

1. Найдите боковую сторону АВ трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 45° и 150° , а $CD=32$.

Решение:

Самое важное – это правильно построить, т.к. один угол при верхнем основании острый, другой – тупой.

Д.п. $CH \perp AD$, $BK \perp AD$.

Рассмотрим $\triangle CHD$: $\angle H = 90^\circ$, $\angle C = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$, тогда $\angle D = 30^\circ$, тогда по свойству катета, лежащего против угла в 30° , $CH = 0,5 CD = 16$

Рассмотрим $\triangle KBA$: $\angle K = 90^\circ$, $\angle B = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, тогда $\angle A = 45^\circ = \angle B$, по признаку р/б треугольника $\triangle KBA$ – р/б, а по определению р/б треугольника $KB = KA$, $KB = CH = h = 16$. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{16^2 + 16^2} = \sqrt{512} = \sqrt{256 \cdot 2} = 16\sqrt{2}$

Ответ: $16\sqrt{2}$

2. Аналог №1. Найдите боковую сторону АВ трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 45° и 150° , а $CD=26$.

Ответ: $13\sqrt{2}$

3. Найдите боковую сторону АВ трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 30° и 120° , а $CD=25$.

Здесь находим по Пифагору $CH = \sqrt{\frac{125 \cdot 375}{10 \cdot 10}} = \frac{\sqrt{25 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 15}}{10} = \frac{25 \cdot 5\sqrt{3}}{10} = 12,5\sqrt{3}$, а $AB =$

$2 \cdot CH(KB) = 25\sqrt{3}$

Ответ: $25\sqrt{3}$

4. Найдите боковую сторону АВ трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 45° и 120° , а $CD=40$.

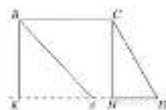
Здесь находим по Пифагору $CH = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3}$, а $AB = 20\sqrt{6}$

Ответ: $20\sqrt{6}$

5. Аналог №4. Найдите боковую сторону АВ трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 45° и 120° , а $CD=34$.

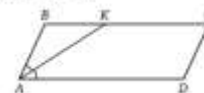
Здесь находим по Пифагору $CH = \sqrt{17 \cdot 17 \cdot 3} = 17\sqrt{3}$, а $AB = \sqrt{17 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 3} = 17\sqrt{6}$

Ответ: $17\sqrt{6}$



6. Биссектриса угла А параллелограмма ABCD пересекает сторону ВС в точке К. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=7$, $CK=12$.

Решение. Углы BKA и KAD равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK , AK – биссектриса угла BAD , следовательно, $\angle BKA = \angle KAD = \angle BAK$. Значит, треугольник BKA равнобедренный, и $AB = BK = 7$.



$$P = 2(19 + 7) = 52$$

Ответ: 52

7. Биссектриса угла А параллелограмма ABCD пересекает сторону ВС в точке К. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=5$, $CK=14$.

Ответ: 48

8. Биссектриса угла А параллелограмма ABCD пересекает сторону ВС в точке К. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=8$, $CK=13$.

Ответ: 58

9. Биссектриса угла А параллелограмма ABCD пересекает сторону ВС в точке К. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=3$, $CK=19$.

Ответ: 50

10. Биссектриса угла А параллелограмма ABCD пересекает сторону ВС в точке К. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=6$, $CK=10$.

Ответ: 44

11. Биссектриса угла А параллелограмма ABCD пересекает сторону ВС в точке К. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=11$, $CK=20$.

Ответ: 84

12. Биссектриса угла А параллелограмма ABCD пересекает сторону ВС в точке К. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=10$, $CK=18$.

Ответ: 76

13. Биссектриса угла А параллелограмма ABCD пересекает сторону ВС в точке К. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=12$, $CK=16$.

Ответ: 80

14. Площадь параллелограмма ABCD равна 180. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь трапеции DAEC.

Решение:

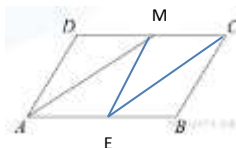
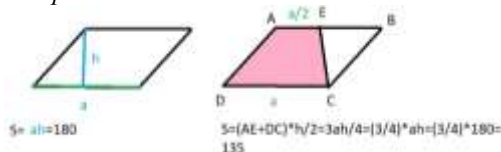
Д.п. M — середина CD, ME, EC.

Рассмотрим $\triangle ADM$ и $\triangle EAM$ (равны по 1 признаку) по опр. р.ф. $\angle DAM = \angle AEM$, но эти углы н/л при прямых DA и ME, значит, по признаку параллельных прямых $AD \parallel ME$, $DM \parallel AE$, по опр. п-ма ADME п-м, по св-ву п-ма $AD = ME$

Аналогично $\triangle EBC = \triangle ECM$, кроме того $\triangle ADM = \triangle ECM$, а значит все четыре треугольника равны, тогда и их площади равны, площадь каждого треугольника равна $180 : 4 = 45$. Трапеция DAEC состоит из 3 таких треугольников, а значит её площадь равна $45 \cdot 3 = 135$

Ответ: 135

Второй способ:



15. Площадь параллелограмма ABCD равна 60. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь трапеции DAEC.
Ответ: 45
16. Площадь параллелограмма ABCD равна 32. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь трапеции DAEC.
Ответ: 24
17. Площадь параллелограмма ABCD равна 76. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь трапеции DAEC.
Ответ: 57
18. Площадь параллелограмма ABCD равна 96. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь трапеции DAEC.
Ответ: 72
19. Площадь параллелограмма ABCD равна 104. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь трапеции DAEC.
Ответ: 78
20. Площадь параллелограмма ABCD равна 92. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь трапеции DAEC.
Ответ: 69
21. Площадь параллелограмма ABCD равна 132. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь трапеции DAEC.
Ответ: 99
22. Площадь параллелограмма ABCD равна 28. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь трапеции DAEC.
Ответ: 21

23. Площадь параллелограмма ABCD равна 128. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь трапеции DAEC.

Ответ: 96

24. Площадь параллелограмма ABCD равна 132. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CBE.

Ответ: 33

25. Площадь параллелограмма ABCD равна 68. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CBE.

Ответ: 17

26. Площадь параллелограмма ABCD равна 44. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CBE.

Ответ: 11

27. Площадь параллелограмма ABCD равна 84. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CBE.

Ответ: 21

28. Площадь параллелограмма ABCD равна 196. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CBE.

Ответ: 21

29. Площадь параллелограмма ABCD равна 112. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CBE.

Ответ: 28

30. Площадь параллелограмма ABCD равна 104. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CBE.

Ответ: 26

31. Площадь параллелограмма ABCD равна 148. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CBE.

Ответ: 37

32. Площадь параллелограмма ABCD равна 140. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CBE.

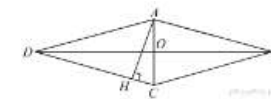
Ответ: 35

33. Площадь параллелограмма ABCD равна 136. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CBE.

Ответ: 34

34. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 15, а одна из диагоналей ромба равна 60. Найдите углы ромба.
Решение:
Рассмотрим прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза в два раза больше катета, значит угол равен 30° , значит во всех задачах углы ромба по
Ответ: 60° и 120° .
35. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 10, а одна из диагоналей ромба равна 40. Найдите углы ромба.
36. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 11, а одна из диагоналей ромба равна 44. Найдите углы ромба.
37. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 12, а одна из диагоналей ромба равна 48. Найдите углы ромба.
38. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 13, а одна из диагоналей ромба равна 52. Найдите углы ромба.
39. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 14, а одна из диагоналей ромба равна 56. Найдите углы ромба.
40. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 16, а одна из диагоналей ромба равна 64. Найдите углы ромба.
41. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 17, а одна из диагоналей ромба равна 68. Найдите углы ромба.
42. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 18, а одна из диагоналей ромба равна 72. Найдите углы ромба.
43. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 19, а одна из диагоналей ромба равна 76. Найдите углы ромба.

44. Высота АН ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH=8 и CH=2. Найдите высоту ромба.



Решение:

Рассмотрим $\triangle DAH$: $\angle H = 90^\circ$, $DA = DC = 8 + 2 = 10$ (по опр. ромба). По Пифагору $AH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

Ответ: 6

45. Высота АН ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH=12 и CH=1. Найдите высоту ромба.
Ответ: 5
46. Высота АН ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH=12 и CH=3. Найдите высоту ромба
Ответ: 9
47. Высота АН ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH=15 и CH=2. Найдите высоту ромба.
Ответ: 8
48. Высота АН ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH=16 и CH=4. Найдите высоту ромба.
Ответ: 12
49. Высота АН ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH=20 и CH=5. Найдите высоту ромба.
Ответ: 15
50. Высота АН ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH=24 и CH=1. Найдите высоту ромба.
Ответ: 7
51. Высота АН ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH=24 и CH=2. Найдите высоту ромба.
Ответ: 10
52. Высота АН ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH=21 и CH=8. Найдите высоту ромба.
Ответ: 20
53. Высота АН ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH=24 и CH=6. Найдите высоту ромба.
Ответ: 18

54. Биссектрисы углов А и В при боковой стороне АВ трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите АВ, если AF=24, BF=10.

Решение.

Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180° , значит,

$$\angle ABF + \angle BAF = \frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle BAD) = 90^\circ.$$

Получаем, что треугольник ABF прямоугольный с прямым углом F. По теореме Пифагора найдем AB.

$$AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26.$$

Ответ: 26



55. Биссектрисы углов А и В при боковой стороне АВ трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите АВ, если AF=12, BF=5.

Ответ: 13

56. Биссектрисы углов А и В при боковой стороне АВ трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите АВ, если AF=12, BF=9.

Ответ: 15

57. Биссектрисы углов А и В при боковой стороне АВ трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите АВ, если AF=15, BF=8.

Ответ: 17

58. Биссектрисы углов А и В при боковой стороне АВ трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите АВ, если AF=16, BF=12.

Ответ: 20

59. Биссектрисы углов А и В при боковой стороне АВ трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите АВ, если AF=20, BF=15.

Ответ: 25

60. Биссектрисы углов А и В при боковой стороне АВ трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите АВ, если AF=24, BF=7.

Ответ: 25

61. Биссектрисы углов А и В при боковой стороне АВ трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите АВ, если AF=21, BF=20.

Ответ: 29

62. Биссектрисы углов А и В при боковой стороне АВ трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите АВ, если AF=24, BF=18.

Ответ: 30

63. Биссектрисы углов А и В при боковой стороне АВ трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите АВ, если AF=32, BF=24.

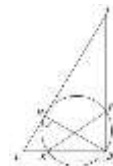
Ответ: 40

64. Точка Н является основанием высоты ВН, проведённой из вершины прямого угла В прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром ВН пересекает стороны АВ и СВ в точках Р и К соответственно. Найдите РК, если ВН=14.

Решение:

$\angle PBK = 90^\circ$, но этот угол впис., а значит он опирается на диаметр, значит РК – тоже диаметр, т.о. $PK = HN = 14$

Ответ: 14



65. Точка Н является основанием высоты ВН, проведённой из вершины прямого угла В прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром ВН пересекает стороны АВ и СВ в точках Р и К соответственно. Найдите РК, если ВН=13. **Ответ:** 13

66. Точка Н является основанием высоты ВН, проведённой из вершины прямого угла В прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром ВН пересекает стороны АВ и СВ в точках Р и К соответственно. Найдите РК, если ВН=12. **Ответ:** 12

67. Точка Н является основанием высоты ВН, проведённой из вершины прямого угла В прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром ВН пересекает стороны АВ и СВ в точках Р и К соответственно. Найдите РК, если ВН=11. **Ответ:** 11

68. Точка Н является основанием высоты ВН, проведённой из вершины прямого угла В прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром ВН пересекает стороны АВ и СВ в точках Р и К соответственно. Найдите РК, если ВН=15. **Ответ:** 15

69. Точка Н является основанием высоты ВН, проведённой из вершины прямого угла В прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром ВН пересекает стороны АВ и СВ в точках Р и К соответственно. Найдите ВН, если РК=15. **Ответ:** 15

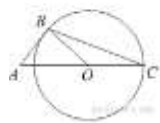
70. Точка Н является основанием высоты ВН, проведённой из вершины прямого угла В прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром ВН пересекает стороны АВ и СВ в точках Р и К соответственно. Найдите ВН, если РК=14. **Ответ:** 14

71. Точка Н является основанием высоты ВН, проведённой из вершины прямого угла В прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром ВН пересекает стороны АВ и СВ в точках Р и К соответственно. Найдите ВН, если РК=13. **Ответ:** 13

72. Точка Н является основанием высоты ВН, проведённой из вершины прямого угла В прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром ВН пересекает стороны АВ и СВ в точках Р и К соответственно. Найдите ВН, если РК=12.

73. Точка Н является основанием высоты ВН, проведённой из вершины прямого угла В прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром ВН пересекает стороны АВ и СВ в точках Р и К соответственно. Найдите ВН, если РК=11. **Ответ:** 11

74. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если $AB=9$, $AC=12$.
Решение: чтобы найти диаметр можно найти радиус и умножить на 2.
 Д.п. OB – радиус окружности. Рассмотрим $\triangle AOB$: $\angle B = 90^\circ$, т.к. по св-ву кас. $OB \perp AB$. Пусть $OC=OB=x$ ($OC=OB=R$), тогда $AO = 12 - x$. По теореме Пифагора $(12 - x)^2 = 9^2 + x^2$, $x=2,625$
Ответ: 5,25
75. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если $AB=3$, $AC=5$.
Ответ: 3,2
76. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если $AB=2$, $AC=8$.
Ответ: 7,5
77. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если $AB=1$, $AC=5$.
Ответ: 4,8
78. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если $AB=3$, $AC=9$.
Ответ: 8
79. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен 3,6, а $AB=8$.
Ответ: 10
80. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен 6,4, а $AB=6$.
Ответ: 10
81. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен 8,4, а $AB=4$.
Ответ: 10
82. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен 15, а $AB=4$.
Ответ: 16
83. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен 16, а $AB=15$.
Ответ: 25



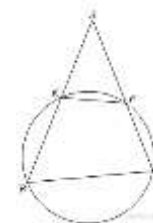
84. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AK=6$, а сторона AC в 1,5 раза больше стороны BC.

Решение:

По св-ву впис 4-уг-ка $\angle B + \angle KPC = 180^\circ$.

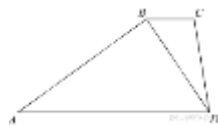
$\angle APK + \angle KPC = 180^\circ$, как смежные, тогда получаем, что $\angle APK = \angle B$ и $\angle A$ – общий, тогда по признаку подобия треугольников $\triangle ABC \sim \triangle AKP$, тогда $\frac{AC}{AK} = \frac{BC}{KP}$. Пусть $BC=x$, тогда $AC=1,5x$, $\frac{1,5x}{6} = \frac{x}{KP}$. X сократиться, $KP=4$

Ответ: 4



85. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AK=14$, а сторона AC в 2 раза больше стороны BC.
Ответ: 7
86. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AK=18$, а сторона AC в 1,2 раза больше стороны BC.
Ответ: 15
87. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AK=7$, а сторона AC в 1,4 раза больше стороны BC.
Ответ: 5
88. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AK=16$, а сторона AC в 1,6 раза больше стороны BC.
Ответ: 10
89. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AP=36$, а сторона BC в 1,8 раза меньше стороны AB.
Ответ: 20

90. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 5 и 20, BD = 10. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны. (стр.86)



Решение:

Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \angle CBD = \angle BDA \text{ как н/л при } BC \parallel AD \text{ и сек. } BD \\ 2) \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{AD} = \frac{5}{10} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{ по признаку подобия } \triangle ABD \sim \triangle CBD, \text{ ч.т.д.}$$

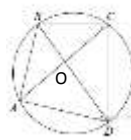
91. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 4,5 и 18, BD = 9. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.
92. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 3 и 12, BD = 6. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.
93. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 4 и 64, BD = 16. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.
94. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 5 и 45, BD = 15. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.
95. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 6 и 24, BD = 12. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.
96. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 7 и 28, BD = 14. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.
97. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 8 и 32, BD = 16. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

98. В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы BCA и BDA равны. Докажите, что углы ABD и ACD также равны.

Решение: ОКРУЖНОСТЬ не нужна

Пусть $AC \cap BD = O$. $\triangle BOC \sim \triangle AOD$ (по двум углам), тогда $\angle OBC = \angle OAD$, кроме того $\frac{BO}{AO} = \frac{OC}{OD}$, $BO = \frac{OC \cdot AO}{OD}$, т.к. всё это числа, то разделим обе части на OC, то $\frac{BO}{CO} = \frac{OA}{OD}$

Рассмотрим $\triangle OCD$ и $\triangle ABO$ углы O равны как верт. $\frac{BO}{CO} = \frac{OA}{OD}$, тогда по признаку подобия треугольников $\triangle OCD \sim \triangle ABO$, значит $\angle ABD = \angle ACD$, ч.т.д.

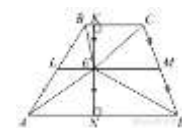


99. В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы ABD и ACD равны. Докажите, что углы DAC и DBC также равны.

100. В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы CDB и CAB равны. Докажите, что углы BCA и BDA также равны.

101. В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы DAC и DBC равны. Докажите, что углы CDB и CAB также равны.

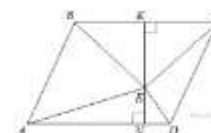
102. На средней линии трапеции ABCD с основаниями AD и BC выбрали в произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции.



103. На средней линии трапеции ABCD с основаниями AD и BC выбрали в произвольную точку K. Докажите, что сумма площадей треугольников BKC и AKD равна половине площади трапеции.

104. На средней линии трапеции ABCD с основаниями AD и BC выбрали в произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади трапеции.

105. Внутри параллелограмма ABCD выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине параллелограмма.



Решение:

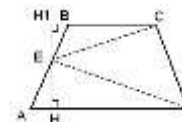
Через точку E надо провести перпендикуляр KN, $KN \perp BC$, $KN \perp AD$.

$$S_{ABCD} = KN \cdot BC, S_{BCE} = 0,5 KE \cdot BC, S_{AED} = 0,5 NE \cdot AD = 0,5 NE \cdot BC$$

$$S_{BCE} + S_{AED} = 0,5 KE \cdot BC + 0,5 NE \cdot BC = 0,5 \cdot BC (KE + NE) = 0,5 \cdot BC \cdot KN = 0,5 \cdot S_{ABCD}, \text{ т.о. получаем, что } S_{BCE} + S_{AED} = 0,5 \cdot S_{ABCD}$$

106. Внутри параллелограмма ABCD выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине параллелограмма.

107. Точка E – середина боковой стороны AB трапеции ABCD. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции.



Решение:

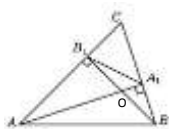
Рассмотрим $\triangle EBH_1$ и $\triangle EBH$ (они равны по 2 признаку), тогда $EH = EH_1$

$$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot H_1H, S_{BCE} = 0,5 EH_1 \cdot BC, S_{ADE} = 0,5 EH \cdot AD, S_{BCE} + S_{ADE} = 0,5 EH_1 \cdot BC + 0,5 EH \cdot AD = 0,5 EH (BC + AD) = 0,25 HH_1 (BC + AD) = 0,5 S_{ABCD}$$

значит $S_{ECD} = 0,5 S_{ABCD}$

108. Точка К – середина боковой стороны CD трапеции ABCD. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

109. Аналог №98. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA₁ и BB₁. Докажите, что углы AA₁B₁ и ABB₁ равны.



Решение:

$\triangle AB_1O \sim \triangle A_1BO$ (по двум углам), тогда $\frac{B_1O}{OA_1} = \frac{OA}{OB}$, получим другую, равную первой пропорцию $B_1O = \frac{OA \cdot OA_1}{OB}$ или $\frac{B_1O}{OA_1} = \frac{OA}{OB}$, а также углы O равны, значит $\triangle A_1B_1O \sim \triangle ABO$ (по второму признаку), тогда по опр подобных треугольников $\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1$

110. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA₁ и BB₁. Докажите, что углы BB₁A₁ и BAA₁ равны.

111. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA₁ и CC₁. Докажите, что углы AA₁C₁ и ACC₁ равны.

112. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA₁ и CC₁. Докажите, что углы CC₁A₁ и CAA₁ равны.

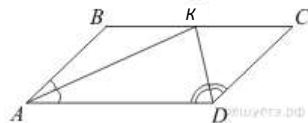
113. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB₁ и CC₁. Докажите, что углы BB₁C₁ и BCC₁ равны.

114. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB₁ и CC₁. Докажите, что углы CC₁B₁ и CBV₁ равны.

115. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB₁ и CC₁. Докажите, что углы BB₁C₁ и BCC₁ равны.

116. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB₁ и CC₁. Докажите, что углы CC₁B₁ и CBV₁ равны.

117. Биссектрисы углов A и D параллелограмма ABCD пересекаются в точке К, лежащий на стороне BC. Докажите, что К – середина BC.



Решение:

$\triangle ABK$ и $\triangle KDC$ – р/б оба, значит $AB = BK$, $KC = CD$, значит $AB = BK = KC = CD$, т.о. $BK = KC$, значит К – середина BC.

118. Биссектрисы углов C и D параллелограмма ABCD пересекаются в точке L, лежащий на стороне AB. Докажите, что L – середина AB.

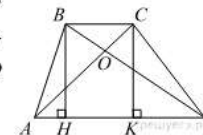
119. Биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке N, лежащий на стороне CD. Докажите, что N – середина CD.

120. Биссектрисы углов C и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке M, лежащий на стороне AD. Докажите, что M – середина AD.

121. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Решение.

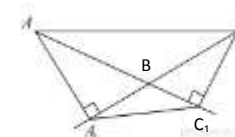
Проведём высоты BH и CK, они равны. Площадь треугольника ABD равна $\frac{1}{2}AD \cdot BH$. Площадь треугольника CAD равна $\frac{1}{2}AD \cdot CK$. Поскольку высоты BH и CK равны, равны и площади треугольников ABD и CAD. Покажем, что площади треугольников AOB и COD равны:



$$S_{AOB} = S_{ABD} - S_{AOD} = S_{CAD} - S_{AOD} = S_{COD}.$$

122. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке P. Докажите, что площади треугольников APB и CPD равны.

123. В треугольнике ABC с тупым углом ABC проведены высоты AA₁ и CC₁. Докажите, что треугольники A₁BC₁ и ACB подобны.



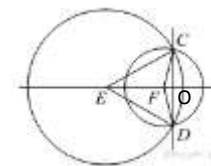
Решение:

$\triangle ABA_1 \sim \triangle C_1BC$ (по двум углам), тогда $\frac{AB}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$, получим другую, равную первой пропорцию $AB = \frac{BC \cdot BA_1}{BC_1}$ или $\frac{AB}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$, а также углы O равны, значит $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ACB$ (по второму признаку), ч.т.д.

124. В треугольнике ABC с тупым углом ABC проведены высоты AA₁ и CC₁. Докажите, что треугольники A₁BC₁ и ABC подобны.

125. В треугольнике ABC с тупым углом BAC проведены высоты BB₁ и CC₁. Докажите, что треугольники AB₁C₁ и ABC подобны.

126. Окружности с центрами в точках E и F пересекаются в точках C и D, причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.



Решение:

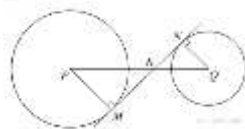
$\triangle ECF = \triangle EFD$ (по 3 признаку), значит $\angle EFC = \angle EFD$, тогда $\angle OFC = \angle OFD$, получаем, что FO – б-са р/б $\triangle CFD$, тогда FO – высота, получаем, что $CD \perp EF$, ч.т.д.

127. Окружности с центрами в точках I и J пересекаются в точках A и B, причём точки I и J лежат по одну сторону от прямой AB. Докажите,

что прямые AB и IJ перпендикулярны.

128. Окружности с центрами в точках P и Q пересекаются в точках K и L, причём точки P и Q лежат по одну сторону от прямой KL. Докажите, что прямые PQ и KL перпендикулярны.
129. Окружности с центрами в точках M и N пересекаются в точках S и T, причём точки M и N лежат по одну сторону от прямой ST. Докажите, что прямые MN и ST перпендикулярны.

130. Окружности с центрами в точках P и Q не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $a : b$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $a : b$.

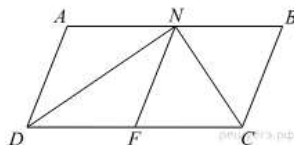


Решение:

$\triangle PMK \sim \triangle QNQ$ (по 2^м углам), тогда $\frac{PK}{KQ} = \frac{PM}{NQ}$, но $\frac{PK}{KQ} = \frac{a}{b}$, тогда $\frac{PM}{NQ} = \frac{a}{b}$, диаметры относятся, как $\frac{2PM}{2NQ} = \frac{PM}{NQ} = \frac{a}{b}$

131. Окружности с центрами в точках I и J не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m : n$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $m : n$.

132. Сторона AB параллелограмма ABCD вдвое больше стороны BC. Точка N - середина стороны AB. Докажите, что CN - биссектриса угла BCD.



Решение:

$\triangle NBC \sim \triangle NCB$ ($NB = 0,5AB = BC$), значит по св-ву р/б треугол $\angle BCN = \angle BNC = \angle NCF$ (как н/л при $NB \parallel DC$ (по опр п-ма) и сек NC).

Получили, что $\angle BCN = \angle NCF$, тогда по опр. б-сы NC - биссектриса $\angle BCD$

133. Сторона BC параллелограмма ABCD вдвое больше стороны AB. Точка K - середина стороны BC. Докажите, что AK - биссектриса угла BAD.
134. Сторона AB параллелограмма ABCD вдвое больше стороны AD. Точка L - середина стороны AB. Докажите, что DL - биссектриса угла ADC.
135. Сторона AD параллелограмма ABCD вдвое больше стороны CD.

Точка M - середина стороны AD. Докажите, что CM - биссектриса угла BCD.

136. Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны соответственно 28 и 35 ABCD вдвое больше стороны AD. Точка N - середина стороны CD. Докажите, что AN - биссектриса угла BAD.
137. Сторона BC параллелограмма ABCD вдвое больше стороны CD. Точка K - середина стороны BC. Докажите, что DK - биссектриса угла ADC.
138. Сторона AD параллелограмма ABCD вдвое больше стороны AB. Точка M - середина стороны AD. Докажите, что BM - биссектриса угла ABC.
139. Сторона CD параллелограмма ABCD вдвое больше стороны BC. Точка N - середина стороны CD. Докажите, что BN - биссектриса угла ABC.

140. В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 14$, $BC = 12$.

Решение: (одна из самых сложных задач)

Сначала строим окружность, потом саму трапецию, учитывая, что $AB \perp AD$.

Д.п. $EP \perp CD$ (EP - расстояние от точки E до прямой CD), $AB \cap CD = T$

Дальше нам поможет теорема о сек и касательной, т.е. $TE^2 = TC \cdot TD$

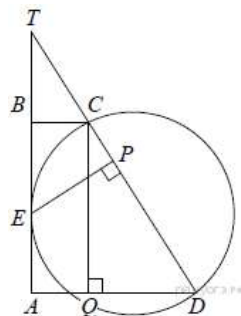
Сочетание $TC \cdot TD$ можно вывести из подобия $\triangle BTC \sim \triangle ATD$ (по двум углам), тогда $\frac{TC}{TD} = \frac{BC}{AD} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$. Пусть одна часть равна $x (x > 0)$, тогда $TC = 6x$, а $TD = 7x$.

$TE^2 = TC \cdot TD = 42x^2$. $TE = x\sqrt{42}$

Теперь нам нужен треугольник, у которого есть сторона EP, которую нам и надо найти, это $\triangle TEP \sim \triangle ATD$ (по 2 углам), получаем пропорцию

$\frac{ET}{TD} = \frac{EP}{AD} \cdot \frac{x\sqrt{42}}{7x} = \frac{EP}{14}$, $EP = 2\sqrt{42}$

Ответ: $2\sqrt{42}$



141. В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 14$, $BC = 7$.

Ответ: $7\sqrt{2}$

142. В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в

точке Е. Найдите расстояние от точки Е до прямой CD, если $AD = 8$, $BC = 7$.

Ответ: $\sqrt{56}$

143. В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке Е. Найдите расстояние от точки Е до прямой CD, если $AD = 8$, $BC = 4$.

Ответ: $4\sqrt{2}$

144. В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке Е. Найдите расстояние от точки Е до прямой CD, если $AD = 4$, $BC = 2$.

Ответ: $2\sqrt{2}$

145. В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке Е. Найдите расстояние от точки Е до прямой CD, если $AD = 12$, $BC = 9$.

Ответ: $6\sqrt{3}$

146. В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке Е. Найдите расстояние от точки Е до прямой CD, если $AD = 20$, $BC = 15$.

Ответ: $10\sqrt{3}$

147. В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке Е. Найдите расстояние от точки Е до прямой CD, если $AD = 12$, $BC = 10$.

Ответ: $6\sqrt{30}$

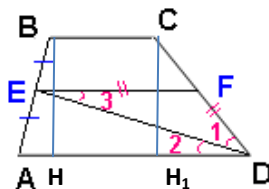
148. В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке Е. Найдите расстояние от точки Е до прямой CD, если $AD = 6$, $BC = 5$.

Ответ: $\sqrt{30}$

149. В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке Е. Найдите расстояние от точки Е до прямой CD, если $AD = 20$, $BC = 10$.

Ответ: $10\sqrt{2}$

150. Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны соответственно 40 и 41, а основание BC равно 16. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.



Решение:

т.к. появилась середина стороны AB, значит надо достроить ср. линию трапеции. Д.п. EF – ср линия. $BH \perp AD$, $BH_1 \perp AD$

$S_{ABCD} = (BC+AD)/2 \cdot h$, по св-ву ср. линии $EF = (BC+AD)/2$, тогда $S_{ABCD} = EF \cdot h$
 $\Delta EFD - p/6$, $EF = FD = CD/2 = 20,5$. Осталось найти h. Найдем $AD = 2EF - CB = 41 - 16 = 25$

$BCH_1H - n-m$, $BC = H_1H = 16$. Пусть $AH = x$, тогда $H_1D = 25 - 16 - x = 9 - x$.

т.к. $BH = CH_1 = h$, по Пифагору $BH^2 = CH_1^2 = AB^2 - AH^2 = CD^2 - DH_1^2$

$1600 - x^2 = 1681 - (9 - x)^2$, $x = 0$ – это означает, что $BH = AB = 40 = h$,

$S_{ABCD} = 20,5 \cdot 40 = 820$

Ответ: 820

151. Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны соответственно 24 и 25, а основание BC равно 9. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 300

152. Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны соответственно 10 и 26, а основание BC равно 1. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 130

153. Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны соответственно 20 и 29, а основание BC равно 4. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 290

154. Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны соответственно 10 и 6, а основание BC равно 1. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 30

155. Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны соответственно 12 и 13, а основание BC равно 4. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 78

156. Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны соответственно 16 и 34, а основание BC равно 2. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 272

157. Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны соответственно 4 и 5, а основание BC равно 1. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 10

158. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 28 и 35, а основание BC равно 7. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB . Найдите площадь трапеции.

Ответ: 490

159. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 и 10, а основание BC равно 2. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB . Найдите площадь трапеции.

Ответ: 40

160. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 12. Найдите стороны треугольника ABC .

Решение: (сложная задача)

$BE \cap AD = P$, $\triangle ABD$ – $p/6$ (т.к. BP – б-са и высота), значит $AP = PD = 6$, $AB = BD = 0,5BC$

BE – б-са, тогда по теореме о б-се $\frac{AE}{AB} = \frac{EC}{BC}$

$BC = 2AB$, тогда $\frac{AE}{AB} = \frac{EC}{2AB}$, $EC = 2AE$ или $AC = 3AE$. Если было бы понятно в каком отношении P делит BE , тогда можно было бы найти AB и AE , а уже дальше и стороны $\triangle ABC$. А отношение «рождается» из подобия, но пока подобия нет.

Д.п. $BK \parallel AC$, $AD \cap BK = K$,

$\triangle ADC = \triangle BDK$ (по 2^м признаку), значит $BK = AC = 3AE$

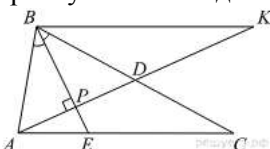
Но $\triangle APE \sim \triangle BPK$ (по 2 углам), значит $\frac{BP}{PE} = \frac{AE}{BK} = \frac{AE}{3AE} = \frac{1}{3}$, получаем, что

$PE = 3BP$, т.е. $PE = \frac{1}{4}BE = 3$, $BP = 9$

Рассмотрим $\triangle ABP$: $\angle P = 90^\circ$, по Пифагору $AB = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117} = \sqrt{9 \cdot 13} = 3\sqrt{13}$, $BC = 6\sqrt{13}$

Рассмотрим $\triangle AEP$: $\angle P = 90^\circ$, по Пифагору $AE = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, $AC = 9\sqrt{5}$

Ответ: $3\sqrt{13}$, $6\sqrt{13}$, $9\sqrt{5}$



161. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 44. Найдите стороны треугольника ABC .

Ответ: $11\sqrt{13}$, $22\sqrt{13}$, $33\sqrt{5}$,

162. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 16. Найдите стороны треугольника ABC .

Ответ: $4\sqrt{13}$, $8\sqrt{13}$, $12\sqrt{5}$

163. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 20. Найдите

стороны треугольника ABC .

Ответ: $5\sqrt{13}$, $10\sqrt{13}$, $15\sqrt{5}$

164. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 8. Найдите стороны треугольника ABC .

Ответ: $2\sqrt{13}$, $4\sqrt{13}$, $6\sqrt{5}$

165. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 24. Найдите стороны треугольника ABC .

Ответ: $6\sqrt{13}$, $12\sqrt{13}$, $18\sqrt{5}$

166. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 28. Найдите стороны треугольника ABC .

Ответ: $7\sqrt{13}$, $14\sqrt{13}$, $21\sqrt{5}$

167. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 32. Найдите стороны треугольника ABC .

Ответ: $8\sqrt{13}$, $16\sqrt{13}$, $24\sqrt{5}$

168. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 36. Найдите стороны треугольника ABC .

Ответ: $9\sqrt{13}$, $18\sqrt{13}$, $27\sqrt{5}$

169. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 40. Найдите стороны треугольника ABC .

Ответ: $10\sqrt{13}$, $20\sqrt{13}$, $30\sqrt{5}$

170. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, AD = 49, MD = 42, H - точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Здесь используется теорема о двух секущих: Если из точки, лежащей вне окружности, проведены две секущие, то произведение одной секущей на её внешнюю часть равно произведению другой секущей на её внешнюю часть. Есть теорема, что диаметр, перпендикулярный хорде делит хорду пополам.

Решение:

Д.п. $BK \perp AC$, т.к. BK – диаметр, а $\angle BKC = 90^\circ$, то $\angle BKC$ впис. угол, значит $K \in \text{окр.}$. Продолжим высоту AD по пересечению с окружностью в точке Q.

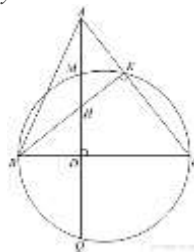
$\triangle AHK \sim \triangle ADC$ (по 2 углам), тогда $\frac{AK}{AD} = \frac{AH}{AC}$, $AH = \frac{AC \cdot AK}{AD}$,

По теореме о 2^х секущих $AK \cdot AC = AM \cdot AQ$,

$AM = AD - MD = 49 - 42 = 7$, по теореме, что диаметр, перпендикулярный хорде делит хорду пополам, значит $MD = DQ = 42$, $AQ = AM + 2MD = 7 + 2 \cdot 42 = 91$.

Тогда $AK \cdot AC = AM \cdot AQ = 7 \cdot 91 = 637$, $AH = \frac{AC \cdot AK}{AD} = \frac{637}{49} = 13$

Ответ: 13



171. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, AD = 9, MD = 6, H - точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 5

172. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, AD = 9, MD = 3, H - точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 8

173. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, AD = 90, MD = 69, H - точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 37.1

174. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, AD = 15, MD = 12, H - точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 5,5

175. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, AD = 80, MD = 64, H - точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 28,8

176. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, AD = 16, MD = 4, H - точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 15

177. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, AD = 72, MD = 18, H - точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 67,5

178. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, AD = 81, MD = 9, H - точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 80

179. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, AD = 45, MD = 15, H - точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 40

180. Точки М и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки М и N и

касающейся луча АВ, если $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Решение: (сложная задача)

Теоремы: косинусов, касательной и секущей,

$$R = \frac{\text{сторона треугольника}}{2 \sin \alpha}$$

$$AM=4, AN=15$$

Есть $\triangle ENM$ впис в окружность, значит радиус окр будем искать по формуле $R = \frac{\text{сторона треугольника}}{2 \sin \alpha}$

По теореме о кас и сек $AE^2 = AN \cdot AM = 60$, $AE = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$.

Рассмотрим $\triangle AEM$: по теореме кос: $EM^2 = AE^2 + AM^2 - 2AE \cdot AM \cdot \cos \angle EAM$

$$EM^2 = 60 + 16 - 16 \cdot 2\sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 76 - 60 = 16, EM = 4$$

Аналогично $\triangle AEN$: по теореме кос: $EN^2 = AE^2 + AN^2 - 2AE \cdot AN \cdot \cos \angle EAN$

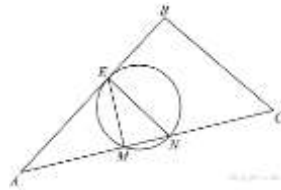
$$EN^2 = 60 + 225 - 2 \cdot 2\sqrt{15} \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 285 - 225 = 60, EN = 2\sqrt{15} = AE, \text{ по опр } \triangle AEN - \text{p/b,}$$

по св-ву p/b треугольн $\angle A = \angle N$, значит $\cos \angle EAN = \cos \angle ENA = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Рассмотрим $\triangle ENM$: $EM = 4$, $\cos \angle ENA = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Для формулы $R = \frac{\text{сторона треугольника}}{2 \sin \alpha}$

$$\text{надо найти } \sin \angle ENM = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}, R = \frac{4}{2 \cdot 0.25} = 8$$

Ответ: 8



181. Точки М и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 12 и 21 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки М и N и касающейся луча АВ, если

$$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Ответ:

182. Точки М и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 8 и 30 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки М и N и касающейся луча АВ, если

$$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Ответ:

183. Точки М и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 18 и 22 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки М и N и касающейся луча АВ, если

$$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{11}}{6}.$$

Ответ:

184. Точки М и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 18 и 40 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки М и N и касающейся луча АВ, если $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ответ:

185. Точки М и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 9 и 35 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки М и N и касающейся луча АВ, если $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{35}}{6}$.

Ответ:

186. Точки М и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 12 и 45 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки М и N и касающейся луча АВ, если $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Ответ:

187. Точки М и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 9 и 32 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки М и N и касающейся луча АВ, если $\cos \angle BAC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ответ:

188. Точки М и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 24 и 42 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки М и N и касающейся луча АВ, если $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Ответ:

189. Точки М и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 36 и 44 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки М и N и касающейся луча АВ, если $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

Ответ:

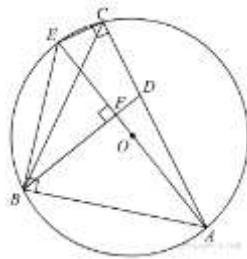
190. Точки М и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 16 и 39 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки М и N и касающейся луча АВ, если $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$.

Ответ:

191. Точки М и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 9 и 11 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки М и N и касающейся луча АВ, если $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

Ответ:

192. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 84$, $AC = 98$, O точка центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .



Решение:

$CD = AC - DA$, значит надо найти DA

Д.п. AE – диаметр, EC

Тогда $\angle ABE = \angle ECA = 90^\circ$, т.к. оба впис, опир. на диаметр

$$\triangle BAE \sim \triangle ABF \text{ (по 2 углам)} \quad \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF}, \quad AB^2 = AE \cdot AF$$

$$\text{Аналогично } \triangle CAE \sim \triangle ADF \text{ (по 2 углам)} \quad \frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AF}, \quad AC^2 = AE \cdot AF$$

$$AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{84^2}{98} = 72, \quad CD = AC - DA = 98 - 72 = 26$$

Ответ: 26

193. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 40$, $AC = 64$, O точка центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Ответ: 39

194. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 30$, $AC = 100$, O точка центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Ответ: 91

195. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 10$, $AC = 72$, O точка центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Ответ: 70,6

196. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 36$, $AC = 54$, O точка центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Ответ: 30

197. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 60$, $AC = 80$, O точка центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Ответ: 35

198. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 28$, $AC = 56$, O точка центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Ответ: 42

199. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 15$, $AC = 25$, O точка центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Ответ: 16

200. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 14$, $AC = 98$, O точка центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Ответ: 96

201. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 18$, $AC = 36$, O точка центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD , перпендикулярная прямой AO , пересекает сторону AC в точке D . Найдите CD .

Ответ: 27

202. Окружности радиусов 25 и 100 касаются внешним образом. Точки А и В лежат на первой окружности, точки С и D - на второй. При этом АС и BD общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми АВ и CD.

Решение:

*О и Р центры окружностей
расстояние между прямыми АВ и CD
=FG = FO+OG*

Д.п. $OE \perp CP$, тогда:

$OA \perp AC$ (по св-ву кас АС, АО-радиус)

$CE \perp AC$ (по св-ву кас АС, СР-радиус)

по опр п-ма АОСЕ – п-м, значит

$AO = CE = 25$, тогда $EP = CP - CE = 75$

Рассмотрим $\triangle OPE$: $\angle E = 90^\circ$, $PE = 75$, $OP = \text{сумма радиусов} = 125$

$\cos P = 75/125 = 3/5$

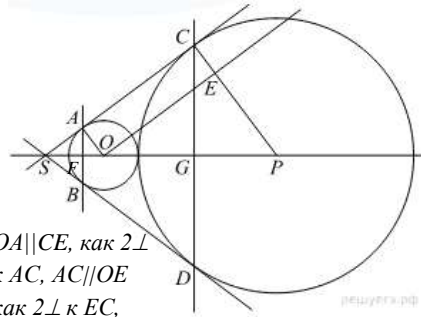
Рассмотрим $\triangle OFA$: $\angle F = 90^\circ$, $OA = 25$, $\angle AOF = \angle CPF$ как н/л при $CP \parallel AF$ и сек FP

$\cos F = \cos P = 3/5$, тогда можем найти $FO = AO \cdot \cos F = 15$

Рассмотрим $\triangle GCP$: $\angle G = 90^\circ$, $CH = 100$, $\cos P = 3/5$, $GP = 60$

$FG = FO + OG = 15 + (PO - GP) = 15 + 125 - 60 = 80$

Ответ: 80



*$OA \parallel CE$, как $2 \perp$
к АС, $AC \parallel OE$
как $2 \perp$ к ЕС,*

203. Окружности радиусов 45 и 55 касаются внешним образом. Точки А и В лежат на первой окружности, точки С и D - на второй. При этом АС и BD общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми АВ и CD.

Ответ: 80

204. Окружности радиусов 42 и 84 касаются внешним образом. Точки А и В лежат на первой окружности, точки С и D - на второй. При этом АС и BD общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми АВ и CD.

Ответ: 72

205. Окружности радиусов 4 и 60 касаются внешним образом. Точки А и В лежат на первой окружности, точки С и D - на второй. При этом АС и BD общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми АВ и CD.

Ответ: 15

206. Окружности радиусов 45 и 90 касаются внешним образом. Точки А и В лежат на первой окружности, точки С и D - на второй. При этом АС и BD общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми АВ и CD.

Ответ: 120

207. Окружности радиусов 36 и 45 касаются внешним образом. Точки А и В лежат на первой окружности, точки С и D - на второй. При этом АС и BD общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми АВ и CD.

Ответ: 80

208. Окружности радиусов 33 и 99 касаются внешним образом. Точки А и В лежат на первой окружности, точки С и D - на второй. При этом АС и BD общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми АВ и CD.

Ответ: 99

209. Окружности радиусов 12 и 20 касаются внешним образом. Точки А и В лежат на первой окружности, точки С и D - на второй. При этом АС и BD общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми АВ и CD.

Ответ: 30

210. Окружности радиусов 44 и 77 касаются внешним образом. Точки А и В лежат на первой окружности, точки С и D - на второй. При этом АС и BD общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми АВ и CD.

Ответ: 112

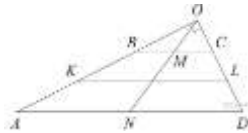
211. Окружности радиусов 22 и 99 касаются внешним образом. Точки А и В лежат на первой окружности, точки С и D - на второй. При этом АС и BD общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми АВ и CD.

Ответ: 72

230. Углы при одном из оснований трапеции равны 47° и 43° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 16 и 14. Найдите основания трапеции. $KL=16$, $MN=14$.

Решение:

Углы при основании острые, значит само основание больше – это AD , кроме того, заметим, что углы в сумме дают 90° , значит, надо искать прямоугольный треугольник. Продлим AB и CD до пересечения в точке K .



Рассмотрим $\triangle AOD$: $\angle O = 180^\circ - (\angle A + \angle D) = 90^\circ$. NO – медиана, по св-ву медианы, провед. к гип. $ON = 0,5AD$, аналогично в $\triangle BOC$: $OM = 0,5BC$.

В трапеции $ABCD$ KL – ср. линия, $KL = 0,5(BC + AD) = 0,5BC + 0,5AD = OM + ON = OM + OM + MN = 2OM + 14$. $OM = 1$, тогда $BC = 2$

$ON = OM + MN = 1 + 14 = 15$, значит $AD = 30$.

Ответ: 2 и 30

231. Углы при одном из оснований трапеции равны 7° и 83° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 14 и 11. Найдите основания трапеции.

Ответ: 3 и 25

232. Углы при одном из оснований трапеции равны 80° и 10° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 20 и 17. Найдите основания трапеции.

Ответ: 3 и 37

233. Углы при одном из оснований трапеции равны 39° и 51° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 19 и 17. Найдите основания трапеции.

Ответ: 2 и 36

234. Углы при одном из оснований трапеции равны 18° и 72° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 15 и 4. Найдите основания трапеции.

Ответ: 11 и 19

235. Углы при одном из оснований трапеции равны 53° и 37° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 6 и 2. Найдите основания трапеции.

Ответ: 4 и 8

236. Углы при одном из оснований трапеции равны 50° и 40° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 15 и 13. Найдите основания трапеции.

Ответ: 2 и 28

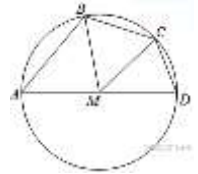
237. Углы при одном из оснований трапеции равны 39° и 51° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 19 и 3. Найдите основания трапеции.

Ответ: 16 и 22

238. Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD , если $BC = 12$, а углы B и C четырёхугольника равны соответственно 115° и 95° .

Решение:

Поскольку существует точка, равноудалённая от всех вершин четырёхугольника, четырёхугольник можно вписать в окружность. Тогда по св-ву впис. 4хуг-ка $\angle A = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$. $\angle D = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$.



Рассмотрим $\triangle ABM$ -р/б, по св-ву р/б треуго. $\angle A = \angle ABM = 85^\circ$, аналогично: $\triangle CBM$ -р/б, по св-ву р/б треуго. $\angle MBC = \angle MCB = 115^\circ - 85^\circ = 30^\circ$,

тогда по теореме синусов $\frac{BC}{\sin M} = \frac{BM}{\sin B}$, находим $BM = \frac{12 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = 12\sqrt{3}$
($\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 120^\circ) = \sin 60^\circ$)

$AD = 2BM = 24\sqrt{3}$

Ответ: $24\sqrt{3}$

239. Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD , если $BC = 10$, а углы B и C четырёхугольника равны соответственно 112° и 113° .

Решение:

Тогда по св-ву впис. 4хуг-ка $\angle A = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 113^\circ = 67^\circ$. $\angle D = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$.

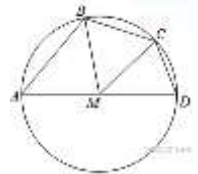
Рассмотрим $\triangle ABM$ -р/б, по св-ву р/б треуго.

$\angle A = \angle ABM = 67^\circ$, аналогично:

$\triangle CBM$ -р/б, по св-ву р/б треуго. $\angle MBC = \angle MCB = 112^\circ - 67^\circ = 45^\circ$,

тогда по теореме Пифагора находим $BM = 5\sqrt{2}$, $AD = 2BM = 10\sqrt{2}$

Ответ: $10\sqrt{2}$



240. Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD , если $BC = 9$, а углы B и C четырёхугольника равны соответственно 116° и 94° .

Решение:

Тогда по св-ву впис. 4хуг-ка $\angle A = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 94^\circ = 86^\circ$. $\angle D = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$.

Рассмотрим $\triangle ABM$ -р/б, по св-ву р/б треуго.

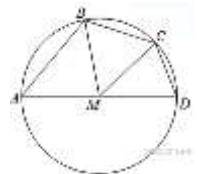
$\angle A = \angle ABM = 86^\circ$, аналогично:

$\triangle CBM$ -р/б, по св-ву р/б треуго. $\angle MBC = \angle MCB = 116^\circ - 86^\circ = 30^\circ$,

тогда по теореме синусов $\frac{BC}{\sin M} = \frac{BM}{\sin B}$, находим $BM = \frac{9 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = 3\sqrt{3}$
($\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 120^\circ) = \sin 60^\circ$)

$AD = 2BM = 6\sqrt{3}$

Ответ: $6\sqrt{3}$



241. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении 5:4, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если BC=18.

Решение:

Есть теорема: бис-са треуг. делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

Будем использовать формулу $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$, значит ищем $\sin A$
Пусть 1 часть = x , тогда $BO=5x$, $OH=4x$.

Рассмотрим $\triangle ABH$: $\angle H = 90^\circ$, по теореме о б-се $\frac{AB}{OB} = \frac{AH}{OH} = \frac{AB}{5x} = \frac{AH}{4x}$, (что ещё связывает угол и стороны? – \sin возьмёт нам BH , а \cos AH , значит, нам надо \cos) $\cos A = \frac{AH}{AB}$, из пропорции $\frac{AB}{5x} = \frac{AH}{4x}$ выразив AH/AB получаем (x

сократиться) $\cos A = \frac{AH}{AB} = \frac{4}{5}$, $\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$, $R = \frac{18 \cdot 5}{6} = 15$

Ответ: 15.

242. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении 5:3, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если BC=16.

Ответ: 10

243. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении 41:40, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если BC=18.

Ответ: 15.

244. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении 17:15, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если BC=16.

Ответ: 17

245. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении 5:4, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если BC=6.

Ответ: 5.

246. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении 13:12, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если BC=20.

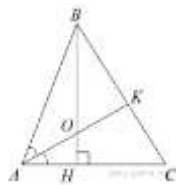
Ответ: 26.

247. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении 25:24, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если BC=14.

Ответ: 25.

248. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении 13:12, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если BC=10.

Ответ: 13.



249. В трапеции ABCD основания AD и BC равны соответственно 49 и 21, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если AB=20.

Решение: Пусть O – центр окружности

Д.п. продлим стороны AB и DC, получим точку пересечения E, $KO \perp AB$, $OF \perp EC$, тогда OF – искомый радиус

В $\triangle AED$: $\angle E = 90^\circ$, т.к. по усл. сумма углов при основании AD равна 90° .

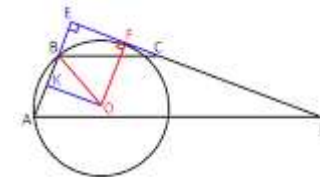
$\triangle AED \sim \triangle BEC$ (по 2м углам), тогда $\frac{BC}{AD} = \frac{BE}{AE} = \frac{21}{49} = \frac{BE}{20+BE}$, $BE = 15$

Рассмотрим $\triangle ABO$ – р/б ($OB=OA$ – радиусу), по св-ву р/б треуг. OK – высота = медиана, значит $BK=AK=0,5AB=10$

OF – сторона 4хугольника KEFO, но он п-м (по опр) т.к.:

($OF \parallel KE$ как 2 $\perp EC$, $FE \parallel OK$ как 2 $\perp EA$), тогда $KE=OF=KB+BE=10+15=25$

Ответ: 25



250. В трапеции ABCD основания AD и BC равны соответственно 18 и 6, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если AB=10.

Ответ: 10

251. В трапеции ABCD основания AD и BC равны соответственно 33 и 11, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если AB=20.

Ответ: 20

252. В трапеции ABCD основания AD и BC равны соответственно 32 и 24, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если AB=7.

Ответ: 24,5

253. В трапеции ABCD основания AD и BC равны соответственно 34 и 14, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если AB=12.

Ответ: 14,4

254. В трапеции ABCD основания AD и BC равны соответственно 48 и 24, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если AB=13.

Ответ: 19,5

255. В трапеции ABCD основания AD и BC равны соответственно 36 и 12, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если $AB=13$.

Ответ: 13

256. В трапеции ABCD основания AD и BC равны соответственно 32 и 4, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если $AB=14$.

Ответ: 9

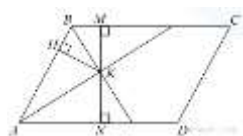
257. В трапеции ABCD основания AD и BC равны соответственно 32 и 2, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если $AB=24$.

Ответ: 13,6

258. В трапеции ABCD основания AD и BC равны соответственно 28 и 4, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если $AB=15$.

Ответ: 10

259. Биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC=19$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 7.



Решение:

Д.п. через точку K проведём высоту MN, $KN \perp AB$ (KN - расстояние от точки K до стороны AB), $KN = 7$

Рассмотрим $\triangle BKN$ и $\triangle BMK$, они равны по гипотенузе и острому углу, тогда по опр. р.ф. $KN=KM=7$

Аналогично $\triangle ANK = \triangle AKN$, $KN=HK=7$

$S_{ABCD} = BC \cdot MN = 14 \cdot 19 = 266$

Ответ: 266

260. Биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC=11$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 3.

Ответ: 66

261. Биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC=12$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 9.

Ответ: 216

262. Биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC=19$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 10.

Ответ: 380

263. Биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC=17$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 10.

Ответ: 340

264. Биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC=18$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 1.

Ответ: 36

265. Биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC=7$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 4.

Ответ: 56

266. Биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC=2$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 8.

Ответ: 32

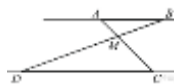
267. Биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC=6$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 6.

Ответ: 72

268. Биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC=2$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 1.

Ответ: 4

269. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB=14, DC=42, AC=52



Решение:

$\triangle ABM \sim \triangle DMC$ (по 2м углам), тогда $\frac{AB}{DC} = \frac{AM}{MC} = \frac{BM}{DM}$, $MC=39$

Ответ: 39

270. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB=13, DC=65, AC=42.

Ответ: 35

271. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB=12, DC=48, AC=35.

Ответ: 39

272. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB=11, DC=22, AC=28.

273. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB=10, DC=25, AC=56.

Ответ: 40

274. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB=16, DC=24, AC=25.

Ответ: 15

275. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB=15, DC=30, AC=39.

Ответ: 26

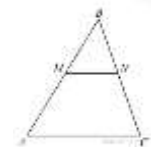
276. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB=18, DC=54, AC=48.

Ответ: 36

277. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB=14, DC=56, AC=40.

Ответ: 32

278. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если MN=17, AC=51, NC=32.



Решение:

$\triangle DNM \sim \triangle ABC$ (по 2м углам), тогда $\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC} = \frac{17}{51} = \frac{BN}{BN+NC}$, $BN = 16$

Ответ: 16

279. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если MN=11, AC=44, NC=18.

Ответ: 6

280. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если MN=13, AC=65, NC=28.

Ответ: 7

281. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если MN=14, AC=21, NC=10.

Ответ: 20

282. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если MN=22, AC=55, NC=36.

Ответ: 24

283. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если MN=15, AC=25, NC=22.

Ответ: 33

284. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если MN=16, AC=20, NC=15.

Ответ: 60

285. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если MN=12, AC=42, NC=25.

Ответ: 10

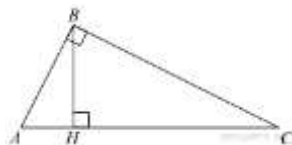
286. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если MN=18, AC=42, NC=40.

Ответ: 30

287. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если MN=20, AC=35, NC=39.

Ответ: 52

288. Точка Н является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла В треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если AH=6, AC=24



Решение:

Рассмотрим $\triangle ABC \sim \triangle ABH$ (по 2м углам), тогда $\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}$, $AB = \sqrt{AH \cdot AC} = 12$

Ответ: 12

289. Точка Н является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла В треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если AH=7, AC=28.

Ответ: 14

290. Точка Н является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла В треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если AH=8, AC=32.

Ответ: 16

291. Точка Н является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла В треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если AH=5, AC=45.

Ответ: 15

292. Точка Н является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла В треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если AH=10, AC=40.

Ответ: 20

293. Точка Н является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла В треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если AH=9, AC=36.

Ответ: 18

294. Точка Н является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла В треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если AH=5, AC=20.

Ответ: 10

295. Точка Н является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла В треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если AH=3, AC=27.

Ответ: 9

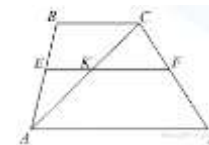
296. Точка Н является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла В треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если AH=4, AC=16.

Ответ: 8

297. Точка Н является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла В треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если AH=3, AC=12.

Ответ: 6

298. Прямая, параллельная основаниям трапеции ABCD, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках Е и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если AD=42, BC=14, CF:DF=4:3.



Решение:

Рассмотрим $\triangle CEF \sim \triangle CAD$ (по 2м углам),

тогда $\frac{CF}{CD} = \frac{CE}{CA}$, получаем $\frac{CF}{AD} = \frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CF+DF} = \frac{4}{7}$, $CF=24$, аналогично

$\triangle ABC \sim \triangle EAF$ (по 2м углам), тогда $\frac{CE}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{3}{7}$, $EF=6$

Ответ: 30

299. Прямая, параллельная основаниям трапеции ABCD, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках Е и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если AD=25, BC=15, CF:DF=3:2.

Ответ: 21

300. Прямая, параллельная основаниям трапеции ABCD, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках Е и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если AD=44, BC=24, CF:DF=3:1.

Ответ: 39

301. Прямая, параллельная основаниям трапеции ABCD, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках Е и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если AD=33, BC=18, CF:DF=2:1.

Ответ: 28

302. Прямая, параллельная основаниям трапеции ABCD, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках Е и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если AD=45, BC=20, CF:DF=4:1.

Ответ: 40

303. Прямая, параллельная основаниям трапеции ABCD, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках Е и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если AD=36, BC=18, CF:DF=7:2.

Ответ: 32

304. Прямая, параллельная основаниям трапеции ABCD, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках Е и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если AD=35, BC=21, CF:DF=5:2.

Ответ: 31

305. Прямая, параллельная основаниям трапеции ABCD, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках Е и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если AD=48, BC=16, CF:DF=5:3.

Ответ: 36

306. Прямая, параллельная основаниям трапеции ABCD, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках Е и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если AD=45, BC=27, CF:DF=5:4.

Ответ: 37

307. Прямая, параллельная основаниям трапеции ABCD, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках Е и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если AD=50, BC=30, CF:DF=7:3.

Ответ: 44

308. Найдите боковую сторону АВ трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 60° и 135° , а $CD=36$.

Решение:

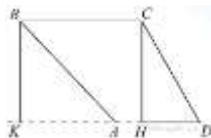
Д.п. $BK \perp AD$, $CH \perp AD$

Рассмотрим $\triangle CHD$: $\angle H=90^\circ$, $\angle HCD=135^\circ - 90^\circ=45^\circ$, тогда и $\angle D=45^\circ$, получили, что $\triangle CHD$ – р/б. По Пифагору $CH=CD=$

Рассмотрим $\triangle BAK$: $\angle K=90^\circ$, $\angle KBA=90^\circ - 60^\circ=30^\circ$, $CH=BK=18\sqrt{2}$

$AB=BK/\cos \angle KBA=18\sqrt{2} : (\sqrt{3}/2)=12\sqrt{6}$

Ответ: $12\sqrt{6}$



309. Найдите боковую сторону АВ трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 60° и 135° , а $CD=24$.

Ответ: $8\sqrt{6}$

310. Найдите боковую сторону АВ трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 30° и 135° , а $CD=29$.

Ответ: $12\sqrt{6}$

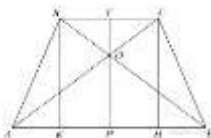
311. Найдите боковую сторону АВ трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 30° и 135° , а $CD=17$.

Ответ: $\frac{29\sqrt{6}}{3}$

312. Найдите боковую сторону АВ трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 60° и 150° , а $CD=33$.

Ответ: $11\sqrt{6}$

313. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 120, а площадь равна 540, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.



Решение:

Д.п. $OT \perp BC$, продолжим TO до AD , получим $TP \perp AD$, $BK \perp AD$, $CH \perp AD$

По св-ву опис. $^{\text{4ху2}}$ -ка, $AB+CD=BC+AD$, т.к. $P=120$, то $BC+AD=P:2=$

$=120:2=60$
 $AB+CD=P:2=120:2=60$, по опр. р/б трап. $AB=CD=30$

$S_{ABCD}=(BC+AD)/2 \cdot TP$, значит $TP=18=BK=CH=$ высота.

Рассмотрим $\triangle ABK$: $\angle K=90^\circ$, по теореме Пифагора $AK=24$, аналогично $HD=24$

$BC \parallel KH$ по опр. трапеции } по опр п-ма $BCHK$ – п-м, по св-ву п-ма $BC=KH$,
 $BK \parallel CH$ как 2 \perp к AD } $BC+AD=60$,
находим $BC=KH=6$, $AD=54$

$\triangle BOC \sim \triangle AOD$ (по 2^м углам), $\frac{BC}{AD} = \frac{1}{9}$, значит и высота $OT = \frac{1}{10}$ от TP , $OT=1,8$

Ответ: 1,8

314. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 200, а площадь равна 1500, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

Ответ: 3

315. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 80, а площадь равна 320, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

Ответ: 3,2

316. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 220, а площадь равна 2420, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

Ответ: 8,8

317. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 40, а площадь равна 80, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

Ответ: 1,6

318. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 180, а площадь равна 1620, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

Ответ: 7,2

319. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 100, а площадь равна 500, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

Ответ: 4

320. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 20, а площадь равна 20, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

Ответ: 0,8

321. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 160, а площадь равна 1280, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

Ответ: 6,4

322. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 200, а площадь равна 2000, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

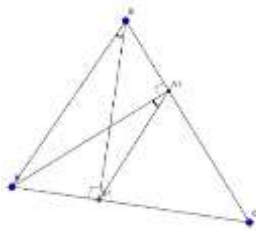
Ответ: 8

323. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.

Решение:

Д.п. A_1B_1

$\triangle ABA_1$ и $\triangle ABB_1$ прямоугольные с общей гипотенузой AB . Если построить окружность, у которой диаметр $= AB$, то точки A_1 и B_1 будут на окружности, т.к. это вершины прямых углов, опирающихся на диаметр. $\angle ABB_1 = \angle AA_1B_1$, т.к. вписанные и опираются на одну дугу AB_1 , ч.т.д.



324. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что углы BB_1A_1 и BAA_1 равны.
325. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Докажите, что углы AA_1C_1 и ACC_1 равны.
326. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Докажите, что углы CC_1A_1 и CAA_1 равны.
327. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 . Докажите, что углы BB_1C_1 и BCC_1 равны.
328. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 . Докажите, что углы CC_1B_1 и CBV_1 равны.