

3. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Квадратное уравнение общего вида

$$ax^2 + bx + c = 0, x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

с чётным 2-м коэффициентом

$$ax^2 + 2kx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

приведённое

$$x^2 + px + q = 0, x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

теорема Виета для приведённого уравнения

$$x^2 + px + q = 0, x_1 \cdot x_2 = q, x_1 + x_2 = -p$$

разложение трёхчлена на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Формулы сокращённого умножения

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Свойства степеней

$$1. a^0 = 1 \quad a \neq 0$$

$$2. 0^{-x} \text{ не имеет смысла}$$

$$3. a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$4. a^x : a^y = a^{x-y}$$

$$5. (a^x)^y = a^{xy}$$

$$6. (ab)^x = a^x \cdot b^x$$

$$7. \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$8. a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad a \neq 0$$

Свойства корней

$$1. \sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}, n - \text{нечётно.}$$

$$2. \sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, n - \text{чётно} \\ x, n - \text{нечётно.} \end{cases}$$

$$3. \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; a \geq 0; b \geq 0; n \in \mathbb{N}.$$

$$4. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; a \geq 0; b > 0; n \in \mathbb{N}.$$

$$5. \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}; a \geq 0; n \in \mathbb{N}; k > 0; k \in \mathbb{Z}.$$

$$6. \sqrt[n]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[kn]{a}}; a \geq 0; n \in \mathbb{N}; k > 0; k \in \mathbb{Z}.$$

$$7. \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k; a \geq 0; n \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{Z} \text{ (если } k \leq 0, \text{ то } a \neq 0).$$

Формулы логарифмов

$$1. \log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x \quad x > 0; a > 0; a \neq 1.$$

$$2. a^{\log_a x} = x.$$

$$3. \log_a x_1 \cdot x_2 = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|.$$

$$4. \log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|.$$

$$5. \log_a x^n = n \cdot \log_a |x|.$$

$$6. \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

$$7. \log_b x = \frac{1}{\log_x b}.$$

$$8. \log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

$$9. \log_a x_1 \cdot \log_b x_2 = \log_a x_2 \cdot \log_b x_1.$$

$$10. \log_{a^n} x = \frac{1}{n} \cdot \log_a x.$$

$$11. x^{\log_a y} = y^{\log_a x}.$$

$$12. \frac{\log_a x_1}{\log_a x_2} = \frac{\log_b x_1}{\log_b x_2}$$

$$13. a^{\sqrt{\log_b b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$$

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Формулы сложения

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cdot (\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

Соотношения между $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Значения функций характерных углов

радианы	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	∞	0	∞

Тригонометрические уравнения.

Уравнение $\cos t = a$

1. $a = 1$, то $t = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

2. $a = -1$, то $t = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

3. $a = 0$, то $t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Уравнение $\sin t = a$

6. $a = 1$, то $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

7. $a = -1$, то $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

8. $a = 0$, то $t = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

9. $|a| < 1$, то $t = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Уравнение $\operatorname{tg} a$

1. $a = 0$, то $t = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

2. $t = \arctg a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

4. $|a| < 1$, то $t = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

5. $|a| > 1$, то корней нет

10. $t = \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

11. $t = -\arcsin a + \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}$

12. $|a| > 1$, то корней нет

Уравнение $\operatorname{ctg} a$

1. $a = 0$, то $t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

2. $t = \operatorname{arccctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Производная

Определение производной $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Физический

смысл производной – скорость изменения функции f в точке x_0 .

Геометрический смысл производной – существование производной функции f в точке x_0 равносильно существованию касательной в точке x_0 , при этом угловой коэффициент равен $f'(x_0)$.

Формулы

$$\begin{aligned}
 (x^n)' &= n \cdot x^{n-1} & (\sin x)' &= \cos x & (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; x \in (-1; 1) & (e^x)' &= e^x \\
 \left(\frac{1}{x}\right)' &= -\frac{1}{x^2} & (\cos x)' &= -\sin x & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; x \in (-1; 1) & (a^x)' &= a^x \cdot \ln a \\
 (\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} & (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} & (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}; x \in \mathbb{R} & (\ln x)' &= \frac{1}{x} \\
 (k \cdot x + b)' &= k & (\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} & (\operatorname{arccctg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}; x \in \mathbb{R} & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln a} \\
 (c)' &= 0
 \end{aligned}$$

Производная сложной функции. Если функция сложная, то с начала берётся производная внешней функции, а потом умножается на производную внутренней функции.

Правила производной:

$$\begin{aligned}
 (U + E)' &= U' + E' & \left(\frac{U}{E}\right)' &= \frac{U' \cdot E - U \cdot E'}{E^2} \\
 (U \cdot E)' &= U' \cdot E + U \cdot E' & (C \cdot U)' &= C \cdot U'
 \end{aligned}$$

Уравнение касательной

Уравнение касательной – $y = k \cdot x + b$, $f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$.

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, где x_0 – абсцисса точки касания, $f(x_0)$ – ордината точки касания, $f'(x_0)$ – производная функции f в точке x_0 .

Таблица основных неопределённых интегралов:

$$\begin{aligned}
 \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1). & \int 0 dx &= C. \\
 \int \frac{dx}{x} &= \ln|x| + C. & \int \sin x dx &= -\cos x + C. \\
 \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \operatorname{tg} x + C. & \int \cos x dx &= \sin x + C. \\
 \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\operatorname{ctg} x + C. & \int \frac{dx}{x^2} &= -\frac{1}{x} + C.
 \end{aligned}$$

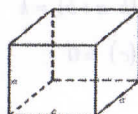
Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. (Формула Ньютона–Лейбница).

Геометрия:

Куб

$$V = a^3,$$

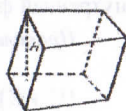
где V – объём куба;
 a – длина грани куба.



Призма

$$V = S_o h,$$

где V – объём призмы;
 S_o – площадь основания призмы;
 h – высота призмы.



Параллелепипед

$$V = S_o \cdot h,$$

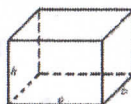
где V – объём параллелепипеда;
 S_o – площадь основания;
 h – длина высоты.



Прямоугольный параллелепипед

$$V = a \cdot b \cdot h,$$

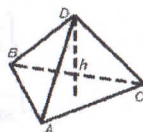
где V – объём прямоугольного параллелепипеда;
 a – длина;
 b – ширина;
 h – высота.



Пирамида

$$V = \frac{1}{3} S_o \cdot h, \quad S_n = S_b + S_o,$$

где V – объём пирамиды;
 h – длина высоты пирамиды;
 S_o – площадь основания пирамиды;
 S_n – площадь полной поверхности;
 S_b – площадь боковой поверхности.



Цилиндр

$$V = \pi r^2 h, \quad V = S_o h, \quad S_b = 2\pi r h,$$

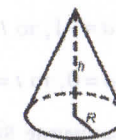
где V – объём цилиндра;
 S_o – площадь основания цилиндра;
 r – радиус цилиндра;
 h – высота цилиндра;
 S_b – площадь боковой поверхности.



Конус

$$V = \frac{1}{3} S_o h, \quad V = \frac{1}{3} \pi r^2 h, \quad S_b = \pi r l,$$

где V – объём конуса;
 S_o – площадь основания конуса;
 r – радиус основания конуса;
 h – высота конуса;
 S_b – площадь боковой поверхности;
 l – образующая.



Шар

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad S = 4\pi R^2,$$

где V – объём шара;
 R – радиус шара.

