^6} - \frac{1}{(1 - i)^6}$
13	$(1 + i)^{10} + (1 - i)^{10}$	28	$(1 - i)^6 - i(1 + i)^8$
14	$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8$	29	$\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}\right)^3$
15	$\frac{1}{(1 - i\sqrt{3})^2}$	30	$\frac{(1 + i)^3}{(1 + i\sqrt{3})^4}$

Задача 2. Найти модуль, главное значение аргумента и комплексно сопряженное число следующему заданному комплексному числу.

Таблица 40

№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные
1	$w = 2 + 5i$	16	$w = e^{2+i}$
2	$w = 1 + i^{123}$	17	$w = e^{-3-4i}$
3	$w = (1 + i\sqrt{3})^3$	18	$w = (1 - i)^3$
4	$w = 2 - 5i$	19	$w = (\sqrt{3} - 3i)^6$
5	$w = \frac{2}{1 - 3i}$	20	$w = \frac{i - 1}{1 + i}$
6	$w = -2 + 2\sqrt{3}i$	21	$w = (1 + i)^8$

№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные
7	$w = \frac{1-i}{1+i}$	22	$w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
8	$w = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$	23	$w = -3 + i\sqrt{3}$
9	$w = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$	24	$w = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$
10	$w = -1 - i\sqrt{3}$	25	$w = 3 - 4i$
11	$w = -\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$	26	$w = \frac{1}{i-1}$
12	$w = \sin\frac{3}{4}\pi - i\cos\frac{3}{4}\pi$	27	$w = -3 + i$
13	$w = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$	28	$w = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$
14	$w = -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$	29	$w = 1 + \sqrt{3}i$
15	$w = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$	30	$w = 2 + i^{25}$

Задача 3. Найти сумму, разность, произведение, деление следующих комплексных чисел.

Таблица 41

№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные
1	$(1-i)^9 + (1+i)^2 - i; \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$	16	$(2+3i)^{13}; \frac{1}{(\sqrt{3}-i)^3}$
2	$\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}\right)^5; \frac{\sqrt{2}+i}{2-i\sqrt{2}}$	17	$\left(\frac{2+i^5}{1+i^{19}}\right)^2; (1-i\sqrt{3})^2 - (1+i\sqrt{3})^2$
3	$\frac{1}{(1-i)^4} - \frac{1}{(1+i)^4}; (1+i\sqrt{3})^8$	18	$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3; \frac{(1-i)^3}{(1+i)^5}$
4	$(1+i)^3 + i(1-i)^4; \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(3-i)^2}$	19	$(3-i\sqrt{3})^5; \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$
5	$\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3; \frac{1}{(1+i)^6} - \frac{1}{(1-i)^6}$	20	$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}; (1+i)^{10} + (1-2i)^{10}$

№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные
6	$(3 + i\sqrt{3})^2 - (3 - i\sqrt{3})^2;$ $(1 - i)^6 - i(1 + i)^8$	21	$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4;$ $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8$
7	$(2 + i\sqrt{2})^4; \frac{1}{(1 - i\sqrt{3})^2}$	22	$i(1 + i)^3 - (1 - i)^4; \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}\right)^3$
8	$\left(1 + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2; \frac{(1 + i)^3}{(1 + i\sqrt{3})^4}$	23	$2 + 5i; -3 + i\sqrt{3}$
9	$e^{2+i}; \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$	24	$1 + i^{123}; -1 - i\sqrt{3}$
10	$e^{-3-4i}; 3 - 4i$	25	$(1 + i\sqrt{3})^3; -\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$
11	$(1 - i)^3; \sin\frac{3}{4}\pi - i\cos\frac{3}{4}\pi$	26	$2 - 5i; -3 + i$
12	$(\sqrt{3} - 3i)^6; \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$	27	$\frac{2}{1 - 3i}; \left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^3$
13	$\frac{i - 1}{1 + i}; -\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}$	28	$-2 + 2\sqrt{3}i; 1 + \sqrt{3}i$
14	$(1 + i)^8; -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$	29	$\frac{1 - i}{1 + i}; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
15	$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{i - 1}$	30	$2 + i^{25}; 1 + \sqrt{3}i$

ОБРАБОТКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

1. Условие задачи

Выполнить обработку статистических данных.

2. Математическая постановка задачи

В Excel для построения выборочных функций распределения используются специальная функция **ЧАСТОТА** и процедура пакета анализа **Гистограмма**.

Функция **ЧАСТОТА** вычисляет частоты появления случайной величины в интервалах значений и выводит их как массив цифр. Функция задается в качестве формулы массива **ЧАСТОТА(массив_данных; массив_карманов)**.

Здесь: **массив_данных** – это массив или ссылка на множество данных, для которых вычисляются частоты; **массив_карманов** – это массив или ссылка на множество интервалов, в которые группируются значения аргумента **массив_данных**.

Отметим, что количество элементов в возвращаемом массиве на единицу больше числа элементов в **массив_карманов**. Дополнительный элемент в возвращаемом массиве содержит количество значений, больших, чем максимальное значение в интервалах.

Процедура **Гистограмма** используется для вычисления выборочных и интегральных частот попадания данных в указанные интервалы значений. Процедура выводит результаты в виде таблицы и гистограммы.

Параметры диалогового окна **Гистограмма** представлены на рис. 38:

- в поле **Входной интервал** вводится диапазон исследуемых данных;
- в поле **Интервал карманов** (необязательный параметр) может вводиться диапазон ячеек или необязательный набор граничных значений, определяющих выбранные интервалы (карманы). Эти значения должны быть введены в возрастающем порядке. В MS Excel вычисляется число попаданий данных между началом интервала и соседним большим по порядку. При этом включаются значения на нижней границе интервала и не включаются значения на верхней границе. Если диапазон карманов не был введен, то набор интервалов, равномерно распределенных между минимальным и максимальным значениями данных, будет создан автоматически;

- рабочее поле **Выходной интервал** предназначено для ввода ссылки на левую верхнюю ячейку выходного диапазона. Размер выходного диапазона будет определен автоматически;

- переключатель **Интегральный процент** позволяет установить режим генерации интегральных процентных отношений и включения в гистограмму графика интегральных процентов;

- переключатель **Вывод графика** позволяет установить режим автоматического создания встроенной диаграммы на листе, содержащем выходной диапазон.

В мастере функций Excel имеется ряд специальных функций, предназначенных для вычисления выборочных характеристик. Прежде всего, это функции, характеризующие центр распределения:

- функция **СРЗНАЧ** вычисляет среднее арифметическое из нескольких массивов (аргументов) чисел. Аргументы **число 1**, **число 2**, ... – это от 1 до 30 массивов, для которых вычисляется среднее. Например, если ячейки **A1:A7** содержат числа 10, 14, 5, 6, 10, 12 и 13, то средним арифметическим **СРЗНАЧ(A1:A7)** является 10 (рис. 39);

- функция **МЕДИАНА** позволяет получать медиану заданной выборки. Медиана – это элемент выборки, число элементов выборки со значениями больше которого и меньше которого равно. Например, **МЕДИАНА(10;14;5;6;10;12;13)** равняется 10;

- функция **МОДА** вычисляет наиболее часто встречающееся значение в выборке. Например, **МОДА(10;14;5;6;10;12;13)** равняется 10.

К специальным функциям, вычисляющим выборочные характеристики, характеризующие рассеяние варианта, относятся:

- функция **ДИСП** позволяет оценить дисперсию по выборочным данным. Например, **ДИСП(10;14;5;6;10;12;13)** равняется **11,667**;
- функция **СТАНДОТКЛОН** вычисляет стандартное отклонение. Например, **СТАНДОТКЛОН(10;14;5;6;10;12;13)** равняется **3,416**.

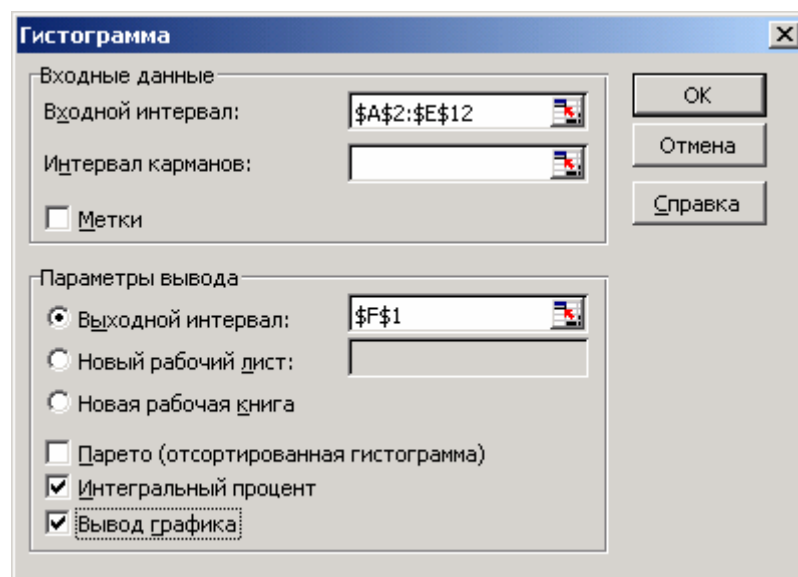


Рис. 38. Пример заполнения диалогового окна
Гистограмма

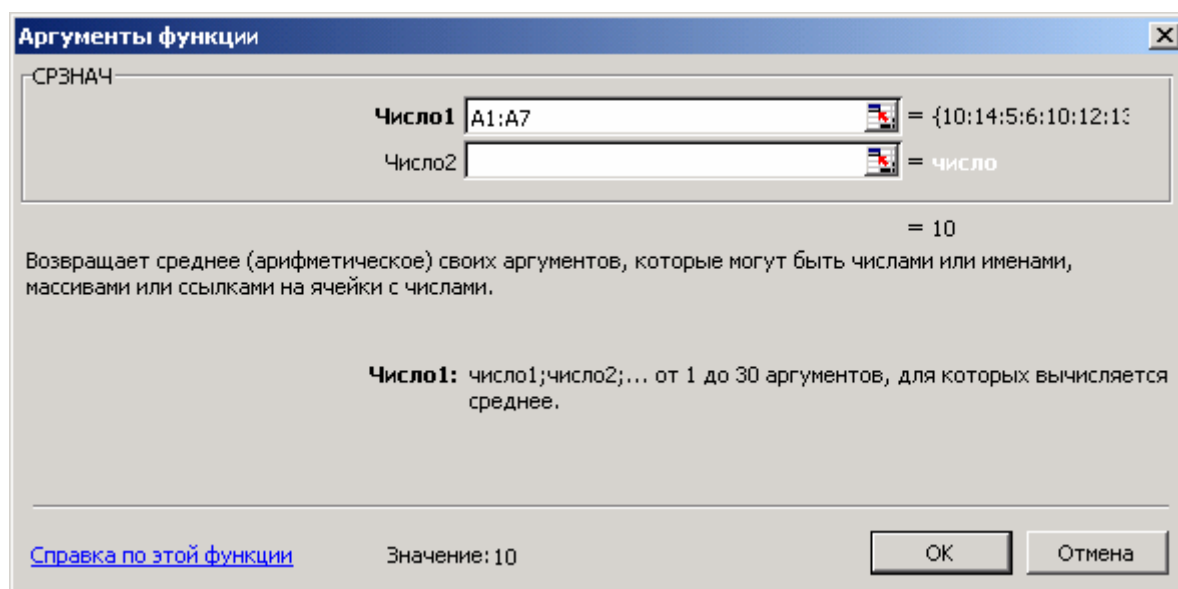


Рис. 39. Диалоговое окно функции **СРЗНАЧ**

3. Решение задач

Задача 1. Построить эмпирическое распределение веса студентов в килограммах для следующей выборки.

64	57	63	62	58	61	63	60	60	61	65
62	62	60	64	61	59	59	63	61	62	58
58	63	61	59	62	60	60	58	61	60	63
63	58	60	59	60	59	61	62	62	63	57
61	58	60	64	60	59	61	64	62	59	65

В ячейку **A1** введём слово **Наблюдения**, а в диапазон **A2:E12** – значения веса студентов (рис. 40).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Наблюдения						Вес	Абсолютные	Относительные	Накопленные
2	64	62	58	63	61		кг	частоты	частоты	частоты
3	57	62	63	58	58					
4	63	60	61	60	60		57	2	0,036	0,036
5	62	64	59	59	64		58	6	0,109	0,145
6	58	61	62	60	60		59	7	0,127	0,273
7	61	59	60	59	59		60	10	0,182	0,455
8	63	59	60	61	61		61	9	0,164	0,618
9	60	63	58	62	64		62	8	0,145	0,764
10	60	61	61	62	62		63	7	0,127	0,891
11	61	62	60	63	59		64	4	0,073	0,964
12	65	58	63	57	65		65	2	0,036	1,000
13								55		

Рис. 40. Результат вычислений относительных и накопленных частот

Выберем ширину интервала 1 кг. Тогда при крайних значениях веса 57 кг и 65 кг получится 9 интервалов. В ячейки **G1** введём название интервалов **Вес, кг**. В диапазон **G4:G12** введём граничные значения интервалов (57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65).

Создадим заголовки таблицы: **Абсолютные частоты**, **Относительные частоты**, **Накопленные частоты**.

Заполним столбец абсолютных частот. Для этого выделим для них блок ячеек **H4:H12**. Вызовем **Мастер функций**, в появившемся диалоговом окне из категории **Статистические** выберем функцию **ЧАСТОТА**. Далее в рабочее поле **Массив_данных** введём диапазон данных наблюдений (**A2:E12**); в поле **Двоичный_массив** – диапазон интервалов (**G4:G12**). После нажатия комбинации клавиш **Ctrl+Shift+Enter** в столбце **H4:H12** появится массив абсолютных частот. В ячейке **H13** найдём общее количество наблюдений.

Заполним столбец относительных частот. Для этого в ячейку **I4** введём формулу для вычисления относительной частоты: **=H4/H\$13** и скопируем её в диапазон **I5:I12**. Получим массив относительных частот.

Заполним столбец накопленных частот. В ячейку **J4** скопируем значение относительной частоты из ячейки **I4**. В ячейку **J5** введём формулу: **=J4+I5** и скопируем её в диапазон **J6:J12**. Получим массив накопленных частот.

Построим диаграмму относительных и накопленных частот: вызовем **Мастер диаграмм** и после выбора типа диаграммы – гистограммы – укажем диапазон данных **И1:J12**, установив положение переключателя **Ряды в:** в положение **в столбцах**. На вкладке **Ряд** введем в поле **Подписи оси X** диапазон **G4:G12**. Нажав кнопку **Далее**, введем названия осей: в рабочее поле **Ось X** (категорий) – **Вес**; **Ось Y** (значений) – **Относ.частота**; **Вторая ось Y** (значений) – **Накоплен.частота**. Нажмите кнопку **Готово**.

После минимального редактирования диаграмма будет иметь такой вид, как на рис. 41.

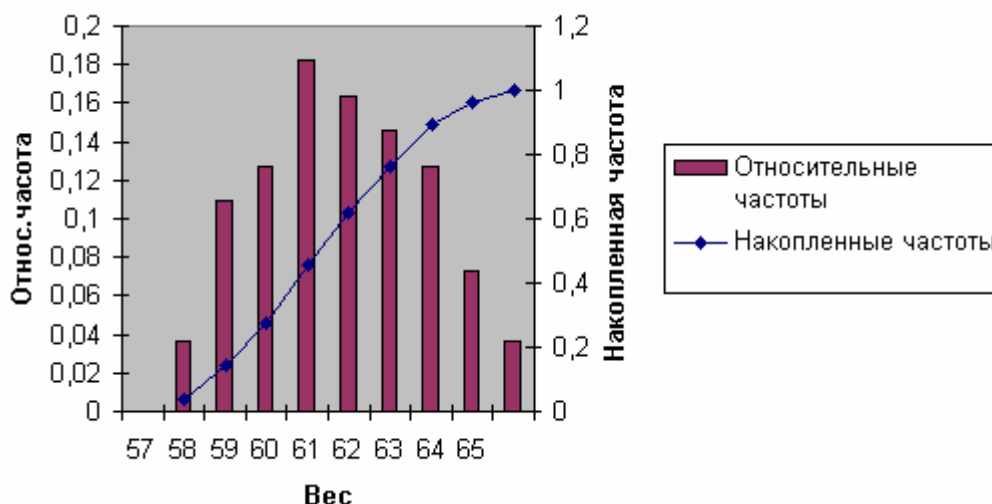


Рис. 41. Диаграмма относительных и накопленных частот

Задача 2. Для данных из задачи 1 построить эмпирические распределения, воспользовавшись процедурой **Гистограмма**.

Проведем подготовку исходных данных таблицы: в диапазон **A2:E12** введем значения веса студентов. Для вызова процедуры **Гистограмма** выберем из меню **Сервис** подпункт **Анализ данных** и в открывшемся окне в поле **Инструменты анализа** укажем процедуру **Гистограмма**. В появившемся окне заполним рабочие поля (см. рис. 38):

- во **Входной интервал** введем диапазон исследуемых данных (**A2:E12**);
- в **Выходной интервал** – ссылку на левую верхнюю ячейку выходного диапазона (**F1**). Установим переключатели в положение **Интегральный процент** и **Вывод графика**.

В результате появляется таблица и диаграмма, представленные на рис. 42.

Как видно, диаграмма на рис. 42 несколько отличается от диаграммы на рис. 41. Это объясняется тем, что диапазон карманов не был введен. Количество и границы интервалов определялись в процедуре **ГИСТОГРАММА** автоматически. Если бы в рабочее поле **Интервал карманов** был введен диапазон ячеек, определяющих выбранные интервалы, как в задаче 1 (57, 58, 59,..., 65), то полученная диаграмма была бы идентична предыдущей.

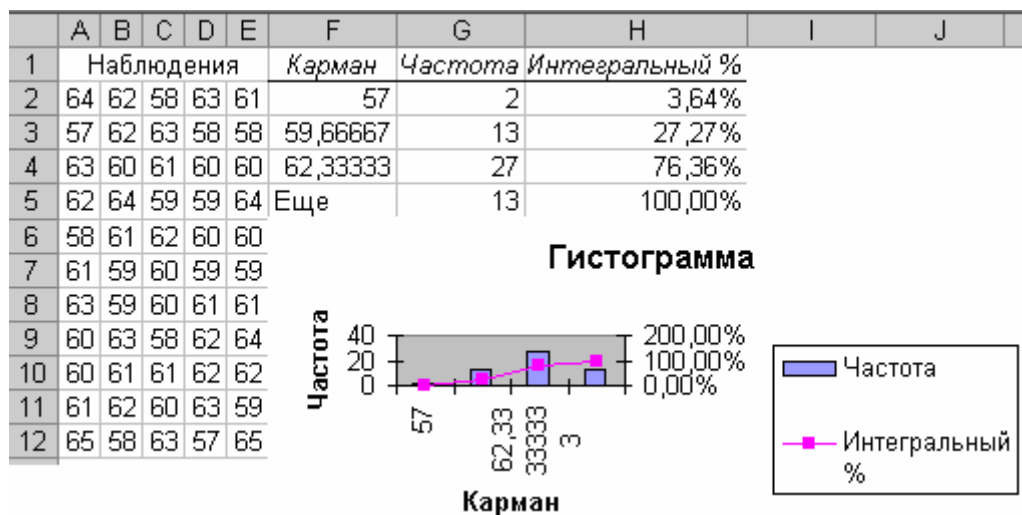


Рис. 42. Эмпирические распределения

Задача 3. Рассматриваются ежемесячные количества реализованных турфирмой путевок за периоды до и после начала активной рекламной компании. На рис. 43 приведены данные по количеству реализованных путевок по месяцам.

	А	В
1	Реклама	Без рекламы
2	162	135
3	156	126
4	144	115
5	137	140
6	125	121
7	145	112
8	151	130

Рис. 43. Исходные данные

Требуется найти средние значения и стандартные отклонения этих данных.

Для проведения статистического анализа, прежде всего, необходимо ввести данные в рабочую таблицу (см. рис. 43). Отметим, что рассматриваемые группы данных со статистической точки зрения являются выборками.

При статистическом анализе необходимо определить характеристики выборки. Для определения среднего значения в контрольной группе в свободную ячейку **A9** с помощью **Мастера функций** введем функцию **СРЗНАЧ (A2:A8)**. Аналогично в ячейке **B9** определим среднее значение числа реализованных путевок без активной рекламы (рис. 44).

Следующей по важности характеристикой выборки является мера разброса элементов выборки от среднего значения. Такой мерой является среднее квадратичное или стандартное отклонение. В ячейки **B10** и **A10** введем формулы:

$$= \text{СТАНДОТКЛОН}(B2:B8);$$

$$= \text{СТАНДОТКЛОН}(A2:A8)$$

и определим стандартное отклонение числа проданных путевок до начала рекламной компании и после. Существует правило, согласно которому при отсутст-

вии артефактов данные должны лежать в диапазоне $M \pm 3\sigma$ (в примере $145,7 \pm 36,9$).

	А	В
1	Реклама	Без рекламы
2	162	135
3	156	126
4	144	115
5	137	140
6	125	121
7	145	112
8	151	130
9	145,714	125,571
10	12,298	10,277

Рис. 44. Результаты вычислений

Варианты заданий (табл. 42)

По данным выборки выполнить следующие действия.

1. Найти минимальное (X_{\min}) и максимальное (X_{\max}) значения выборки.
2. Определить длину интервалов вариационного ряда по формуле

$$h = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{1 + 3,2 \lg n}$$
, где n – объем выборки.
3. Составить вариационный ряд.
4. Вычислить относительные частоты (частости) и накопленные частоты.
5. Построить полигон частостей и гистограмму.
6. Вычислить числовые характеристики вариационного ряда: среднее арифметическое, выборочную дисперсию.

Таблица 42

№ вар.	Исходные данные				
1	0,455	0,459	0,240	0,565	0,214
	0,214	0,260	0,531	0,552	0,477
	0,020	0,580	0,486	0,461	–0,019
	0,806	0,662	0,276	0,467	0,571
	0,574	0,437	0,305	0,581	0,782
	0,603	0,769	0,136	0,720	–0,016
	0,397	0,764	0,728	0,503	–0,130
	0,050	0,726	0,389	0,167	0,967
	0,485	0,665	0,677	0,487	0,023
	0,484	0,373	0,456	0,315	0,731

№ вар.	Исходные данные				
2	0,255	0,786	0,819	0,536	0,427
	0,353	0,467	0,594	0,165	0,269
	0,576	1,138	0,362	0,413	0,789
	0,735	0,800	0,732	0,280	0,972
	−0,004	0,230	0,360	0,447	0,707
	0,344	0,419	0,691	1,006	0,355
	1,124	0,061	0,601	0,490	0,772
	0,443	0,255	0,293	0,636	0,396
	0,183	0,567	0,557	0,360	0,469
	0,299	0,647	0,454	0,379	0,431
3	−0,517	0,465	0,568	0,217	0,212
	−0,639	0,743	0,826	1,049	0,459
	0,068	−0,454	1,616	1,398	1,729
	0,311	0,617	0,915	1,191	0,379
	0,521	0,214	0,554	2,440	−0,840
	1,146	0,475	0,966	0,168	−0,591
	0,627	1,133	0,281	2,635	0,411
	0,111	0,460	−0,494	0,460	1,201
	0,294	0,448	0,822	1,310	0,372
	−0,279	0,545	2,376	0,002	0,499
4	1,252	−0,710	−0,040	1,048	−0,032
	−1,287	0,275	1,142	−0,584	−1,495
	−0,852	0,594	1,556	−0,163	0,346
	0,161	−0,341	2,883	1,161	0,325
	1,323	1,556	−1,822	0,017	−0,604
	0,557	1,069	0,706	0,987	0,822
	2,644	−0,385	1,975	0,333	1,628
	1,700	−0,571	−0,886	1,437	−1,598
	−0,305	1,471	0,427	−0,070	1,209
	0,961	2,386	2,282	−0,551	1,230
5	4,576	0,378	1,959	4,142	0,259
	0,808	−0,734	3,124	1,596	−0,309
	1,451	2,961	−0,207	1,927	7,558
	4,904	−1,440	1,966	0,569	−0,186
	0,443	0,717	3,871	0,976	−0,914
	4,434	0,211	3,228	1,938	0,244
	2,811	1,831	1,939	−1,668	2,233
	1,876	1,865	1,008	0,966	5,369
	1,885	1,438	−0,453	0,312	2,915
	0,135	2,442	2,136	3,782	−0,937

№ вар.	Исходные данные				
6	–0,687	4,507	1,081	–0,734	–1,635
	2,839	3,328	1,977	4,220	1,801
	1,529	4,398	–1,877	3,712	0,294
	–0,573	–0,640	0,543	2,061	–1,141
	0,333	2,694	0,759	3,101	–2,212
	–0,196	1,388	2,222	0,535	0,208
	1,241	–2,028	1,642	0,624	4,655
	4,583	5,888	4,824	2,604	0,043
	1,992	0,751	1,333	2,818	2,441
	3,507	4,293	1,110	–1,606	3,692
7	3,967	3,940	1,836	–2,157	–1,556
	4,865	5,865	5,393	1,723	–2,330
	1,261	2,404	0,972	0,080	2,142
	–4,740	1,448	4,399	0,653	8,242
	8,413	–2,600	3,737	0,479	–3,831
	7,311	3,343	0,987	1,687	2,167
	0,588	–0,098	6,183	–0,082	3,356
	9,221	–5,210	3,229	0,076	4,350
	–0,305	5,242	0,061	1,142	11,926
	1,252	2,834	1,459	1,450	–2,317
8	–2,975	–5,822	2,680	–3,001	–0,695
	4,702	3,172	–3,660	–0,130	4,738
	–0,924	–1,186	5,796	4,465	–1,173
	–6,502	–1,519	–3,117	7,493	–4,625
	9,576	1,991	6,318	1,060	–1,440
	–4,953	0,655	–0,983	10,145	6,657
	2,018	6,927	–3,402	–3,510	2,652
	3,510	0,556	5,100	9,072	5,101
	3,843	2,040	4,775	2,797	–3,226
	5,694	–5,976	–2,321	–3,082	8,389
9	2,838	6,202	1,867	5,969	7,090
	–6,047	8,343	8,929	–3,720	2,424
	9,688	5,862	0,457	3,880	0,840
	1,154	6,800	–4,123	1,273	–0,115
	3,300	–0,954	–1,648	5,227	5,846
	–0,467	–0,321	6,744	0,306	1,016
	–2,052	–7,561	0,692	2,457	–5,037
	5,684	2,337	–6,605	–5,364	4,460
	5,562	4,875	8,294	5,295	5,760
	4,843	0,817	3,721	0,040	6,774

№ вар.	Исходные данные				
10	-0,088	1,923	9,013	-8,985	8,095
	10,515	-0,859	7,984	-0,053	1,550
	2,949	7,234	-4,664	-5,911	5,145
	-0,068	-0,537	-6,006	4,485	-8,707
	2,628	4,714	2,998	1,386	8,123
	-0,816	6,404	0,932	2,969	10,443
	0,217	-4,986	-6,566	8,818	-1,711
	7,268	5,486	1,118	2,369	1,961
	-4,723	5,758	4,174	0,069	-1,913
	5,097	-8,026	-6,561	2,185	3,561
11	9,124	-6,854	-0,486	1,654	7,575
	5,426	-1,143	4,540	-8,619	-2,464
	7,777	2,844	-7,081	-8,951	7,265
	-5,719	-12,467	0,353	7,070	4,650
	8,867	-5,559	-2,458	2,948	1,212
	9,339	0,096	11,929	6,291	-1,617
	2,818	-3,021	2,788	8,652	-2,429
	-9,894	12,284	-1,554	6,153	11,550
	3,396	-6,039	8,357	2,293	11,454
	4,175	8,715	13,870	0,112	0,042
12	-12,708	-6,178	2,669	-1,004	-1,772
	16,628	-0,391	-7,961	6,219	-2,623
	-16,199	-5,465	15,408	9,781	7,754
	3,266	-5,563	5,166	-1,621	25,754
	16,595	4,049	-2,736	17,676	9,692
	-6,709	9,166	-3,335	5,991	-0,419
	0,270	2,575	3,593	0,291	-0,532
	-2,551	3,437	-3,543	3,059	-4,390
	11,430	13,204	16,686	4,895	9,603
	-2,337	12,295	-2,053	-4,174	11,877
13	-4,469	3,314	3,867	11,933	4,509
	-12,382	8,980	0,007	-3,107	-2,526
	16,818	-2,761	9,841	0,736	5,146
	-1,833	-0,409	-2,996	2,211	-1,380
	-0,444	-1,913	-0,805	-14,761	1,497
	-4,385	31,637	-5,199	7,897	-3,926
	8,069	-0,405	2,907	13,041	6,813
	-0,878	7,809	4,413	-6,298	-4,584
	-8,103	21,360	10,882	12,193	5,151
	15,593	13,630	-0,385	5,383	9,646

№ вар.	Исходные данные				
14	3,165	17,696	-2,895	2,218	-1,819
	-2,169	18,920	1,177	14,828	-10,256
	-2,999	-5,625	3,307	-8,886	10,973
	3,027	13,634	-3,686	-5,322	-3,414
	15,920	1,149	-3,824	5,939	-9,286
	2,985	-1,946	-0,069	3,555	4,775
	-3,634	12,889	3,564	10,796	14,611
	0,236	-11,640	5,036	-5,023	1,370
	7,394	1,214	6,680	13,586	-10,239
	5,282	-5,447	13,135	13,147	18,153
15	9,044	10,833	6,608	16,344	14,490
	4,815	-0,227	6,737	6,501	0,377
	2,455	-6,340	-6,163	0,394	5,971
	6,393	4,782	-6,554	-13,763	3,849
	-0,076	-2,522	3,401	6,077	7,880
	-2,115	9,981	12,571	4,716	12,804
	-10,960	7,187	10,985	12,790	-2,121
	-9,586	6,320	-1,796	11,722	14,116
	5,264	21,755	19,264	16,333	9,963
	11,322	-11,661	-5,171	-3,488	10,132
16	-4,227	9,167	7,456	3,698	2,291
	-25,370	8,115	5,933	3,109	-0,900
	17,741	-7,329	2,113	14,612	3,749
	12,140	-4,289	-2,719	7,791	3,300
	0,869	3,444	3,360	1,463	-0,217
	10,789	5,394	24,789	12,290	6,444
	13,340	-7,384	5,779	11,992	-2,021
	-5,555	-5,313	1,496	-10,465	5,945
	9,384	-2,493	6,958	2,908	3,871
	-1,465	21,722	24,188	0,542	11,085
17	-2,975	-5,822	2,680	-3,001	-0,695
	4,702	3,172	-3,660	-0,130	4,738
	-0,924	-1,186	5,796	4,465	-1,173
	-6,502	-1,519	-3,117	7,493	-4,625
	9,576	1,991	6,318	1,060	-1,440
	-4,953	0,655	-0,983	10,145	6,657
	2,018	6,927	-3,402	-3,510	2,652
	3,510	0,556	5,100	9,072	5,101
	3,843	2,040	4,775	2,797	-3,226
	5,694	-5,976	-2,321	-3,082	8,389

№ вар.	Исходные данные				
18	2,838	6,202	1,867	5,969	7,090
	−6,047	8,343	8,929	−3,720	2,424
	9,688	5,862	0,457	3,880	0,840
	1,154	6,800	−4,123	1,273	−0,115
	3,300	−0,954	−1,648	5,227	5,846
	−0,467	−0,321	6,744	0,306	1,016
	−2,052	−7,561	0,692	2,457	−5,037
	5,684	2,337	−6,605	−5,364	4,460
	5,562	4,875	8,294	5,295	5,760
	4,843	0,817	3,721	0,040	6,774
19	0,257	0,788	0,821	0,538	0,429
	0,355	0,469	0,596	0,167	0,271
	0,578	1,140	0,364	0,415	0,791
	0,737	0,802	0,734	0,282	0,974
	−0,006	0,232	0,362	0,449	0,709
	0,346	0,421	0,693	1,008	0,357
	1,126	0,063	0,603	0,492	0,774
	0,445	0,257	0,296	0,638	0,398
	0,185	0,569	0,559	0,381	0,362
	0,301	0,649	0,456	0,433	0,471
20	−0,519	0,467	0,0570	0,219	0,214
	−0,641	0,745	−0,828	1,051	0,461
	0,070	−0,456	1,618	1,400	1,731
	0,313	0,619	−0,917	1,192	0,381
	0,523	0,216	0,556	2,442	−0,842
	1,148	0,477	0,968	0,170	−0,593
	0,629	1,135	0,283	2,637	0,413
	0,113	0,462	−0,496	0,462	1,203
	0,296	0,450	0,824	1,312	0,374
	−0,281	0,547	2,378	0,004	0,501
21	9,124	−6,854	0,819	0,536	0,427
	5,426	−1,143	0,594	0,165	0,269
	7,777	2,844	0,362	0,413	0,789
	−5,719	−12,467	0,732	0,280	0,972
	8,867	−5,559	0,360	0,447	0,707
	9,339	0,096	0,691	1,006	0,355
	2,818	−3,021	0,601	0,490	0,772
	−9,894	12,284	0,293	0,636	0,396
	3,396	−6,039	0,557	0,360	0,469
	4,175	8,715	0,454	0,379	0,431

№ вар.	Исходные данные				
22	0,568	0,217	0,212	1,252	–0,710
	0,826	1,049	0,459	–1,287	0,275
	1,616	1,398	1,729	–0,852	0,594
	0,915	1,191	0,379	0,161	–0,341
	0,554	2,440	–0,840	1,323	1,556
	0,966	0,168	–0,591	0,557	1,069
	0,281	2,635	0,411	2,644	–0,385
	–0,494	0,460	1,201	1,700	–0,571
	0,822	1,310	0,372	–0,305	1,471
	2,376	0,002	0,499	0,961	2,386
23	1,959	4,142	0,259	–0,687	4,507
	3,124	1,596	–0,309	2,839	3,328
	–0,207	1,927	7,558	1,529	4,398
	1,966	0,569	–0,186	–0,573	–0,640
	3,871	0,976	–0,914	0,333	2,694
	3,228	1,938	0,244	–0,196	1,388
	1,939	–1,668	2,233	1,241	–2,028
	1,008	0,966	5,369	4,583	5,888
	–0,453	0,312	2,915	1,992	0,751
	2,136	3,782	–0,937	3,507	4,293
24	–2,157	–1,556	–2,975	–5,822	2,680
	1,723	–2,330	4,702	3,172	–3,660
	0,080	2,142	–0,924	–1,186	5,796
	0,653	8,242	–6,502	–1,519	–3,117
	0,479	–3,831	9,576	1,991	6,318
	1,687	2,167	–4,953	0,655	–0,983
	–0,082	3,356	2,018	6,927	–3,402
	0,076	4,350	3,510	0,556	5,100
	1,142	11,926	3,843	2,040	4,775
	1,450	–2,317	5,694	–5,976	–2,321
25	1,867	5,969	7,090	–0,088	1,923
	8,929	–3,720	2,424	10,515	–0,859
	0,457	3,880	0,840	2,949	7,234
	–4,123	1,273	–0,115	–0,068	–0,537
	–1,648	5,227	5,846	2,628	4,714
	6,744	0,306	1,016	–0,816	6,404
	0,692	2,457	–5,037	0,217	–4,986
	–6,605	–5,364	4,460	7,268	5,486
	8,294	5,295	5,760	–4,723	5,758
	3,721	0,040	6,774	5,097	–8,026

№ вар.	Исходные данные				
26	–0,486	1,654	7,575	–12,708	–6,178
	4,540	–8,619	–2,464	16,628	–0,391
	–7,081	–8,951	7,265	–16,199	–5,465
	0,353	7,070	4,650	3,266	–5,563
	–2,458	2,948	1,212	16,595	4,049
	11,929	6,291	–1,617	–6,709	9,166
	2,788	8,652	–2,429	0,270	2,575
	–1,554	6,153	11,550	–2,551	3,437
	8,357	2,293	11,454	11,430	13,204
	13,870	0,112	0,042	–2,337	12,295
27	3,867	11,933	4,509	2,218	–1,819
	0,007	–3,107	–2,526	14,828	–10,256
	9,841	0,736	5,146	–8,886	10,973
	–2,996	2,211	–1,380	–5,322	–3,414
	–0,805	–14,761	1,497	5,939	–9,286
	–5,199	7,897	–3,926	3,555	4,775
	2,907	13,041	6,813	10,796	14,611
	4,413	–6,298	–4,584	–5,023	1,370
	10,882	12,193	5,151	13,586	–10,239
	–0,385	5,383	9,646	13,147	18,153
28	16,344	14,490	–4,227	9,167	7,456
	6,501	0,377	–25,370	8,115	5,933
	0,394	5,971	17,741	–7,329	2,113
	–13,763	3,849	12,140	–4,289	–2,719
	6,077	7,880	0,869	3,444	3,360
	4,716	12,804	10,789	5,394	24,789
	12,790	–2,121	13,340	–7,384	5,779
	11,722	14,116	–5,555	–5,313	1,496
	16,333	9,963	9,384	–2,493	6,958
	–3,488	10,132	–1,465	21,722	24,188
29	2,680	–3,001	–0,695	2,838	6,202
	–3,660	–0,130	4,738	–6,047	8,343
	5,796	4,465	–1,173	9,688	5,862
	–3,117	7,493	–4,625	1,154	6,800
	6,318	1,060	–1,440	3,300	–0,954
	–0,983	10,145	6,657	–0,467	–0,321
	–3,402	–3,510	2,652	–2,052	–7,561
	5,100	9,072	5,101	5,684	2,337
	4,775	2,797	–3,226	5,562	4,875
	–2,321	–3,082	8,389	4,843	0,817

№ вар.	Исходные данные				
30	0,821	0,538	0,429	–0,519	0,467
	0,596	0,167	0,271	–0,641	0,745
	0,364	0,415	0,791	0,070	–0,456
	0,734	0,282	0,974	0,313	0,619
	0,362	0,449	0,709	0,523	0,216
	0,693	1,008	0,357	1,148	0,477
	0,603	0,492	0,774	0,629	1,135
	0,296	0,638	0,398	0,113	0,462
	0,559	0,381	0,362	0,296	0,450
	0,456	0,433	0,471	–0,281	0,547

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Богатов, В.Г. Решение задач правоохранительной практики в среде EXCEL. Практикум: учебное пособие для вузов юридического профиля / В.Г. Богатов. – М.: Московский ун-т МВД РФ: Изд-во «Щит-М», 2006. – 316 с.
2. Рудикова, Л.В. Microsoft Excel для студента / Л.В. Рудикова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 368 с.
3. Зеньковский, Р.А. Excel в экономических и инженерных расчетах / Р.А. Зеньковский. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005. – 192 с.
4. Гельман, В.Я. Решение математических задач средствами Excel: практикум / В.Я. Гельман. – СПб.: Питер, 2003. – 192 с.
5. Попов, А.А. EXCEL: практическое руководство / А.А. Попов. – М.: Десс КОМ, 2000. – 301 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Решение уравнения.....	2
Табулирование функции	4
Вычисление значения функции.....	8
Вычисление определенного интеграла.....	11
Вычисление производной	17
Решение систем линейных уравнений	18
Обработка экспериментальных данных	23
Задачи многомерной оптимизации с ограничениями.....	29
Дифференциальные уравнения первого порядка	54
Комплексные числа	58
Обработка статистических данных.....	63
Библиографический список.....	78