

Статья написана в соавторстве с А. Г. Малковой

Метод интервалов

Если вы видите неравенство вроде такого:

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{(x - 7)(x + 5)} \geq 0,$$

то знайте: нужно применять *метод интервалов*. Этому методу и посвящена данная статья.

Но сначала давайте вспомним некоторые термины.

Многочлен первой степени (или *линейный многочлен*) — это выражение $ax + b$, где $a \neq 0$. Примеры линейных многочленов: $x - 7$, $2x + 3$, $-10x$.

Многочлен второй степени (или *квадратичный многочлен*) — это выражение $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Примеры квадратичных многочленов: $x^2 - 3x + 2$, $5 - 3x^2$, x^2 .

Вообще, *многочлен* — это выражение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0 \neq 0$. Число n называется *степенью* многочлена. Например, $x^3 - 1$ — это многочлен третьей степени.

Обратите внимание, что всякое число является многочленом. Степень такого многочлена равна нулю.

По аналогии с дробями — рациональными числами — отношение многочленов называется *рациональной функцией*. Метод интервалов применяется всякий раз, когда рациональная функция сравнивается с нулём:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0.$$

Здесь $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены. Неравенства такого вида называются *рациональными неравенствами*. Итак, метод интервалов — это метод решения рациональных неравенств.

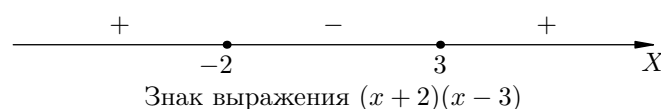
В основе метода интервалов лежит простой и очевидный факт: линейный многочлен $x - c$ меняет знак с $(-)$ на $(+)$ при переходе через точку c :



Этого факта достаточно для решения любой задачи на метод интервалов. Рассмотрим примеры.

1. $(x + 2)(x - 3) \geq 0$.

Если $x < -2$, то оба линейных множителя отрицательны, и левая часть имеет знак $(+)$. Если $-2 < x < 3$, то первый множитель становится положительным, а второй продолжает быть отрицательным, так что левая часть имеет знак $(-)$. Наконец, при $x > 3$ оба линейных множителя положительны, и левая часть имеет знак $(+)$.



Значения $x = -2$ и $x = 3$ являются *нулями* левой части (т. е. левая часть обращается в нуль при этих значениях переменной x). Они являются решениями нашего неравенства (ведь оно — нестрогое). Именно по этой причине точки -2 и 3 на рисунке *закрашены*.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$.

2. $x^2 - 5x + 4 < 0$.

Для начала разложим наш многочлен на линейные множители. Помните формулу? —

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни данного многочлена. В нашем случае $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$, так что неравенство приобретает вид:

$$(x - 1)(x - 4) < 0.$$

Делаем рисунок и расставляем знаки левой части точно так же, как и в предыдущей задаче:



Точки 1 и 4 на сей раз *выколоты*. Оно и понятно: неравенство — строгое, и нули левой части не являются его решениями.

Ответ: $(1; 4)$.

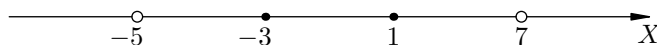
Ну а теперь решим неравенство, с которого мы начали статью.

3. $\frac{x^2 + 2x - 3}{(x - 7)(x + 5)} \geq 0$.

Прежде всего раскладываем числитель на линейные множители:

$$\frac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 7)(x + 5)} \geq 0.$$

Рисуем ось X и расставляем точки — нули числителя и знаменателя:



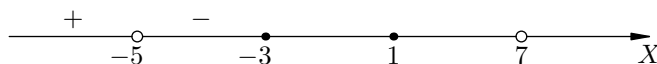
Нули знаменателя -5 и 7 выколоты, так как они не входят в ОДЗ. Нули числителя -3 и 1 закрашены, так как неравенство нестрогое.

Поставленные точки разбили ось X на 5 промежутков. Поочередно рассматриваем каждый промежуток и определяем знак левой части внутри него.

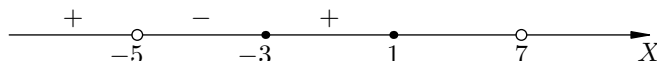
1. $x < -5$. Все четыре линейных множителя отрицательны. Левая часть имеет знак $(+)$.



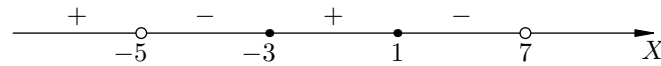
2. $-5 < x < -3$. Множитель $x + 5$ стал положительным, остальные три по-прежнему отрицательны. Левая часть поменяла знак на $(-)$.



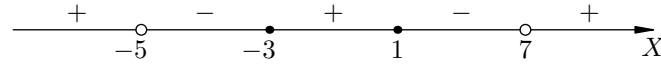
3. $-3 < x < 1$. Множитель $x + 3$ стал положительным. Множитель $x + 5$ положителен ещё с прошлого раза. Остальные два пока отрицательны. Левая часть имеет знак $(+)$.



4. $1 < x < 7$. Множитель $x - 7$ отрицателен, остальные три положительны. Левая часть имеет знак $(-)$.



5. $x > 7$. Все линейные множители положительны. Левая часть имеет знак $(+)$.



Ответ: $(-\infty; -5) \cup [-3; 1] \cup (7; +\infty)$.

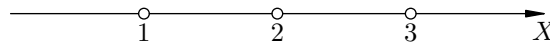
Обратите внимание: знаки на промежутках чередуются. Это обычное явление для метода интервалов. Нужно отчётливо понимать причину чередования: *в данном случае при переходе через каждую точку ровно один из линейных множителей меняет знак, а остальные сохраняют его неизменным*. Соответственно, вся левая часть неравенства меняет знак.

Учитывая это соображение, можно было бы сначала определить знак в одном из промежутков, а в остальных промежутках потом попросту чередовать знаки.

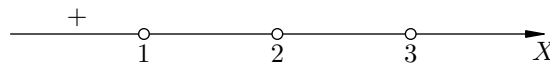
Но — повторяем! — никогда не забывайте причину этого чередования. Если всякий раз бездумно чередовать знаки, то можно попасть впросак. Рассмотрим такое неравенство.

4. $\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x-3)} > 0$.

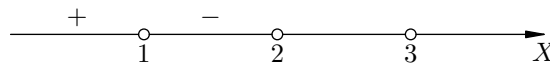
Снова расставляем точки на оси X . Точки 1 и 3 выколоты как нули знаменателя; точка 2 выколота, поскольку неравенство строгое.



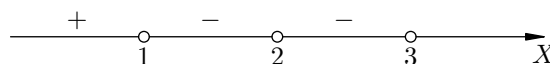
При $x < 1$ числитель положителен, оба множителя в знаменателе отрицательны. Левая часть имеет знак $(+)$:



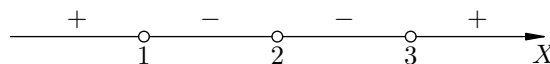
При $1 < x < 2$ числитель положителен; первый множитель в знаменателе положителен, второй множитель отрицателен. Левая часть имеет знак $(-)$:



При $2 < x < 3$ ситуация та же! Числитель положителен, первый множитель в знаменателе положителен, второй — отрицателен. Левая часть имеет знак $(-)$:



Наконец, при $x > 3$ все множители положительны, и левая часть имеет знак $(+)$:



Ответ: $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

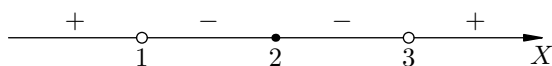
Почему нарушилось чередование знаков? Потому что при переходе через точку 2 «ответственный» за неё множитель $(x - 2)^2$ не изменил знак. Следовательно, не изменила знак и вся левая часть нашего неравенства.

Вывод: если линейный множитель $x - c$ стоит в чётной степени, то при переходе через точку $x = c$ смены знака на интервале не происходит. В случае нечётной степени знак, разумеется, меняется.

Но это не единственный подводный камень чётных степеней. Нужно особенно быть начеку, когда неравенство нестрогое.

5. $\frac{(x - 2)^2}{(x - 1)(x - 3)} \geq 0.$

Левая часть та же, что и в предыдущей задаче. Та же будет и картина знаков:



Может, и ответ будет тем же? Нет! Добавляется решение $x = 2$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup \{2\} \cup (3; +\infty)$.

До сих пор мы имели дело с произведениями линейных множителей. Однако многочлен не всегда раскладывается в такое произведение.

6. $\frac{(x + 2)(x^2 - 4x + 7)}{x - 5} < 0.$

Попытка разложить многочлен $x^2 - 4x + 7$ на линейные множители ни к чему не приводит: дискриминант отрицателен, корней нет. Но раз нет корней, значит, нет и точек перемены знака! Наш многочлен при всех x принимает значения только одного знака — положительные значения.

В этом легко также убедиться, если выделить полный квадрат:

$$x^2 - 4x + 7 = (x - 2)^2 + 3.$$

Мы видим, что значения многочлена не меньше 3. Значит, они и подавно больше нуля.

Теперь мы можем поделить обе части нашего неравенства на величину $x^2 - 4x + 7$, положительную при всех x . Придём к равносильному неравенству:

$$\frac{x + 2}{x - 5} < 0,$$

которое легко решается методом интервалов.

В общем случае не следует умножать или делить неравенство на переменную величину. Рассмотрим неравенство, совсем простое на вид.

7. $\frac{2}{x} < 1.$

Так и хочется умножить его на x , но беда в том, что x может быть как положительным, так и отрицательным. И при отрицательном x мы после умножения должны были бы изменить знак неравенства на противоположный.

Мы поступим по другому — соберём всё в одной части и приведём к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} - 1 &< 0, \\ \frac{2 - x}{x} &< 0, \\ \frac{x - 2}{x} &> 0. \end{aligned}$$

А дальше — метод интервалов!

Статья написана в соавторстве с А. Г. Малковой

Уравнения и неравенства с модулем

Данная статья посвящена приёмам решения различных уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

Если на экзамене вам попадётся уравнение или неравенство с модулем, его можно решить, вообще не зная никаких специальных методов и пользуясь только определением модуля. Правда, занять это может часа полтора драгоценного экзаменационного времени.

Поэтому мы и хотим рассказать вам о приёмах, упрощающих решение таких задач.

Прежде всего вспомним, что

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим различные типы *уравнений* с модулем. (К неравенствам перейдём позже.)

Слева модуль, справа число

Это самый простой случай. Решим уравнение $|x^2 - 5x + 4| = 4$.

Есть только два числа, модули которых равны четырём. Это 4 и -4 . Следовательно, уравнение равносильно совокупности двух простых:

$$x^2 - 5x + 4 = 4 \quad \text{или} \quad x^2 - 5x + 4 = -4.$$

Второе уравнение не имеет решений. Решения первого: $x = 0$ и $x = 5$.

Ответ: 0; 5.

Переменная как под модулем, так и вне модуля

Здесь приходится раскрывать модуль по определению... или соображать!

1. $|2 - x| = 5 - 4x$

Уравнение распадается на два случая, в зависимости от знака выражения под модулем. Другими словами, оно равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 2 - x \geq 0, \\ 2 - x = 5 - 4x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2 - x < 0, \\ x - 2 = 5 - 4x. \end{cases}$$

Решение первой системы: $x = 1$. У второй системы решений нет.

Ответ: 1.

2. $x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0$.

Первый случай: $x \geq 3$. Снимаем модуль:

$$\begin{aligned} x^2 + 4(x - 3) - 7x + 11 &= 0, \\ x^2 - 3x - 1 &= 0, \\ x_1 &= \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$

Число x_2 , будучи отрицательным, не удовлетворяет условию $x \geq 3$ и потому не является корнем исходного уравнения.

Выясним, удовлетворяет ли данному условию число x_1 . Для этого составим разность и определим её знак:

$$x_1 - 3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} - 3 = \frac{\sqrt{13} - 3}{2} = \frac{\sqrt{13} - \sqrt{9}}{2} > 0.$$

Значит, x_1 больше трёх и потому является корнем исходного уравнения.

Второй случай: $x < 3$. Снимаем модуль:

$$\begin{aligned} x^2 + 4(3 - x) - 7x + 11 &= 0, \\ x^2 - 11x + 23 &= 0, \\ x_3 &= \frac{11 + \sqrt{29}}{2}, \quad x_4 = \frac{11 - \sqrt{29}}{2}. \end{aligned}$$

Число x_3 больше, чем $11/2$, и потому не удовлетворяет условию $x < 3$. Проверим x_4 :

$$x_4 - 3 = \frac{11 - \sqrt{29}}{2} - 3 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{29}}{2} < 0.$$

Значит, x_4 является корнем исходного уравнения.

Ответ: $\frac{3+\sqrt{13}}{2}, \frac{11-\sqrt{29}}{2}$.

3. $|2x^2 - 3x - 4| = 6x - 1$.

Снимать модуль по определению? Страшно даже подумать об этом, ведь дискриминант — не точный квадрат. Давайте лучше воспользуемся следующим соображением: уравнение вида $|A| = B$ равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} A = B, \\ B \geq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A = -B, \\ B \geq 0. \end{cases}$$

То же самое, но немного по-другому:

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} A = B, \\ A = -B, \end{cases} \\ B \geq 0. \end{cases}$$

Иными словами, мы решаем два уравнения, $A = B$ и $A = -B$, а потом отбираем корни, удовлетворяющие условию $B \geq 0$.

Приступаем. Сначала решаем первое уравнение:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x - 4 &= 6x - 1, \\ 2x^2 - 9x - 3 &= 0, \\ x_1 &= \frac{9 + \sqrt{105}}{4}, \quad x_2 = \frac{9 - \sqrt{105}}{4}. \end{aligned}$$

Затем решаем второе уравнение:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x - 4 &= 1 - 6x, \\ 2x^2 + 3x - 5 &= 0, \\ x_3 &= 1, \quad x_4 = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Теперь в каждом случае проверяем знак правой части:

$$6x_1 - 1 = 6 \cdot \frac{9 + \sqrt{105}}{4} - 1 = \frac{50 + 6\sqrt{105}}{4} > 0;$$

$$6x_2 - 1 = 6 \cdot \frac{9 - \sqrt{105}}{4} - 1 = \frac{50 - 6\sqrt{105}}{4} = \frac{\sqrt{2500} - \sqrt{3780}}{4} < 0;$$

$$6x_3 - 1 = 6 - 1 > 0;$$

$$6x_4 - 1 = -15 - 1 < 0.$$

Стало быть, годятся лишь x_1 и x_3 .

Ответ: 1, $\frac{9+\sqrt{105}}{4}$.

Квадратные уравнения с заменой $|x| = t$

Решим уравнение: $x^2 + 2|x| - 3 = 0$.

Поскольку $x^2 = |x|^2$, удобно сделать замену $|x| = t$. Получаем:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 1 \\ |x| = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ \text{решений нет} \end{cases}$$

Ответ: ± 1 .

Модуль равен модулю

Речь идёт об уравнениях вида $|A| = |B|$. Это — подарок судьбы. Никаких раскрытий модуля по определению! Всё просто:

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A = B, \\ A = -B. \end{cases}$$

Например, рассмотрим уравнение: $|3x^2 + 5x - 9| = |6x + 15|$. Оно равносильно следующей совокупности:

$$\begin{cases} 3x^2 + 5x - 9 = 6x + 15, \\ 3x^2 + 5x - 9 = -6x - 15. \end{cases}$$

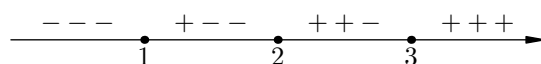
Остаётся решить каждое из уравнений совокупности и записать ответ.

Два или несколько модулей

Решим уравнение: $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$.

Не будем возиться с каждым модулем по отдельности и раскрывать его по определению — слишком много получится вариантов. Существует более рациональный способ — метод интервалов.

Выражения под модулями обращаются в нуль в точках $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$. Эти точки делят числовую прямую на четыре промежутка (интервала). Отметим на числовой прямой эти точки и расставим знаки для каждого из выражений под модулями на полученных интервалах. (Порядок следования знаков совпадает с порядком следования соответствующих модулей в уравнении.)



Таким образом, нам нужно рассмотреть четыре случая — когда x находится в каждом из интервалов.

Случай 1: $x \geq 3$. Все модули снимаются «с плюсом»:

$$\begin{aligned}x - 1 - 2(x - 2) + 3(x - 3) &= 4, \\x &= 5.\end{aligned}$$

Полученное значение $x = 5$ удовлетворяет условию $x \geq 3$ и потому является корнем исходного уравнения.

Случай 2: $2 \leq x \leq 3$. Последний модуль теперь снимается «с минусом»:

$$\begin{aligned}x - 1 - 2(x - 2) + 3(3 - x) &= 4, \\x &= 2.\end{aligned}$$

Полученное значение x также годится — оно принадлежит рассматриваемому промежутку.

Случай 3: $1 \leq x \leq 2$. Второй и третий модули снимаются «с минусом»:

$$\begin{aligned}x - 1 - 2(2 - x) + 3(3 - x) &= 4, \\4 &= 4.\end{aligned}$$

Мы получили верное числовое равенство при любом x из рассматриваемого промежутка. Это означает, что все числа из промежутка $[1; 2]$ служат решениями данного уравнения.

Случай 4: $x \leq 1$. Все модули снимаются «с минусом»:

$$\begin{aligned}1 - x - 2(2 - x) + 3(3 - x) &= 4, \\x &= 1.\end{aligned}$$

Ничего нового. Мы и так знаем, что $x = 1$ является решением.

Ответ: $[1; 2] \cup \{5\}$.

Модуль в модуле

Решим уравнение: $||3 - x| - 2x + 1| = 4x - 10$.

Начинаем с раскрытия внутреннего модуля.

1) $x \leq 3$. Получаем:

$$\begin{aligned}|3 - x - 2x + 1| &= 4x - 10, \\|4 - 3x| &= 4x - 10.\end{aligned}$$

Выражение под модулем обращается в нуль при $x = \frac{4}{3}$. Данная точка принадлежит рассматриваемому промежутку. Поэтому приходится разбирать два подслучая.

1.1) $\frac{4}{3} \leq x \leq 3$. Получаем в этом случае:

$$\begin{aligned}3x - 4 &= 4x - 10, \\x &= 6.\end{aligned}$$

Это значение x не годится, так как не принадлежит рассматриваемому промежутку.

1.2) $x \leq \frac{4}{3}$. Тогда:

$$\begin{aligned}4 - 3x &= 4x - 10, \\ x &= 2.\end{aligned}$$

Это значение x также не годится.

Итак, при $x \leq 3$ решений нет. Переходим ко второму случаю.

2) $x \geq 3$. Имеем:

$$\begin{aligned}|x - 3 - 2x + 1| &= 4x - 10, \\ |x + 2| &= 4x - 10.\end{aligned}$$

Здесь нам повезло: выражение $x + 2$ положительно в рассматриваемом промежутке! Поэтому никаких подслучаев уже не будет: модуль снимается «с плюсом»:

$$\begin{aligned}x + 2 &= 4x - 10, \\ x &= 4.\end{aligned}$$

Это значение x находится в рассматриваемом промежутке и потому является корнем исходного уравнения.

Ответ: 4.

Так решаются все задачи данного типа — раскрываем вложенные модули по очереди, начиная с внутреннего.

Неравенства с модулем

Никаких принципиально новых идей здесь не возникает. Всеми необходимыми знаниями вы уже владеете. Поэтому мы разберём лишь две задачи. Остальное — на занятиях и в домашних заданиях.

1. $2|x - 4| + |3x + 5| \geq 16$.

1) $x \geq 4$. Имеем:

$$\begin{aligned}2(x - 4) + 3x + 5 &\geq 16, \\ x &\geq \frac{19}{5}.\end{aligned}$$

Полученное неравенство выполняется при всех рассматриваемых $x \geq 4$. Иными словами, все числа из промежутка $[4; +\infty)$ являются решениями нашего неравенства.

2) $-\frac{5}{3} \leq x \leq 4$. Имеем в данном случае:

$$\begin{aligned}2(4 - x) + 3x + 5 &\geq 16, \\ x &\geq 3.\end{aligned}$$

Учитывая, в каком промежутке мы сейчас находимся, получаем в качестве решений исходного неравенства множество $[3; 4]$.

3) $x \leq -\frac{5}{3}$. Имеем:

$$\begin{aligned}2(4 - x) - 3x - 5 &\geq 16, \\ x &\leq -\frac{13}{5}.\end{aligned}$$

Так как $-\frac{13}{5} < -\frac{5}{3}$, то все значения x из полученного промежутка $(-\infty, -\frac{13}{5}]$ служат решениями исходного неравенства.

Остаётся объединить множества решений, полученные в трёх рассмотренных случаях.

Ответ: $(-\infty, -\frac{13}{5}] \cup [3; +\infty)$.

2. $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$.

Это задача №6 теоретической части урока 8 книги В. В. Ткачука «Математика — абитуриенту». Автор решает её методом интервалов. Обязательно разберите авторское решение!

Заметим, что метод интервалов здесь проходит весьма безболезненно по той причине, что корни квадратного трёхчлена под модулем — целые числа. А если дискриминант не будет точным квадратом? Замените, например, под модулем -3 на -5 . Объём вычислительной работы тогда существенно возрастет.

Мы покажем вам другой способ решения этой задачи, не зависящий от капризов дискриминанта.

Наше неравенство имеет вид $|A| < B$. Очевидны следующие утверждения.

- Если $B \leq 0$, то неравенство не имеет решений.
- Если $B > 0$, то неравенство равносильно двойному неравенству $-B < A < B$ или, что то же самое, системе

$$\begin{cases} A < B, \\ A > -B. \end{cases}$$

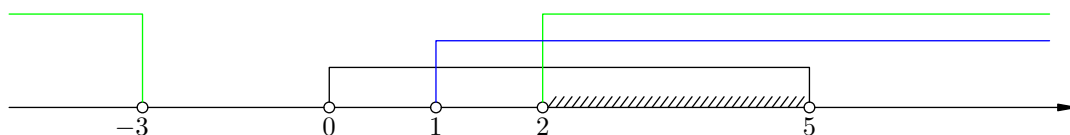
Иными словами, мы берём пересечение множества решений данной системы с множеством решений неравенства $B > 0$, то есть решаем систему

$$\begin{cases} A < B, \\ A > -B, \\ B > 0. \end{cases}$$

В нашей задаче получаем:

$$|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 3x - 3 \\ x^2 - 2x - 3 > -(3x - 3) \\ 3x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x < 0 \\ x^2 + x - 6 > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 5 \\ \begin{cases} x > 2 \\ x < -3 \end{cases} \\ x > 1 \end{cases}$$

Изобразим множества решений этих неравенств на рисунке. Чёрным цветом показаны решения первого (двойного) неравенства; зелёный цвет — решения совокупности; синий цвет — решения последнего неравенства системы.



Решением системы служит пересечение этих множеств, т. е. множество, над которым присутствуют линии всех трёх цветов. Оно заштриховано.

Ответ: $(2; 5)$.

Статья написана в соавторстве с А. Г. Малковой

Что такое функция?

Понятие функции пронизывает все разделы математики. Это одно из самых фундаментальных математических понятий. Что же это такое — функция?

Прежде чем давать строгое определение, опишем на примерах смысл этого понятия.

Функция выражает идею зависимости величин: с изменением некоторой величины x может изменяться другая величина y .

Например, любая физическая формула выражает зависимость одной величины от другой. Так, связь давления и температуры для постоянного объёма газа даётся формулой $p = \alpha T$, то есть давление p является линейной функцией температуры T .

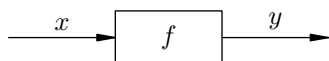
И когда мы пишем $y = f(x)$, мы как раз и имеем в виду эту идею зависимости: переменная y зависит от переменной x по определённому закону (предписанию, правилу). Закон этот обозначен буквой f .

Встречаются зависимости не только от одной, но и от нескольких величин. Например, уравнение состояния идеального газа можно записать в виде $p = nkT$. Давление p зависит от двух величин: концентрации газа n и его температуры T . Такие зависимости, называемые функциями нескольких переменных, вы будете изучать уже в высшей школе.

Вернёмся к записи $y = f(x)$. Обратите внимание: для каждого допустимого значения x мы однозначно получаем значение y , пользуясь правилом f . Иными словами, понятие функции выражает также идею *действия*, совершаемого над одной величиной для получения значения другой величины.

Узнаёте в этом описании свой калькулятор? На одной кнопке написано $\sqrt{}$, на другой — \log , на третьей — \sin . . . Нажимаете кнопку — и калькулятор совершает предписанное действие с тем числом, которое вы ввели.

В технической литературе часто встречается интерпретация функции как устройства, на вход которого подаётся x , а на выходе возникает y :



Даже в повседневной жизни мы иногда используем слово «функция» в смысле «действие» — например, можем говорить о функциях мобильного телефона. Можем даже говорить о функциях депутата или менеджера — то есть о действиях, которые эти люди совершают.

Ну что ж, надеемся, что идея, заложенная в понятии функции, вам теперь ясна. Как же эта идея формализуется в математике? Вот строгое определение.

Функция — это соответствие между двумя множествами, такое, что каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.

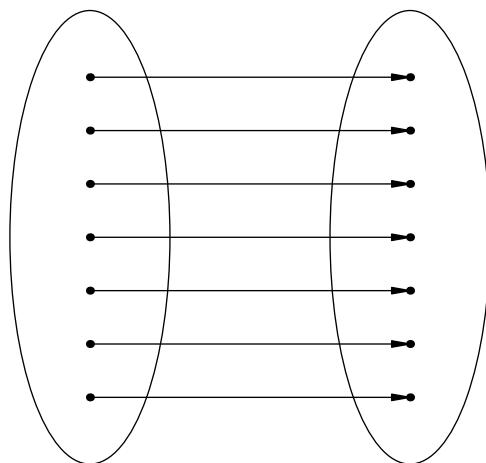
(В определении, как вы заметили, используются понятия множества и соответствия. В школьной математике они служат неопределяемыми, первичными понятиями. Смысл их интуитивно очевиден. Почитайте на эту тему статью «О первичных понятиях».)

Поясним данное определение на примерах.

Возьмём два множества — множество граждан России и множество номеров их российских паспортов. Ясно, что у каждого гражданина имеется свой номер паспорта.

Получаем соответствие, при котором каждому гражданину России сопоставляется определённый набор цифр — номер его паспорта. Это соответствие проиллюстрировано на рисунке.

Граждане России Номера паспортов

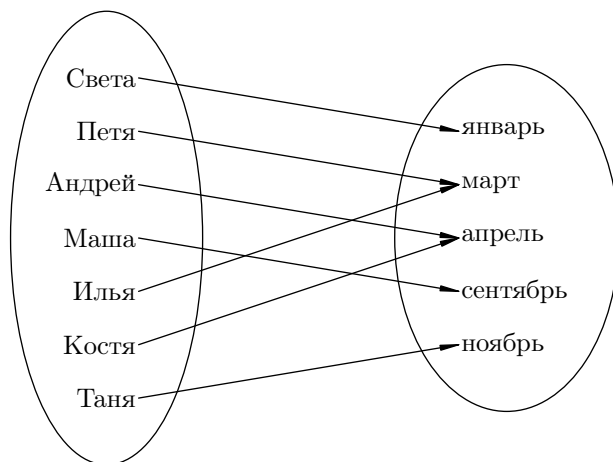


Более того, номер паспорта уникален: по номеру паспорта можно однозначно найти конкретного человека. Такое соответствие в математике называется *взаимно-однозначным*.

Линейная функция $y = kx + b$ при $k \neq 0$ является примером взаимно-однозначного соответствия. Возьмём, к примеру, функцию $y = 3x + 1$. Каждому значению x здесь соответствует своё значение y . И наоборот — каждому y соответствует одно-единственное значение x .

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-5	-2	1	4	7	10	13	16

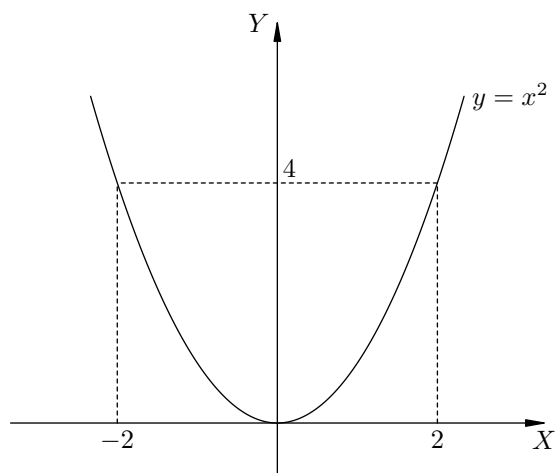
Вот другой вид соответствия между множествами: компания друзей и месяцы, в которые они родились.



Каждый человек родился в какой-то определённый месяц, то есть каждому элементу из первого множества соответствует один и только один элемент из второго множества. Но при этом есть месяцы, соответствующие нескольким людям (например, в марте родились Петя и Илья). Стало быть, данное соответствие не является взаимно-однозначным.

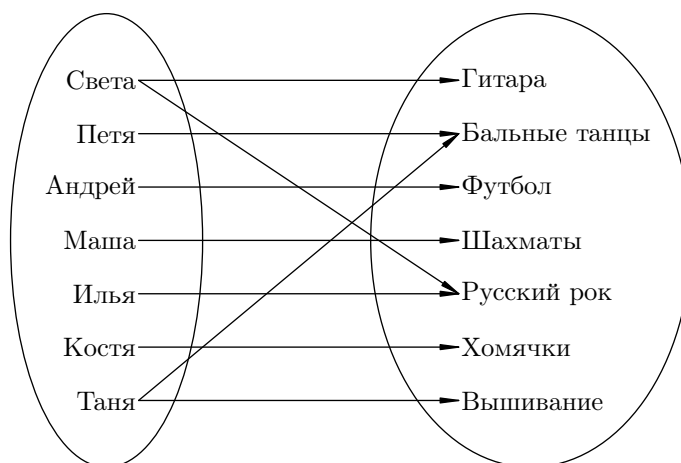
В математике тоже есть функции, которые в нескольких точках принимают одинаковые значения — например, $y = x^2$ или $y = \sin x$.

Следующий рисунок показывает отсутствие взаимной однозначности у квадратичной функции. Мы видим, что элементу 4 множества Y (оси ординат) соответствуют два элемента 2 и -2 множества X (оси абсцисс).



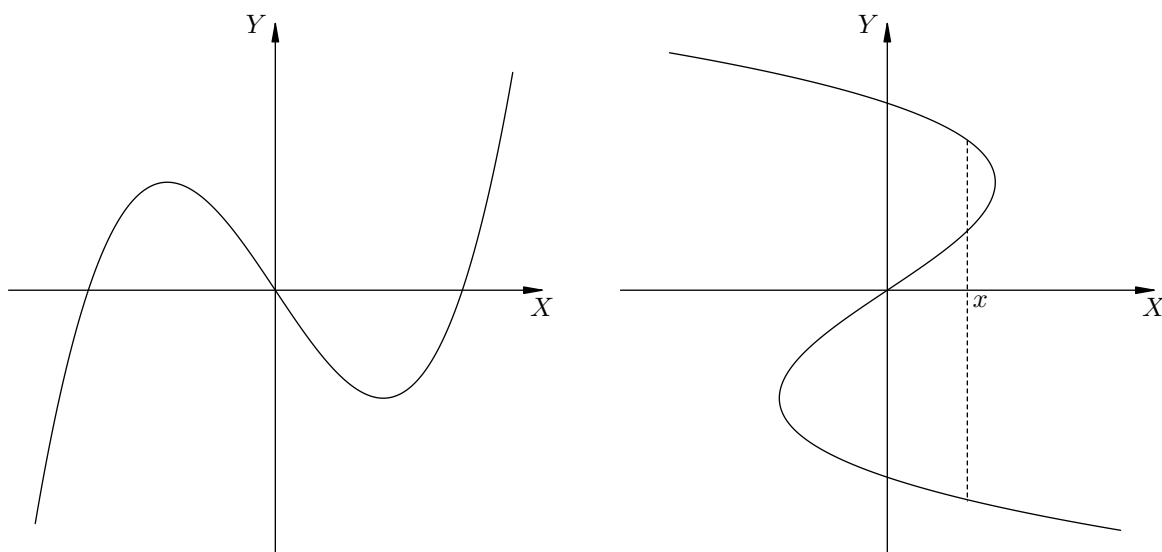
Но, какова бы ни была функция, каждому допустимому значению x всегда должно соответствовать в точности одно значение y .

Приведём пример соответствия между множествами, которое *не является функцией*. Пусть это снова будет наша компания друзей, но на сей раз посмотрим их увлечения.



Как видим, в первом множестве есть элементы, которым соответствует более одного элемента второго множества. Например, Света увлекается гитарой и русским роком — вопреки определению функции.

Теперь рассмотрим две кривые:



Первая кривая, несомненно, является графиком функции — каждому значению x отвечает единственное значение y .

А вторая кривая — это график соответствия, которое не является функцией. Мы видим, что найдётся значение x , которому отвечает более одного (в данном случае три) значения y .

В школе мы имеем дело с функциями, которые являются соответствиями между множествами чисел. Такие функции называются *числовыми*. Итак, ещё раз.

Числовая функция $y = f(x)$ — это такое соответствие между двумя числовыми множествами A и B , при котором каждому числу $x \in A$ сопоставляется одно-единственное число $y \in B$. Переменная x называется при этом аргументом функции f .

Множество A называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$ или $D(y)$. Область определения — это множество тех значений аргумента x , при которых функция определена (попросту говоря, это множество тех x , которые можно подставить в формулу и вычислить соответствующее значение y).

Множество B называется *областью значений* (или *множеством значений*) функции f . Оно обозначается $E(f)$ или $E(y)$. Область значений — это множество, которое пробегает переменная y , когда аргумент x пробегает область определения функции.

Например, областью определения функции $y = \sin x$ служит множество всех действительных чисел, а областью значений — отрезок $[-1; 1]$. Областью определения функции $y = \sqrt{x-1}$ является промежуток $[1; +\infty)$, а областью значений — промежуток $[0; +\infty)$.

Есть несколько способов задания числовой функции.

1. С помощью формулы. Это наиболее привычный для нас способ. Примеры: $y = \cos x$, $y = x^2 - 2x$.
2. Наглядный способ — с помощью графика. Например, зависимость курса доллара от времени удобнее всего смотреть на графике. Вряд ли возможно задать эту зависимость какой-либо формулой :-)
3. С помощью таблицы. Этот способ будет единственно возможным, например, в ситуации, когда снимается экспериментальная зависимость, формула ещё не выведена и график ещё не построен.
4. С помощью описания того, как устроено соответствие. Например, функция $y = |x|$ по сути задаётся описанием:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Статья написана в соавторстве с А. Г. Малковой

Чтение графика функции

Напомним определение числовой функции.

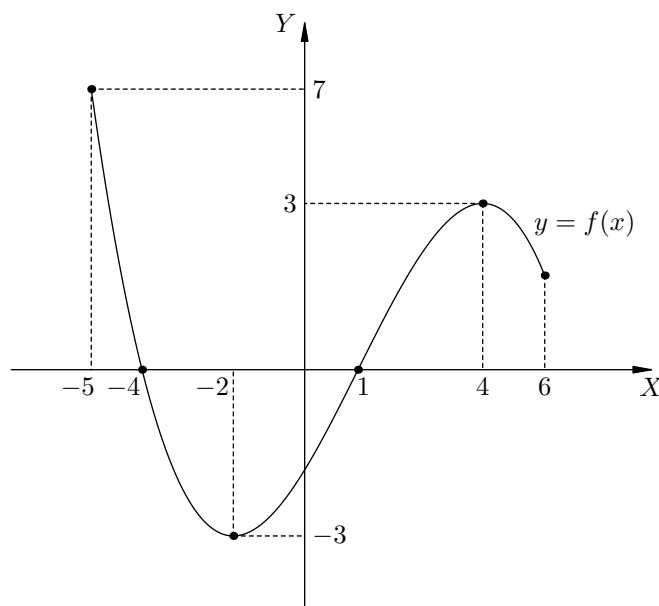
Числовая функция $y = f(x)$, определённая на множестве $A \subset \mathbb{R}$ — это правило, сопоставляющее каждому значению $x \in A$ одно-единственное число y .

Множество A называется областью определения функции и обозначается $D(y)$ или $D(f)$.

Когда переменная x пробегает область определения, переменная y также пробегает некоторое множество, которое называется множеством значений или областью значений функции. Область значений обозначается $E(y)$ или $E(f)$.

В этой небольшой статье мы расскажем вам, что мы видим на графике функции и как это называется в математике. Мы проиллюстрируем понятия области определения, области значений, возрастания и убывания функции. Покажем, что такое точка экстремума, экстремум, наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$.



Область определения функции — это диапазон всех возможных «иксов». Мы видим, что в данном случае $D(y) = [-5; 6]$.

Область значений функции — это диапазон соответствующих «игреков»: $E(y) = [-3; 7]$.

Нули функции — это значения аргумента x , при которых функция обращается в нуль. Другими словами, это абсциссы точек, в которых график пересекает ось X . В нашем случае нулями функции являются $x = -4$ и $x = 1$.

Важнейшие понятия — возрастание и убывание функции на некотором множестве M .

В качестве множества M может выступать что угодно: отрезок $[a, b]$; конечный или бесконечный промежуток, открытый с одного или с обоих концов; объединение промежутков и т. д.

Функция называется возрастающей на множестве M , если для любых $x_1, x_2 \in M$, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Простому говоря, большему значению аргумента отвечает большее значение функции. График возрастающей функции идёт вправо вверх.

Функция называется убывающей на множестве M , если для любых $x_1, x_2 \in M$, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Иными словами, большему значению аргумента отвечает меньшее значение функции. График убывающей функции идёт вправо вниз.

Функция, которую мы рассматриваем, возрастает на отрезке $[-2; 4]$. Функция убывает на каждом из отрезков $[-5; -2]$ и $[4; 6]$.

Хороший вопрос: верно ли, что наша функция убывает на множестве $[-5; -2] \cup [4; 6]$? Ответ: неверно. Почему?

Точка $x = 4$ на нашем рисунке является *точкой максимума*. Точка максимума — это внутренняя точка области определения, такая, что значение функции в ней больше, чем во всех *достаточно близких* к ней точках. Можно сказать, что точка максимума соответствует локальному пику графика функции.

Обратите внимание, что граничная точка $x = -5$ не является точкой максимума. Она не лежит внутри области определения, у неё нет соседей слева.

Точка $x = -2$ является *точкой минимума*. Точка минимума — это внутренняя точка области определения, такая, что значение функции в ней меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках. Точка минимума отвечает локальной «ямке» на графике функции.

Точки максимума и минимума вместе называются *точками экстремума* функции. В нашем случае $x = -2$ и $x = 4$ — точки экстремума.

При этом *экстремумы* функции — это значения функции в точках экстремума. Мы видим, что $f(-2) = -3$ и $f(4) = 3$. Стало быть, экстремумы функции — это числа -3 и 3 . Значение -3 является *минимумом* функции, значение 3 — её *максимумом*.

Иногда в задачах требуется отыскать наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке. Они не обязательно совпадают с экстремумами! Например, наименьшее значение нашей функции на отрезке $[-5; 6]$ равно -3 и совпадает с минимумом функции. А вот наибольшее значение функции на этом отрезке равно 7 ; оно достигается на левом конце отрезка и не совпадает с максимумом функции.

Но в любом случае наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке достигаются либо в точках экстремума, либо на концах отрезка.

Понятие *непрерывной* функции, кстати, является одним из важнейших в математике. Строгое определение непрерывности вы узнаете на первом курсе при изучении математического анализа. Но смысл прост: график непрерывной функции можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги.

Статья написана в соавторстве с А. Г. Малковой

Степени и корни

Степенью называется выражение вида a^c . Число a называется *основанием* степени, число c называется *показателем* степени.

Степень с натуральным показателем

Сначала определим понятие степени, показатель которой — натуральное число (т. е. целое и положительное).

Прежде всего, по определению

$$a^1 = a.$$

Далее, возвести число в квадрат — значит умножить его само на себя: $a^2 = a \cdot a$. Возвести число в куб — значит умножить его само на себя три раза: $a^3 = a \cdot a \cdot a$. Возвести число в натуральную степень n — значит умножить его само на себя n раз:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n.$$

С этим ясно. Но что делать, если показатель степени не является натуральным числом?

Степень с целым показателем

Сначала разберёмся с нулевым показателем. Если $a \neq 0$, то по определению

$$a^0 = 1.$$

Выражение 0^0 не определено!

Теперь определим степень с целым отрицательным показателем. Опять-таки, если $a \neq 0$, то для натурального n по определению имеем:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Например:

$$5^{-1} = \frac{1}{5}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}.$$

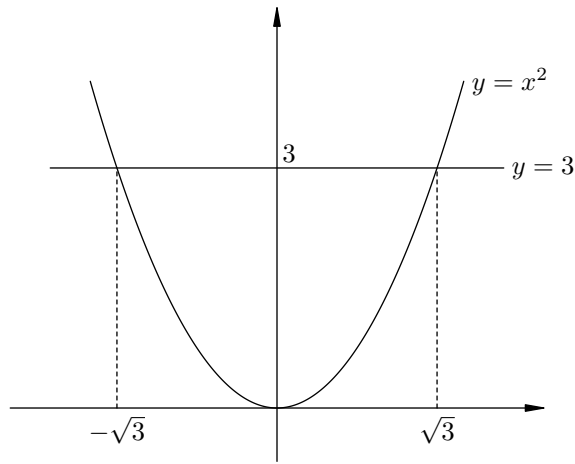
Выражение 0^{-n} снова не определено.

Разобрались. Однако показатель степени может быть ещё и дробным! Здесь нам понадобится понятие корня n -й степени. Начнём с простейшего случая.

Арифметический квадратный корень

Уравнение $x^2 = 4$ имеет два решения: $x = 2$ и $x = -2$. Это числа, квадрат которых равен 4.

А как быть с уравнением $x^2 = 3$? Если мы нарисуем график функции $y = x^2$, то увидим, что и у этого уравнения имеются два решения, одно из которых положительно, а другое отрицательно.



Но теперь эти решения не являются целыми числами. Более того, они не являются рациональными. Для того, чтобы записать эти иррациональные решения, мы вводим специальный символ квадратного корня.

Итак, пусть $a \geq 0$. По определению, *арифметический квадратный корень* \sqrt{a} — это неотрицательное число, квадрат которого равен a . Иными словами, это неотрицательный корень уравнения $x^2 = a$.

Например, $\sqrt{4} = 2$ (но не -2). А решения уравнения $x^2 = 3$ мы запишем следующим образом: $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$.

При $a < 0$ выражение \sqrt{a} не определено. В самом деле, не найдётся такого действительного числа, квадрат которого равен отрицательному числу a (или: уравнение $x^2 = a$ не имеет решений).

Кубический корень

Кубический корень из числа a — это число, куб которого равен a . Иными словами, это единственный корень уравнения $x^3 = a$.

Обратите внимание, что кубический корень определён для всех a . Его можно извлечь из любого числа. Например, $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Теперь становится ясно, как определить корень n -й степени для любого натурального n .

Корень n -й степени

Корень n -й степени из числа a — это число, n -я степень которого равна a . Иными словами, это корень уравнения $x^n = a$.

Пусть n чётно. Тогда при $a < 0$ корень n -й степени из a не определён. Если $a \geq 0$, то неотрицательный корень уравнения $x^n = a$ называется *арифметическим корнем n -й степени* из a и обозначается $\sqrt[n]{a}$. При $n = 2$ вместо $\sqrt[n]{a}$ пишется \sqrt{a} .

Пусть теперь n нечётно. Тогда уравнение $x^n = a$ имеет единственный корень при любом a . Он также обозначается $\sqrt[n]{a}$.

Например, $\sqrt[4]{10000} = 10$, $\sqrt[5]{-243} = -3$, $\sqrt[6]{64} = 2$.

Вот теперь мы готовы обсудить степень с дробным показателем.

Степень с рациональным показателем

Сразу договоримся, что основание степени будет положительным: $a > 0$. Число n по-прежнему будет натуральным ($n \in \mathbb{N}$). Число m мы будем считать целым ($m \in \mathbb{Z}$).

Определение:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Например:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \quad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, \quad a^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}.$$

Почему наложено ограничение $a > 0$? Понятно, что $a = 0$ не годится — нуль не возведёшь в отрицательную степень. Но чем плохи отрицательные основания степени?

Казалось бы, раз $\sqrt[3]{-8} = -2$, то можно записать: $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$. Но нас тут поджидает неприятность. Смотрите: $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$. Одно и то же число оказалось равно -2 и 2 одновременно.

Другой пример. С одной стороны, $(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$ не существует. Но с другой стороны, $(-4)^{\frac{1}{2}} = (-4)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = 2$.

Чтобы не связываться с подобными парадоксами, рассматривают лишь положительное основание степени с дробным показателем.

Степень с рациональным показателем обладает следующими свойствами. (Числа a и b — действительные положительные, числа p и q — рациональные.)

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$a^p \cdot b^p = (ab)^p$$

$$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$$

Все эти формулы можно доказать. Их знания достаточно для решения всех задач части В вариантов ЕГЭ по теме «Корни и степени».

Степени с дробным показателем очень полезны для преобразования выражений с корнями. Например:

$$\frac{\sqrt[9]{7} \cdot \sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}} = \frac{7^{\frac{1}{9}} \cdot 7^{\frac{1}{18}}}{7^{\frac{1}{6}}} = 7^{\frac{1}{9} + \frac{1}{18} - \frac{1}{6}} = 7^0 = 1.$$

Производная

Содержание

1 Производная в математике	2
1.1 Предел	2
1.2 Непрерывность функции	4
1.3 Мгновенная скорость	4
1.4 Определение производной	6
1.5 Табличные производные	7
1.6 Связь непрерывности и дифференцируемости	9
1.7 Правила дифференцирования	11
1.8 Геометрический смысл производной	14
1.9 Уравнение касательной	15
1.10 Случаи недифференцируемости	16
1.11 Исследование функций	17
1.12 Экспонента и натуральный логарифм	21
2 Производная в физике	23
2.1 Производная координаты	24
2.2 Ускорение	24
2.3 Дифференцирование векторов	27
2.4 Производная радиус-вектора	29
2.5 Производная вектора скорости	30

Понятие производной занимает уникальное положение в школьной программе. С одной стороны, производная активно используется: с её помощью исследуются функции и строятся графики, ищутся наибольшие и наименьшие значения функций; школьникам надо уметь решать задачи на геометрический и физический смысл производной. С другой стороны, строгое определение производной вообще не даётся!

В результате получается, что школьники зазубривают таблицу производных и правила дифференцирования, умеют *механически* выполнять некоторые действия и решать типовые задачи, но при этом совершенно не понимают сути того, что они делают. А за отсутствие понимания приходится расплачиваться в вузе: двойки и пересдачи в первую же сессию.

Цель данной статьи — максимально доходчиво рассказать о производной. Доступность изложения будет преобладать над технической строгостью. Хочется надеяться, что идеи, изложенные в этой статье, помогут вам понять происходящее и подготовят к адекватному восприятию вузовских курсов математического анализа и общей физики.

1 Производная в математике

Строгое математическое определение производной опирается на понятие предела, которое в школе не проходят. Но определение предела нам сейчас и незначит. Самое главное — уловить основную идею, которая лежит в основе понятия предела.

1.1 Предел

Рассмотрим последовательность:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Изобразим члены данной последовательности на числовой оси (рис. 1).

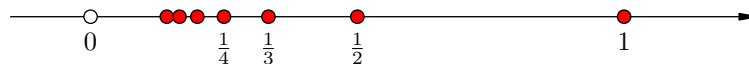


Рис. 1. Последовательность чисел $1/n$ ($n \in \mathbb{N}$)

Мы видим, что наши числа неограниченно приближаются к нулю (но никогда его не достигают). Начиная с $n = 10$ все члены последовательности окажутся на расстоянии не более $1/10$ от нуля; начиная с $n = 100$ все они будут на расстоянии не более $1/100$ от нуля; начиная с $n = 1000$ все они будут на расстоянии не более $1/1000$ от нуля и т. д.

Говорят, что последовательность $1/n$ *стремится к нулю*, или *сходится к нулю*, или что *предел* этой последовательности равен нулю. Записывают это так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Образно говоря, наша последовательность «втекает» в точку 0. Понятие предела как раз и отражает факт этого «втекания».

Точно так же последовательность

$$a_n = 3 + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

будет «втекать» в точку 3. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n} \right) = 3.$$

Подчеркнём, что «втекание последовательности в точку a » означает, что вблизи числа a находятся *все* члены данной последовательности, начиная с некоторого номера. Более точно, смысл выражения «предел последовательности a_n равен a » таков: какое бы расстояние ε мы наперёд ни задали, *все* числа a_n , начиная с некоторого номера, будут находиться от числа a на расстоянии меньше ε .

Например, закопеременная последовательность $1, -1, 1, -1, \dots$ не имеет предела: она не «втекает» ни в какую точку. Почему, например, число 1 не является пределом данной последовательности? Потому что найдётся бесконечно много членов последовательности (а именно, все члены с чётными номерами, равные -1), удалённых от точки 1 на расстояние 2. Иными словами, не найдётся такого номера, начиная с которого все члены данной последовательности окажутся достаточно близко к точке 1.

Можно говорить не только о пределе последовательности, но и о пределе функции. Напомним, что функция $y = f(x)$ — это некоторое правило, которое позволяет для любого допустимого числа x получить единственное соответствующее ему число y . При этом число x называется *аргументом* функции, а число y — *значением* функции.

Нас будет интересовать понятие предела функции в точке. Оно формализует ту же самую идею «втекания». Только на сей раз график функции $y = f(x)$ будет «втекать» в некоторую точку координатной плоскости, когда аргумент x стремится к некоторому значению.

Так, на рис. 2 вы видите хорошо известную параболу — график функции $y = x^2$. Возьмём значение $x = 2$ и отметим на графике соответствующую точку $A(2, 4)$.

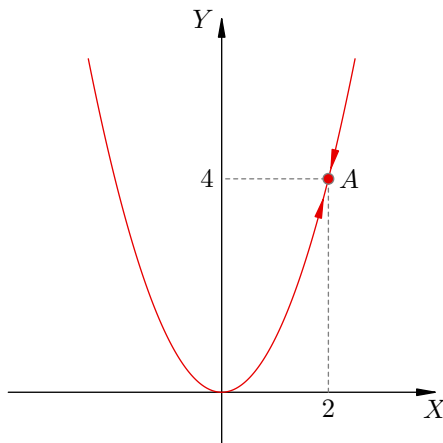


Рис. 2. График функции $y = x^2$

Представим себе, что x приближается к 2 (справа или слева — неважно). При этом график «втекает» в точку A , что и показано на рисунке стрелками. Иными словами, значение функции стремится к 4, и данный факт записывается следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4. \quad (1)$$

«А что тут такого особенного? — скажете вы. — Ясно же, что если x стремится к 2, то x^2 стремится к $2^2 = 4$. Зачем огород городить, говоря о каких-то пределах?»

Здесь не всё так просто. Взгляните на рис. 3.

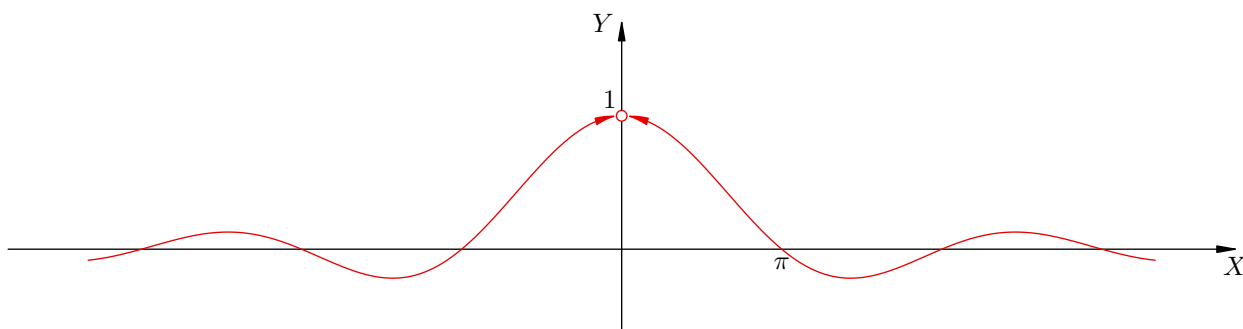


Рис. 3. График функции $y = \frac{\sin x}{x}$

Перед вами график функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

И вот что интересно: значение функции при $x = 0$ не определено (при попытке вычислить $f(0)$ мы получаем нуль в знаменателе), но при этом график «втекает» в точку $(0, 1)$. То есть, хотя $f(0)$ не существует, тем не менее при $x \rightarrow 0$ значение функции стремится к числу 1. Иными словами, существует предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2)$$

Он называется *первым замечательным пределом*.

Вы легко можете убедиться в справедливости формулы (2), взяв в руки калькулятор. Переведите его в режим «радианы» и вычислите:

$$\frac{\sin 0,1}{0,1}, \quad \frac{\sin 0,01}{0,01}, \quad \frac{\sin 0,001}{0,001}, \quad \dots$$

Вы увидите, что значение дроби становится всё ближе и ближе к единице.

1.2 Непрерывность функции

На примере пределов (1) и (2) мы наблюдаем две принципиально разные ситуации. В случае предела (1) можно просто подставить предельное значение «икса», равное 2, в функцию $f(x) = x^2$ и получить: $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4$. А вот в случае предела (2) такое не проходит — предельное значение 0 нельзя подставить в функцию $f(x) = \sin x/x$ (что, однако, не мешает пределу данной функции существовать).

Если предельное значение a аргумента x можно подставить в функцию $f(x)$ и при этом будет выполнено равенство

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \quad (3)$$

то функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a . В противном случае функция *разрывна* в точке a .

Так, функция $f(x) = x^2$ непрерывна в точке $x = 2$ (как и в любой другой точке). График этой функции — непрерывная линия, которая вычерчивается без отрыва ручки от бумаги.

А функция $f(x) = \sin x/x$ разрывна в точке $x = 0$. Это проявляется в том, что точка $(0, 1)$ выколота из графика функции.

Упражнение. Постройте график функции:

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Уяснив, что такое предел, мы теперь обсудим важнейшее физическое понятие *мгновенной скорости*. Оно вплотную подведёт нас к определению производной.

1.3 Мгновенная скорость

Спидометр автомобиля показывает 60 км/ч. Что это значит? Ответ простой: если автомобиль будет ехать так в течение часа, то он проедет 60 км.

Допустим, однако, что автомобиль вовсе не собирается ехать так целый час. Например, водитель разгоняет автомобиль с места, давит на газ, в какой-то момент бросает взгляд на спидометр и видит стрелку на отметке 60 км/ч. В следующий момент стрелка уползёт ещё выше. Как же понимать, что *в данный момент времени* скорость равна 60 км/ч?

Давайте выясним это на примере. Предположим, что путь s , пройденный автомобилем, зависит от времени t следующим образом:

$$s(t) = t^2,$$

где путь измеряется в метрах, а время — в секундах. То есть, при $t = 0$ путь равен нулю, к моменту времени $t = 1$ пройденный путь равен $s(1) = 1$, к моменту времени $t = 2$ путь равен $s(2) = 4$, к моменту времени $t = 3$ путь равен $s(3) = 9$, и так далее.

Видно, что идёт разгон — автомобиль набирает скорость с течением времени. Действительно: за первую секунду пройдено расстояние 1; за вторую секунду пройдено расстояние $s(2) - s(1) = 3$; за третью секунду пройдено расстояние $s(3) - s(2) = 5$, и далее по нарастающей.

А теперь вопрос. Пусть, например, через три секунды после начала движения наш водитель взглянул на спидометр. Что покажет стрелка? Иными словами, какова *мгновенная* скорость автомобиля в момент времени $t = 3$?

Просто поделить путь на время не получится: привычная формула $v = s/t$ работает только для *равномерного* движения (то есть когда стрелка спидометра застыла в некотором фиксированном положении). Но именно эта формула лежит в основе способа, позволяющего найти мгновенную скорость.

Идея способа такова. Отсчитаем от нашего момента $t = 3$ небольшой промежуток времени Δt , найдём путь Δs , пройденный автомобилем за этот промежуток, и поделим Δs на Δt . *Чем меньше будет Δt , тем точнее мы приблизимся к искомой величине мгновенной скорости.*

Давайте посмотрим, как эта идея реализуется. Возьмём для начала $\Delta t = 1$. Тогда

$$\Delta s = s(4) - s(3) = 4^2 - 3^2 = 7,$$

и для скорости получаем:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{7}{1} = 7 \quad (4)$$

(скорость, разумеется, измеряется в м/с).

Будем уменьшать промежуток Δt . Берём $\Delta t = 0,1$:

$$\Delta s = s(3,1) - s(3) = 3,1^2 - 3^2 = 0,61,$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0,61}{0,1} = 6,1. \quad (5)$$

Теперь берём $\Delta t = 0,01$:

$$\Delta s = s(3,01) - s(3) = 3,01^2 - 3^2 = 0,0601,$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0,0601}{0,01} = 6,01. \quad (6)$$

Ну и возьмём ещё $\Delta t = 0,001$:

$$\Delta s = s(3,001) - s(3) = 3,001^2 - 3^2 = 0,006001,$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0,006001}{0,001} = 6,001. \quad (7)$$

Глядя на значения (4)–(7), мы понимаем, что величина $\Delta s/\Delta t$ приближается к числу 6. Это означает, что мгновенная скорость автомобиля в момент времени $t = 3$ составляет 6 м/с.

Таким образом, при безграничном уменьшении Δt путь Δs также стремится к нулю, но отношение $\Delta s/\Delta t$ стремится к некоторому пределу v , который и называется *мгновенной скоростью* в данный момент времени t :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (8)$$

Можно написать и так:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \quad (9)$$

Давайте вернёмся к нашему примеру с $s(t) = t^2$ и проделаем в общем виде те выкладки, которые выше были выполнены с числами. Итак:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = (t + \Delta t)^2 - t^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2 = \Delta t(2t + \Delta t),$$

и для мгновенной скорости имеем:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t(2t + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t + \Delta t) = 2t. \quad (10)$$

В частности, при $t = 3$ формула (10) даёт: $v(3) = 2 \cdot 3 = 6$, как и было получено выше.

Теперь мы располагаем всеми необходимыми предварительными сведениями и полностью готовы перейти к обсуждению производной.

1.4 Определение производной

Скорость бывает не только у автомобиля. Мы можем говорить о скорости изменения чего угодно — например, физической величины или экономического показателя. Производная как раз и служит обобщением понятия мгновенной скорости на случай абстрактных математических функций.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Напомним, что x называется *аргументом* данной функции. Отметим на оси X некоторое значение аргумента x , а на оси Y — соответствующее значение функции $f(x)$ (рис. 4).

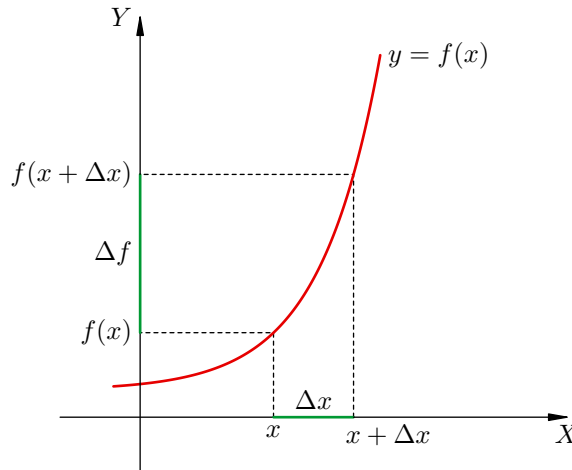


Рис. 4. Приращение аргумента и приращение функции

Дадим аргументу x некоторое *приращение*, обозначаемое Δx . Попадём в точку $x + \Delta x$. Обозначим её на рисунке вместе с соответствующим значением функции $f(x + \Delta x)$.

Величина

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (11)$$

называется *приращением функции*, которое отвечает данному приращению аргумента Δx .

Вы видите сходство с предыдущим пунктом? Приращение аргумента Δx есть абстрактный аналог промежутка времени Δt , а соответствующее приращение функции Δf — это аналог пути Δs , пройденного за время Δt . Но на этом аналогия не заканчивается. Производная — это в точности аналог мгновенной скорости.

Определение. Производная $f'(x)$ функции $f(x)$ в точке x — это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (12)$$

Сравните с формулами (8) и (9). По сути написано одно и то же, не правда ли? Можно сказать, что производная — это мгновенная скорость изменения функции.

Нахождение производной функции называется *дифференцированием*. Нам предстоит научиться дифференцировать различные функции. Прежде всего мы возьмём несколько простых функций и найдём их производные непосредственно по определению, то есть с помощью формулы (12).

1.5 Табличные производные

Начнём с функции, которая является константой: $f(x) = c$. Приращение этой функции равно нулю:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0.$$

Соответственно, обращается в нуль и производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Итак, имеем первый результат — *производная константы равна нулю*:

$$\boxed{c' = 0.}$$

Теперь будем дифференцировать степенную функцию, то есть функцию вида $f(x) = x^a$. Найдём производную самой простой такой функции $f(x) = x$. Приращение функции:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x.$$

Производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Итак,

$$x' = 1.$$

Перейдём к функции $f(x) = x^2$. Это абстрактный аналог рассмотренной выше физической ситуации с $s(t) = t^2$, в которой мы искали мгновенную скорость. Нам остаётся лишь повторить (в других обозначениях) те вычисления, которые привели нас к формуле (10).

Приращение функции:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x).$$

Производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом,

$$(x^2)' = 2x.$$

Проделаем то же самое с функцией $f(x) = x^3$. Приращение функции:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = \\ &= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2). \end{aligned}$$

Производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$$

Итак,

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Точно так же можно показать, что:

$$\begin{aligned}(x^4)' &= 4x^3, \\ (x^5)' &= 5x^4, \\ &\dots \\ (x^n)' &= nx^{n-1}.\end{aligned}$$

Оказывается, последняя формула справедлива не только для целого n , но и вообще для любого показателя степени a :

$$\boxed{(x^a)' = ax^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R}.} \quad (13)$$

Мы докажем эту формулу позже, а сейчас найдём с её помощью производную функции $f(x) = \sqrt{x}$:

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Эта производная встречается очень часто, и её имеет смысл выучить. Запомнить можно так: «производная корня есть один делить на два корня».

Упражнение. Покажите, что:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Сделайте это двумя способами: а) по определению производной (вычислив предел); б) с помощью формулы (13).

Перейдём к тригонометрическим функциям. Вычислим производную функции $f(x) = \sin x$. Приращение функции:

$$\Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x.$$

Вспомним, как разность синусов превращается в произведение:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Получаем:

$$\begin{aligned}\Delta f &= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right), \\ f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Перепишем выражение для производной немного иначе:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right). \quad (14)$$

Под знаком предела в (14) стоит произведение двух выражений — дроби и косинуса. Оказывается, что каждое из этих выражений стремится к некоторому пределу.

Начнём с дроби. Сделаем замену $t = \Delta x/2$. Ясно, что $t \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Имеем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

(мы использовали соотношение (2) — первый замечательный предел). Итак, дробь стремится к единице.

Выражение $x + \frac{\Delta x}{2}$, стоящее под знаком косинуса, при $\Delta x \rightarrow 0$ стремится к x . Как вы знаете, косинус — непрерывная функция (график косинуса вычерчивается без отрыва ручки от бумаги). Поэтому, согласно определению (3) непрерывной функции, для нахождения предела косинуса можно просто положить в аргументе косинуса $\Delta x = 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x. \quad (15)$$

Тогда из (14) получаем¹

$$f'(x) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Итак,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Упражнение. Покажите, что

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Используйте для этого формулу разности косинусов:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Четыре производных в рамочке (константа, степенная функция, синус и косинус) называются *табличными*. Теперь вы понимаете, откуда они взялись. Разумеется, табличные производные нужно твёрдо знать.

Вычисления производной по определению (то есть как предела) легко проходят для функций, устроенных наиболее просто. А как быть, если нужно продифференцировать функцию наподобие такой: $f(x) = x^7 \sin \sqrt[3]{4x^2 - 5x}$? Здесь вычислять предел (12) — занятие не из приятных. В подобных случаях на помощь приходят *правила дифференцирования*, которые позволяют сконструировать производную данной функции из производных более простых функций.

Но для обоснования правил дифференцирования нам нужно предварительно разобраться с одним теоретическим вопросом.

1.6 Связь непрерывности и дифференцируемости

Как вы помните, функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a , если предел $f(x)$ в точке a равен значению функции в этой точке: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Попросту говоря, непрерывная в данной точке функция стремится к своему значению в этой точке.

Можно написать и немного по-другому: функция $f(x)$ непрерывна в точке a , если

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(a + \Delta x) = f(a). \quad (16)$$

Это ведь то же самое, не правда ли? Если $\Delta x \rightarrow 0$, то аргумент $a + \Delta x$ стремится к a , и значение функции в точке $a + \Delta x$ стремится к значению функции в точке a . Именно этими соображениями мы воспользовались выше при рассмотрении предела косинуса (15).

Выражение (16) позволяет нам дать ещё одно равносильное определение непрерывности. Ведь если $f(a + \Delta x)$ стремится к $f(a)$, то разность $f(a + \Delta x) - f(a)$ стремится к нулю. А что такое $f(a + \Delta x) - f(a)$? Это приращение Δf функции $f(x)$ в точке a . В результате получаем:

¹Вообще, если одно выражение стремится к числу a , а другое — к числу b , то произведение этих выражений стремится к ab . При всей своей очевидности данное утверждение является теоремой, которую вы будете доказывать на первом курсе.

функция $f(x)$ непрерывна в данной точке, если её приращение в этой точке стремится к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0. \quad (17)$$

Идём дальше. Функция называется *дифференцируемой* в данной точке, если она имеет производную в этой точке (то есть предел (12) в данной точке x существует).

Может ли непрерывная функция не быть дифференцируемой? Да, такое возможно. Классический пример: функция $f(x) = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$. График этой функции изображён на рис. 5.

Приращение функции:

$$\Delta f = |x + \Delta x| - |x|.$$

В точке $x = 0$ имеем:

$$\Delta f = |\Delta x|.$$

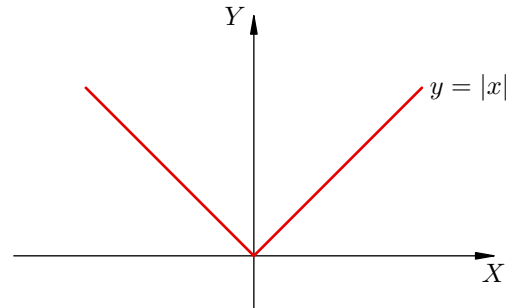


Рис. 5. График функции $y = |x|$

Почему производная в нуле не существует? Давайте рассмотрим два случая: Δx стремится к нулю сначала со стороны положительных чисел (то есть справа), а затем со стороны отрицательных чисел (то есть слева).

1. $\Delta x \rightarrow 0, x > 0$. Тогда $\Delta f = \Delta x$, то есть

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 1.$$

2. $\Delta x \rightarrow 0, x < 0$. Тогда $\Delta f = -\Delta x$, то есть

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = -1.$$

В результате получается, что отношение $\Delta f / \Delta x$ ни к какому пределу не стремится. В самом деле, устремим Δx к нулю так, чтобы знак Δx попеременно менялся (например, Δx пробегает значения $1; -0,1; 0,01; -0,001; \dots$). Тогда дробь $\Delta f / \Delta x$ будет попеременно принимать значения 1 и -1 , а такая знакопеременная последовательность, как мы видели выше, предела не имеет. Следовательно, функция $f(x) = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$.

Таким образом, *непрерывная функция не обязана быть дифференцируемой*. Точка излома графика функции — типичный пример точки, в которой функция не является дифференцируемой. Именно такой точкой излома служит точка $(0, 0)$ на графике функции $y = |x|$.

А как насчёт обратного утверждения? Оказывается, дифференцируемость — более сильное свойство, чем непрерывность. *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке*.

Действительно, пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке x . Тогда отношение $\Delta f / \Delta x$ стремится к некоторому числу при $\Delta x \rightarrow 0$. Но Δx стоит в знаменателе этого отношения; поэтому для существования предела необходимо, чтобы и числитель стремился к нулю. (А куда деваться числителю? Ведь если при знаменателе, стремящемся к нулю, числитель к нулю не стремится, то дробь уйдёт в бесконечность — вместо того, чтобы приближаться к какому-то фиксированному значению.) Стало быть, $\Delta f \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$; но это и означает согласно (17) непрерывность функции в точке x .

1.7 Правила дифференцирования

Как мы уже сказали, правила дифференцирования позволяют находить производные функций достаточно сложного вида. Идея состоит в «расщеплении» исходной функции на более простые функции, производные которых известны и играют роль «кирпичиков» при конструировании искомой производной. Зная небольшое число табличных производных и располагая правилами дифференцирования, мы можем вычислять производные огромного количества функций, не прибегая к определению производной и не вычисляя соответствующий предел (12).

Везде далее u и v — функции, дифференцируемые в данной точке. Мы будем активно пользоваться соотношениями:

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u, \quad v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v,$$

где Δu и Δv — приращения функций u и v в точке x . Эти соотношения непосредственно следуют из определения (11) приращения функции.

Всего имеется пять правил дифференцирования.

0. Константа выносится за знак производной. Если c — число, то $(cu)' = cu'$.

Данное правило легко получается в качестве следствия правила 2 о дифференцировании произведения. Но применяется оно настолько часто, что мы сделали его «нулевым» правилом, обособленным от остальных.

Согласно этому правилу имеем, например:

$$\begin{aligned}(5x^2)' &= 5(x^2)' = 10x, \\ (-3 \sin x)' &= -3(\sin x)' = -3 \cos x.\end{aligned}$$

1. Дифференцирование суммы. $(u + v)' = u' + v'$ (производная суммы равна сумме производных).

Действительно, пусть $f(x) = u(x) + v(x)$. Тогда:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \\ &= u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x) = \\ &= u(x) + \Delta u + v(x) + \Delta v - u(x) - v(x) = \Delta u + \Delta v.\end{aligned}$$

Теперь имеем:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right).$$

Дроби $\Delta u/\Delta x$ и $\Delta v/\Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$ стремятся соответственно к $u'(x)$ и $v'(x)$. Сумма этих дробей стремится к сумме² $u'(x) + v'(x)$:

$$f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

Это и нужно было показать.

Так, применяя правила 0 и 1, находим:

$$\begin{aligned}(\sin x + \cos x)' &= (\sin x)' + (\cos x)' = \cos x - \sin x, \\ (x^3 + 4 \cos x - 10)' &= (x^3)' + (4 \cos x)' + (-10)' = 3x^2 - 4 \sin x\end{aligned}$$

²Вообще, если одно выражение стремится к числу a , а другое — к числу b , то сумма этих выражений стремится к $a + b$. Это теорема, которую нужно доказывать.

(производная константы -10 равна нулю!).

2. Дифференцирование произведения. $(uv)' = u'v + uv'$.

Давайте разбираться, почему это так. Обозначаем $f(x) = u(x)v(x)$. Тогда:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = \\ &= (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x) = \\ &= u(x)v(x) + v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u\Delta v - u(x)v(x) = \\ &= v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u\Delta v.\end{aligned}$$

Далее имеем:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x) + u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v \right).$$

Первое слагаемое стремится к $u'(x)v(x)$. Второе слагаемое стремится к $u(x)v'(x)$. К чему стремится третье слагаемое $\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$? Дробь $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ в пределе даёт число $u'(x)$, а множитель Δv стремится к нулю, поскольку функция $v(x)$ дифференцируема в точке x и потому непрерывна в этой точке. Так что третье слагаемое стремится к нулю. В результате получаем:

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

в чём и хотелось убедиться.

Вот пример дифференцирования произведения:

$$(x^2 \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2(\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

А вот как получается правило 0:

$$(cu)' = c'u + cu' = cu',$$

поскольку $c' = 0$.

3. Дифференцирование частного.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Выведем эту формулу. Обозначим

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x) + \Delta u}{v(x) + \Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{v(x)(v(x) + \Delta v)}, \\ \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)(v(x) + \Delta v)}, \\ f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)(v(x) + \Delta v)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.\end{aligned}$$

Слагаемое Δv в знаменателе обратилось в нуль при переходе к пределу вследствие непрерывности функции $v(x)$.

Правило дифференцирования частного позволяет найти производные тангенса и котангенса, которые также относятся к табличным.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

то есть

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Проделайте самостоятельно аналогичные вычисления и покажите, что

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Нам осталось обсудить последнее правило — дифференцирование сложной функции. Мы сначала объясним, что такое сложная функция, затем продемонстрируем правило дифференцирования на примерах, и только потом — когда станет ясно, как оно работает — сформулируем и докажем это правило.

Пусть, например, $u(x) = \sin x$ и $v(x) = \sqrt{x}$. Давайте сначала извлекать корень из x (то есть применять к x функцию v), а потом брать синус полученного числа (то есть действовать на полученное число $v(x)$ функцией u). Тогда возникает функция:

$$u(v(x)) = \sin \sqrt{x}.$$

Это и есть *сложная* функция, или *композиция* функций u и v . Идея понятна: число x поступает на вход *первой* функции v , а полученное число $v(x)$ поступает на вход *второй* функции u .

Можно, наоборот, сделать u первой функцией, а v — второй. Тогда сначала от x будет вычисляться синус, а потом из синуса извлекаться корень. Получится другая сложная функция:

$$v(u(x)) = \sqrt{\sin x}.$$

Дифференцирование сложной функции — это как снятие листов с кочана капусты. Сначала находим производную второй («внешней») функции и умножаем её на производную первой («внутренней») функции. Применительно к нашим примерам это выглядит так:

$$\begin{aligned} (\sin \sqrt{x})' &= \cos \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' = \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}, \\ (\sqrt{\sin x})' &= \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Давайте приведём для наглядности ещё два примера:

$$\begin{aligned} [(4x^2 + 3x + 2)^5]' &= 5(4x^2 + 3x + 2)^4 \cdot (4x^2 + 3x + 2)' = 5(4x^2 + 3x + 2)^4 \cdot (8x + 3), \\ [A \sin(\omega x + \alpha)]' &= A \cos(\omega x + \alpha) \cdot (\omega x + \alpha)' = A\omega \cos(\omega x + \alpha). \end{aligned}$$

Понятно, как работает правило? Тогда — формулировка.

4. Дифференцирование сложной функции. $[u(v(x))]' = u'(v(x))v'(x)$.

Обозначим $f(x) = u(v(x))$. Имеем:

$$\Delta f = u(v(x + \Delta x)) - u(v(x)) = u(v(x) + \Delta v) - u(v(x)),$$

и тогда

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{u(v(x) + \Delta v) - u(v(x))}{\Delta x} = \frac{u(v(x) + \Delta v) - u(v(x))}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ имеем также $\Delta v \rightarrow 0$, поэтому

$$\frac{u(v(x) + \Delta v) - u(v(x))}{\Delta v} \rightarrow u'(v(x)).$$

Следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(v(x) + \Delta v) - u(v(x))}{\Delta v} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(v(x))v'(x),$$

что и требовалось.

1.8 Геометрический смысл производной

Рассмотрим график возрастающей функции $y = f(x)$ (рис. 6) и возьмём две близкие точки графика: точку A с координатами $(x_0, f(x_0))$ и точку B с координатами $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Полагаем, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке A .

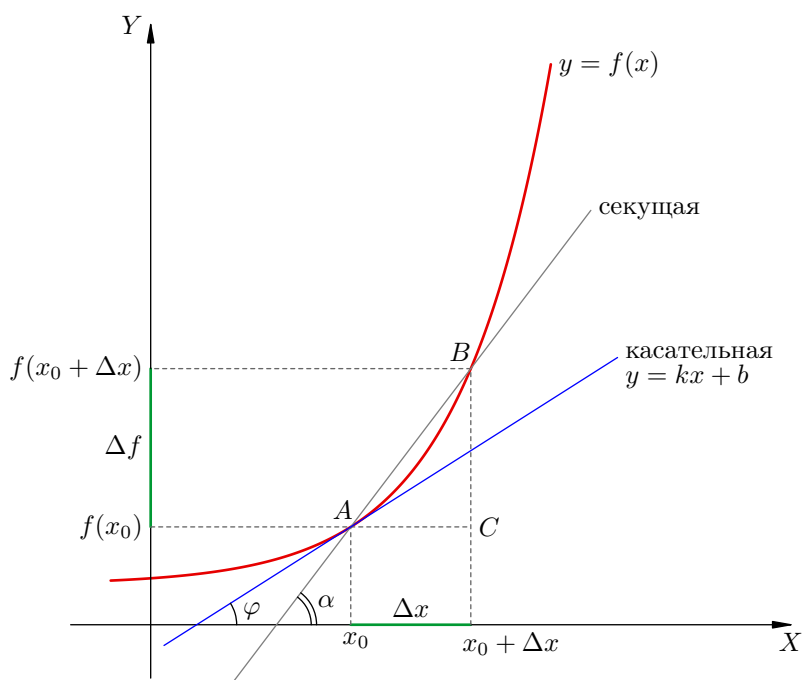


Рис. 6. Геометрический смысл производной: $f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi = k$

Прямая AB называется *секущей*. Угол наклона секущей AB к оси X обозначим α . Напомним, что угол наклона лежит в промежутке $[0, 180^\circ)$; в данном случае α является острым углом.

Прямые AC и BC параллельны осям X и Y соответственно. По рисунку легко видеть, что $\angle BAC = \alpha$, $AC = \Delta x$ и $BC = \Delta f$, так что

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (18)$$

Теперь устремляем Δx к нулю. Отношение $\Delta f / \Delta x$ превращается в производную $f'(x_0)$. Что происходит при этом на рисунке? Точка B стремится к точке A , в результате чего секущая занимает предельное положение и становится *касательной* к графику функции в точке A .

Угол α наклона секущей переходит в угол φ наклона касательной, и, соответственно, $\operatorname{tg} \alpha$ переходит в $\operatorname{tg} \varphi$ (поскольку тангенс — непрерывная функция на своей области определения). Итак, имеем:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi. \quad (19)$$

Вспомним ещё, что тангенс угла наклона прямой — это её угловой коэффициент, то есть число k в уравнении прямой $y = kx + b$. Тем самым:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi = k. \quad (20)$$

Мы пришли к этому выводу, пользуясь графиком возрастающей функции. Что изменится, если функция $f(x)$ будет убывающей? Давайте посмотрим на рис. 7.

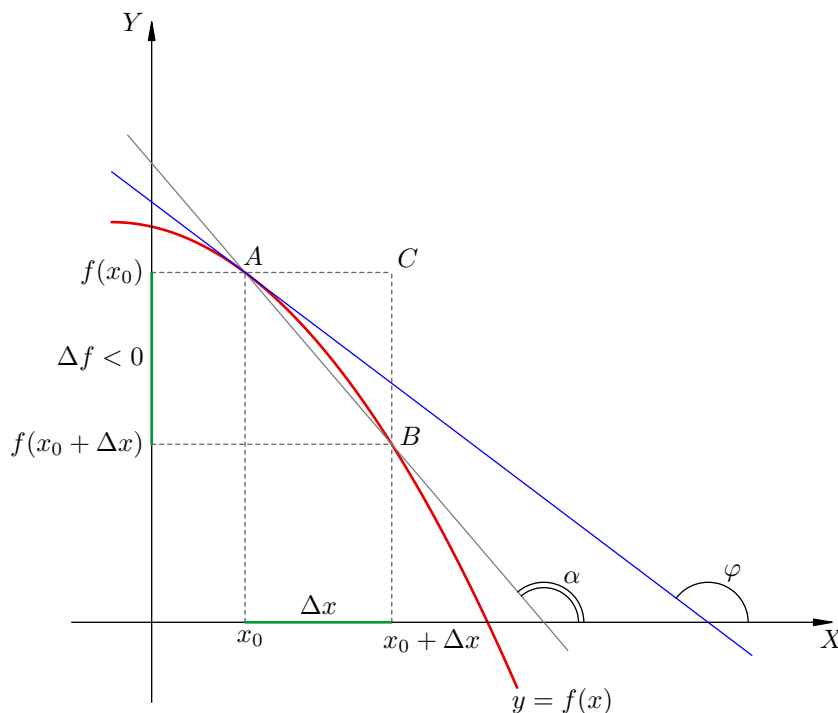


Рис. 7. И снова $f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi = k$

Мы видим, что углы α и φ теперь являются тупыми, а приращение нашей функции отрицательно: $\Delta f = -BC$. Кроме того, $\angle BAC = 180^\circ - \alpha$, так что $\operatorname{tg} \angle BAC = -\operatorname{tg} \alpha$. Тогда:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{BC}{AC} = -\operatorname{tg} \angle BAC = \operatorname{tg} \alpha.$$

Получился тот же результат, что и выше в (18). Поэтому остаются в силе предельный переход (19) и вывод (20). Таким образом, имеем следующую геометрическую интерпретацию понятия производной.

Геометрический смысл производной. Производная функции в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой к графику функции в точке с абсциссой x_0 , или, что то же самое, угловому коэффициенту k этой касательной.

1.9 Уравнение касательной

Найдём уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке с координатами $(x_0, f(x_0))$. По-прежнему считаем, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 .

Уравнение касательной имеет вид $y = kx + b$, поэтому наша задача — найти k и b . Но k мы уже знаем — это производная функции в данной точке: $k = f'(x_0)$. Поэтому уравнение касательной уточняется:

$$y = f'(x_0)x + b, \quad (21)$$

и нам остаётся определить b .

Для этого заметим, что точка $(x_0, f(x_0))$ лежит на касательной, а значит — координаты этой точки удовлетворяют уравнению касательной. Подставляем эти координаты в (21):

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b,$$

откуда

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Остаётся подставить найденное выражение для b в (21):

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0,$$

или

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (22)$$

Уравнение (22) и есть искомое уравнение касательной.

В качестве примера найдём уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$. Имеем: $f(x_0) = 9$, $f'(x) = 2x$, $f'(x_0) = 6$. Подставляем всё это в (22):

$$y = 6(x - 3) + 9 = 6x - 9.$$

Упражнение. К графику функции $y = 1/x$ проведена касательная. Покажите, что площадь треугольника, отсекаемого этой касательной от координатного угла, не зависит от точки касания и равна 2.

1.10 Случаи недифференцируемости

Выше мы показали, что если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке. Стало быть, если функция разрывна в точке, то она и подавно не дифференцируема в данной точке.

Возможна также ситуация, когда функция непрерывна в точке, но не является дифференцируемой в этой точке. Пример также был приведён выше: функция $f(x) = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$.

Вообще, точки излома графика — это точки нарушения дифференцируемости. Например, у функции, график которой представлен на рис. 8, производная не существует в точках x_1 и x_2 .

Геометрическая интерпретация производной позволяет нам лучше понять, чем «плохи» точки x_1 и x_2 . Дело в том, что в соответствующих точках A и B не существует однозначного положения касательной (как предельного положения секущей). Понятие касательной в точках A и B попросту теряет смысл. Следовательно, мы не можем говорить об угле наклона касательной, о тангенсе этого угла и, соответственно, о производной в данных точках.

Физическая интерпретация производной (как мгновенной скорости изменения функции) также даёт объяснение недифференцируемости в точке излома. В самом деле, при переходе через точку излома скорость изменения функции скачком меняет своё значение. Слева от точки излома скорость одна, справа — совсем другая, так что в самой точке излома скорость изменения функции не имеет определённого значения.

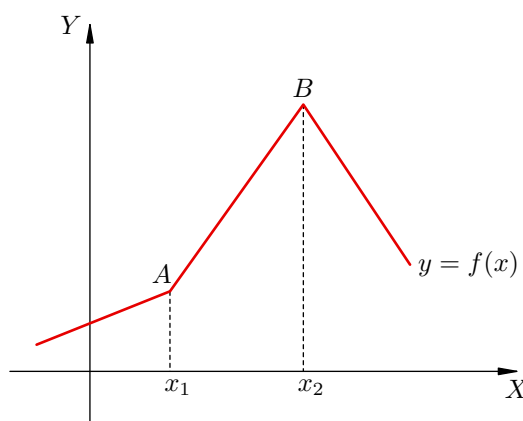


Рис. 8. Точки недифференцируемости

Однако не следует думать, что непрерывная функция не дифференцируема только в точках излома, то есть там, где отсутствует касательная. Может случиться, что касательную к графику функции провести можно, но, тем не менее, производная функции в этой точке не существует. Соответствующий пример показан на рис. 9.

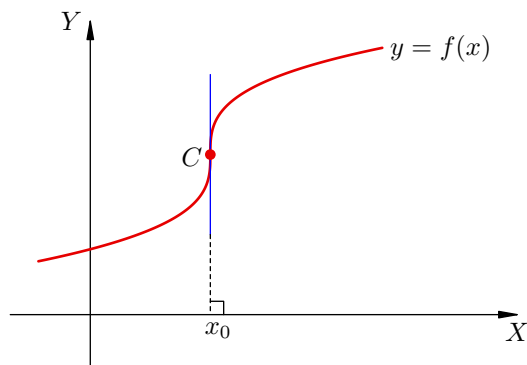


Рис. 9. Касательная есть, а производной нет

В точке C касательная имеется, но она *перпендикулярна* оси X . Угол наклона касательной $\varphi = 90^\circ$, поэтому $\operatorname{tg} \varphi$ не существует. Следовательно, не существует и $f'(x_0)$.

В этом случае перестаёт быть справедливым и уравнение касательной (22), поскольку касательная на рис. 9 не имеет углового коэффициента. Уравнение данной касательной выглядит так: $x = x_0$.

Упражнение. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $(0, 0)$.

1.11 Исследование функций

Все функции, которые рассматриваются нами далее, считаются дифференцируемыми в нужных точках. Поэтому существование касательных подразумевается по умолчанию.

На рис. 10 изображён график функции $y = f(x)$ и проведены касательные в двух точках с абсциссами x_1 и x_2 .

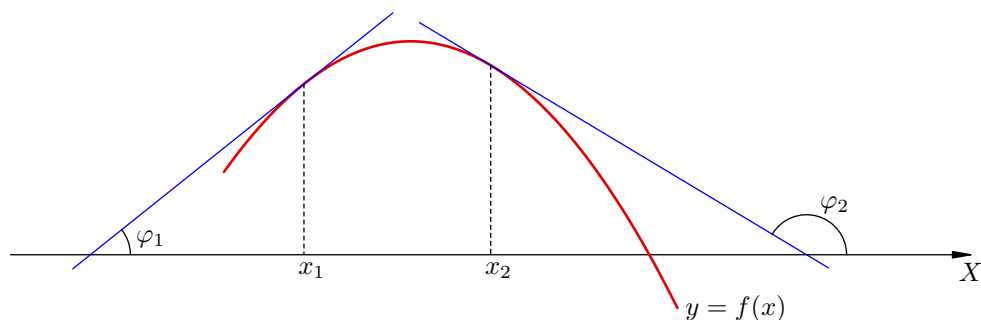


Рис. 10. Возрастание и убывание функции: $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) < 0$

Вблизи точки x_1 функция возрастает. Это приводит к тому, что касательная в точке x_1 наклонена под острым углом φ_1 к оси X . Тангенс острого угла положителен; значит, положительна и производная в точке x_1 :

$$f'(x_1) = \operatorname{tg} \varphi_1 > 0.$$

Вблизи точки x_2 функция убывает. Вследствие этого касательная в точке x_2 образует тупой угол φ_2 с осью X . Тангенс тупого угла отрицателен, а вместе с ним отрицательна и производная в точке x_2 :

$$f'(x_2) = \operatorname{tg} \varphi_2 < 0.$$

Справедливы также и обратные утверждения.

Признак возрастания функции. Если производная положительна на некотором промежутке, то функция возрастает на этом промежутке.

Признак убывания функции. Если производная отрицательна на некотором промежутке, то функция убывает на этом промежутке.

В самом деле, если скорость изменения количества ваших денег положительна, то денег у вас прибавляется. А вот если скорость наполнения кошелька отрицательна, то денег в нём становится меньше :-)

Наблюдение за знаком производной лежит в основе исследования функций. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

Выясним, на каких промежутках эта функция возрастает, а на каких — убывает. Для этого находим её производную:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1).$$

Методом интервалов определяем знаки производной и отмечаем стрелками возрастание или убывание функции на каждом промежутке (рис. 11).

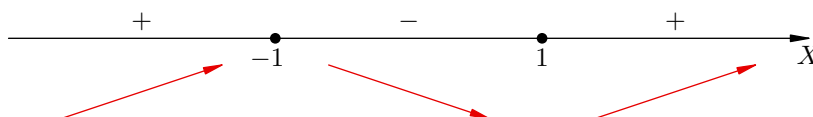


Рис. 11. Поведение функции $f(x) = x^3 - 3x$

Как видим, функция возрастает на промежутках $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ и убывает на промежутке $[-1, 1]$. Теперь поведение функции становится совершенно ясным. Мы можем найти значения функции в граничных точках промежутков возрастания и убывания: $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, и после этого построить график (рис. 12):

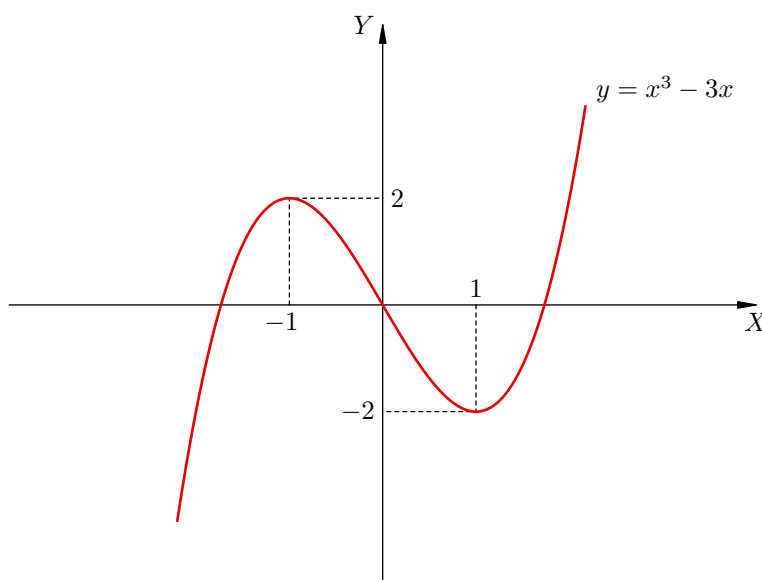


Рис. 12. График функции $f(x) = x^3 - 3x$

Чем интересны граничные точки -1 и 1 промежутков возрастания и убывания нашей функции? В этих точках *производная равна нулю*. Точки, в которых производная функции обращается в нуль, называются *стационарными точками* данной функции. Название понятно — в

стационарной точке скорость изменения функции равна нулю, то есть функция «на мгновение» перестаёт меняться.

Стационарные точки могут быть трёх видов.

1. Точка максимума.

На рис. 13 точка $x = a$ является точкой максимума функции $f(x)$: значение функции в точке a больше, чем во всех достаточно близких к ней точках.

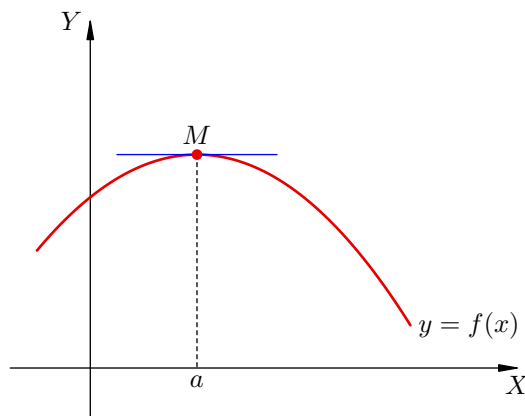


Рис. 13. Точка максимума

Касательная в точке M горизонтальна, то есть образует нулевой угол с осью X . Поэтому $f'(a) = 0$.

При переходе через точку a тенденция меняется: возрастание функции сменяется убыванием. Иными словами, *производная меняет знак с $(+)$ на $(-)$* — это признак точки максимума.

2. Точка минимума.

На рис. 14 точка $x = b$ является точкой минимума функции $f(x)$: значение функции в точке b меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках.

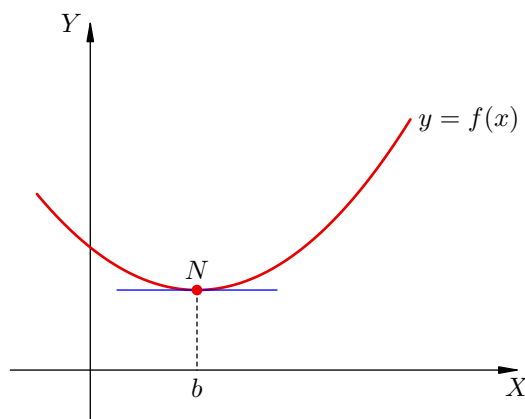


Рис. 14. Точка минимума

Касательная в точке N также горизонтальна. Поэтому $f'(b) = 0$.

При переходе через точку b тенденция также меняется: убывание функции сменяется возрастанием. *Производная меняет знак с $(-)$ на $(+)$* — это признак точки минимума.

Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума**. Таким образом, точки экстремума — это точки изменения тенденции поведения функции; в точке экстремума возрастание сменяется убыванием или наоборот.

3. Седловая точка.

Третий возможный случай изображён на рис. 15. Касательная в точке S горизонтальна, так что $f'(c) = 0$.

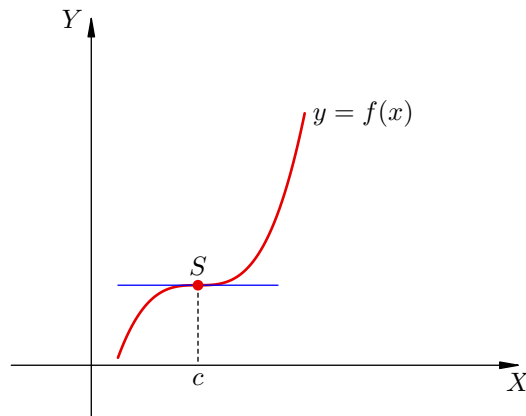


Рис. 15. Седловая точка

При переходе через точку $x = c$ тенденция не меняется: функция как возрастала, так и продолжает возрастать. Знак производной как был $(+)$, так им и останется.

Стационарная точка, не являющаяся точкой экстремума, называется *седловой точкой*. Так, в данном случае точка $x = c$ — седловая точка.

Стационарные точки и точки нарушения дифференцируемости называются *критическими точками* функции. Сформулируем это определение более точно.

Критическая точка функции — это внутренняя точка области определения, в которой производная обращается в нуль или не существует.

Упражнение. Определите, является ли $x = 0$ критической точкой для следующих функций:

- а) $f(x) = 2x$;
- б) $f(x) = x^2 + 5$;
- в) $f(x) = 1/x$;
- г) $f(x) = |x|$;
- д) $f(x) = -x^3$;
- е) $f(x) = \sqrt{x}$;
- ж) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Упражнение. Найдите критические точки функций $\sin x$ и $\cos x$. Покажите, что функция $\operatorname{tg} x$ не имеет критических точек.

Рассмотрим напоследок ещё один пример: исследуем функцию

$$f(x) = x^4 - 4x^3.$$

А именно, найдём критические точки, промежутки возрастания и убывания, точки экстремума и построим график.

Областью определения функции служит множество всех действительных чисел: $D(f) = \mathbb{R}$. Вычисляем производную:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3).$$

Производная существует при любых x и обращается в нуль в двух точках: $x = 0$ и $x = 3$. Будучи внутренними точками области определения, они являются критическими точками нашей функции.

Выясним характер критических точек. Для этого с помощью метода интервалов расставляем знаки производной и определяем промежутки возрастания и убывания (рис. 16).

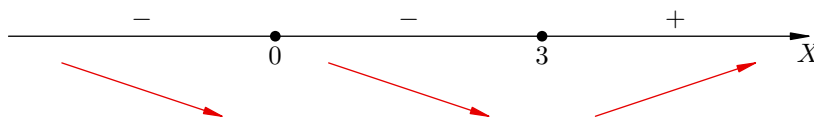


Рис. 16. Поведение функции $f(x) = x^4 - 4x^3$

При переходе через точку $x = 0$ производная не меняет знака: функция убывает как на промежутке $(-\infty, 0]$, так и на промежутке $[0, 3]$. Поэтому точка $x = 0$ является седловой точкой функции.

А вот при переходе через точку $x = 3$ производная меняет знак с $(-)$ на $(+)$. На промежутке $[3, +\infty)$ функция возрастает, а точка $x = 3$ служит точкой минимума. Значение в точке минимума: $f(3) = -27$.

Найдём точки пересечения с осью X :

$$x^4 - 4x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x - 4) = 0.$$

Значит, ось X пересекается в точках $x = 0$ (а это седловая точка) и $x = 4$. Остаётся построить график (рис. 17):

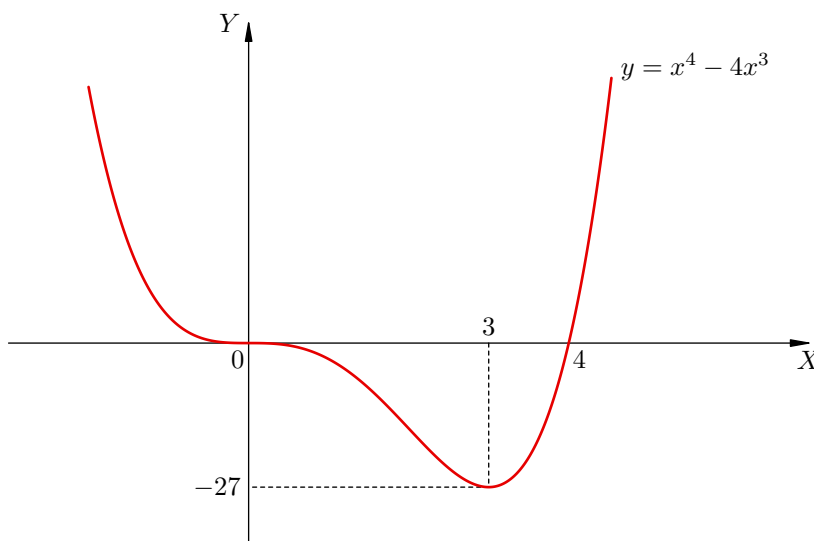


Рис. 17. График функции $f(x) = x^4 - 4x^3$

1.12 Экспонента и натуральный логарифм

Наряду с первым замечательным пределом (2) имеется *второй замечательный предел*:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} = e = 2,718281828459045 \dots \quad (23)$$

Возьмите калькулятор и убедитесь в этом сами. Вычисляйте последовательно:

$$1,1^{10}, \quad 1,01^{100}, \quad 1,001^{1000}, \quad \dots$$

Вы увидите, что значения таких выражений постепенно приближаются к числу (23), которое получило обозначение e в честь великого математика Леонарда Эйлера.

Число e иррационально, то есть является бесконечной непериодической десятичной дробью. Первые пятнадцать знаков после запятой запоминаются просто: сначала надо помнить 2,7, потом — два раза год рождения Льва Толстого, потом — углы равнобедренного прямоугольного треугольника :-)

Нам понадобится несколько иной вид второго замечательного предела. Укажем лишь неформальную идею его получения. Из (23) следует, что при малых t выражение $(1+t)^{1/t}$ близко к e ; значит, $1+t$ близко к e^t ; значит, $e^t - 1$ близко к t ; значит, $(e^t - 1)/t$ близко к 1. Таким образом,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1. \quad (24)$$

В школьной программе число e остаётся несколько в стороне, но при изучении высшей математики и физики вы увидите, сколь велика на самом деле его роль. Чем же число e так замечательно? Оказывается, производная функции e^x (которая называется *экспонентой*) равна самой этой функции:

$$(e^x)' = e^x. \quad (25)$$

Данную формулу получить нетрудно. Имеем:

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x,$$

поскольку последний предел есть не что иное, как второй замечательный предел (24).

Натуральный логарифм — это логарифм по основанию e . Для него имеется специальное обозначение \ln :

$$\ln x = \log_e x.$$

Производная экспоненты и правило дифференцирования сложной функции позволяют получить производную показательной функции a^x . Нужно воспользоваться тем, что $a = e^{\ln a}$:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = a^x \ln a.$$

Получили ещё одну табличную производную:

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

А чему равна производная натурального логарифма? Давайте воспользуемся следующим приёмом. Пусть $y = \ln x$. Выразим отсюда x :

$$x = e^y,$$

и продифференцируем по x обе части полученного равенства:

$$1 = e^y y'.$$

Отсюда

$$y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Итак,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Теперь оказывается возможным доказать давно выписанную формулу (13). Имеем:

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} (a \ln x)' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

2 Производная в физике

Переходя к физическим приложениям производной, мы будем использовать несколько иные обозначения — те, которые приняты в физике.

Во-первых, меняется обозначение функций. В самом деле, какие функции мы собираемся дифференцировать? Этими функциями служат физические величины, зависящие от времени. Например, координата тела $x(t)$ и его скорость $v(t)$ могут быть заданы формулами вроде таких:

$$x(t) = 1 + 12t - 3t^2, \quad (26)$$

$$v(t) = 12 - 6t. \quad (27)$$

Таким образом, аргументом функции теперь является время t , а буква x отныне обозначает функцию — координату точки.

Во-вторых, меняется обозначение производной. Штрих в физике зарезервирован для других целей, и вместо него мы используем точку над буквой:

$$\text{производная функции } x(t) \text{ обозначается } \dot{x}(t). \quad (28)$$

Имеется ещё одно обозначение производной, очень распространённое как в математике, так и в физике:

$$\text{производная функции } x(t) \text{ обозначается } \frac{dx}{dt} \quad (29)$$

(читается «дэ икс по дэ тэ»).

Остановимся подробнее на смысле обозначения (29). Математик понимает его двояко — либо как предел:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad (30)$$

либо как дробь, в знаменателе которой стоит приращение времени dt , а в числителе — так называемый *дифференциал* dx функции $x(t)$. Понятие дифференциала не сложно, но мы не будем его сейчас обсуждать; оно ждёт вас на первом курсе.

Физик, не скованный требованиями математической строгости, понимает обозначение (29) более неформально. Пусть dx есть изменение координаты за время dt . Возьмём интервал dt настолько маленьким, что отношение dx/dt близко к своему пределу (30) с устраивающей нас точностью.

И тогда, — скажет физик, — *производная координаты по времени есть попросту дробь, в числителе которой стоит достаточно малое изменение координаты dx , а в знаменателе — достаточно малый промежуток времени dt , в течение которого это изменение координаты произошло*. Такое нестрогое понимание производной характерно для рассуждений в физике. Далее мы будем придерживаться именно этого физического уровня строгости.

Давайте вернёмся к исходному примеру (26) и посчитаем производную координаты, а заодно посмотрим на совместное использование обозначений (28) и (29):

$$x(t) = 1 + 12t - 3t^2 \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(1 + 12t - 3t^2) = 12 - 6t.$$

(Символ дифференцирования $\frac{d}{dt}$ перед скобкой — это всё равно что штрих сверху за скобкой в прежних обозначениях.)

Обратите внимание, что вычисленная производная координаты оказалась равна скорости тела (27). Это не случайное совпадение, и нам нужно обсудить его более подробно.

2.1 Производная координаты

Прежде всего заметим, что скорость в (27) может быть как положительной, так и отрицательной. А именно, скорость положительна при $t < 2$, обращается в нуль при $t = 2$ и становится отрицательной при $t > 2$.

Как это понимать? Очень просто: мы имеем дело не с абсолютной величиной скорости, а с *проекцией* v_x вектора скорости на ось X . Поэтому вместо (27) правильнее было бы написать:

$$v_x = 12 - 6t. \quad (31)$$

Если вы забыли, что такое проекция вектора на ось, то прочитайте соответствующий раздел статьи «[Векторы в физике](#)». Здесь мы напомним лишь, что знак проекции v_x отражает связь направления скорости и направления оси X :

$$\begin{aligned} v_x > 0 &\Leftrightarrow \text{тело движется в направлении оси } X; \\ v_x < 0 &\Leftrightarrow \text{тело движется против оси } X. \end{aligned}$$

(Например, если $v_x = -3$ м/с, то это означает, что тело движется со скоростью 3 м/с в сторону, противоположную оси X .)

Поэтому в нашем примере (31) мы имеем следующую картину движения: при $t < 2$ тело движется в положительном направлении оси X и постепенно замедляется; при $t = 2$ тело останавливается; при $t > 2$ тело, разгоняясь, движется в отрицательном направлении оси X .

Допустим, что скорость тела по абсолютной величине равна v . Возможны два случая направления движения.

1. Если тело движется в положительном направлении оси X , то малое изменение координаты dx положительно и равно пути, пройденному телом за время dt . Поэтому

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v.$$

2. Если тело движется в отрицательном направлении оси X , то $dx < 0$. Путь за время dt равен $-dx$, поэтому $-dx/dt = v$ или

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -v.$$

Заметим теперь, что в первом случае $v_x = v$, а во втором случае $v_x = -v$. Тем самым оба случая объединяются в одну формулу:

$$\dot{x} = v_x, \quad (32)$$

и мы приходим к важнейшему факту: *производная координаты тела равна проекции скорости тела на данную ось.*

Легко видеть, что работает признак возрастания (убывания) функции. А именно:

$$\begin{aligned} \dot{x} > 0 &\Rightarrow v_x > 0 \Rightarrow \text{тело движется в направлении оси } X \Rightarrow \text{координата } x \text{ увеличивается;} \\ \dot{x} < 0 &\Rightarrow v_x < 0 \Rightarrow \text{тело движется против оси } X \Rightarrow \text{координата } x \text{ уменьшается.} \end{aligned}$$

2.2 Ускорение

Скорость тела характеризует быстроту изменения его координаты. Но скорость также может меняться — медленнее или быстрее. Характеристикой быстроты изменения скорости служит физическая величина, называемая *ускорением*.

Пусть, например, скорость автомобиля при равномерном разгоне увеличилась с $v_0 = 2$ м/с до $v = 14$ м/с за время $t = 3$ с. Ускорение автомобиля вычисляется по формуле:

$$a = \frac{v - v_0}{t}, \quad (33)$$

и в данном случае оказывается равно:

$$a = \frac{14 - 2}{3} = 4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Таким образом, за одну секунду скорость автомобиля увеличивается на 4 м/с.

А чему равно ускорение, если скорость, наоборот, уменьшилась с $v_0 = 14$ м/с до $v = 2$ м/с за то же время $t = 3$ с? Тогда по формуле (33) получаем:

$$a = \frac{2 - 14}{3} = -4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

За одну секунду, как видим, скорость уменьшается на 4 м/с.

Можно ли говорить об ускорении, если скорость меняется неравномерно? Конечно, можно, но только это будет *мгновенное* ускорение, которое также зависит от времени. Схема рассуждений вам уже хорошо знакома: в формуле (33) вместо промежутка времени t берём малый промежуток dt , вместо разности $v - v_0$ берём приращение dv скорости за время dt , и в результате получаем:

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}. \quad (34)$$

Таким образом, получается, что ускорение — это производная скорости.

Формула (34), однако, не описывает все ситуации, которые возникают в механике. Например, при равномерном движении по окружности скорость тела не меняется по модулю, и в соответствии с (34) мы должны были бы получить $a = \dot{v} = 0$. Но вы прекрасно знаете, что ускорение у тела имеется, оно направлено к центру окружности и называется центростремительным. Поэтому формула (34) нуждается в некоторой модификации.

Связана эта модификация с тем, что ускорение на самом деле является *вектором*. Оказывается, *вектор ускорения показывает направление изменения скорости тела*. Что это означает, мы сейчас выясним на простых примерах.

Пусть тело движется вдоль оси X . Давайте рассмотрим два случая направления ускорения: по оси X и против оси X соответственно.

1. Вектор ускорения \vec{a} сонаправлен с осью X (рис. 18). Проекция ускорения на ось X положительна: $a_x > 0$.

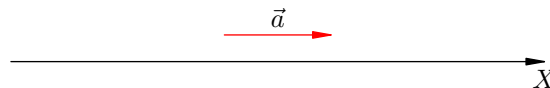


Рис. 18. $a_x > 0$

В данном случае скорость изменяется в положительном направлении оси X . А именно:

- Если тело движется вправо ($v_x > 0$), то оно разгоняется: скорость тела по модулю увеличивается. Проекция скорости v_x при этом также увеличивается.
- Если тело движется влево ($v_x < 0$), то оно тормозит: скорость тела по модулю уменьшается. Но обратите внимание, что проекция скорости v_x , будучи отрицательной, при этом увеличивается.

Таким образом, если $a_x > 0$, то проекция скорости v_x возрастает вне зависимости от того, в каком направлении движется тело.

2. Вектор ускорения \vec{a} направлен противоположно оси X (рис. 19). Проекция ускорения на ось X отрицательна: $a_x < 0$.

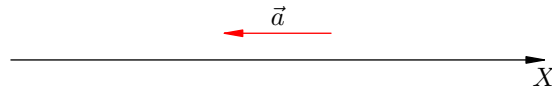


Рис. 19. $a_x < 0$

В данном случае скорость изменяется в отрицательном направлении оси X . А именно:

- Если тело движется вправо ($v_x > 0$), то оно тормозит: скорость тела по модулю уменьшается. Проекция скорости v_x при этом также уменьшается.
- Если тело движется влево ($v_x < 0$), то оно разгоняется: скорость тела по модулю увеличивается. Но проекция скорости v_x , будучи отрицательной, при этом уменьшается.

Таким образом, если $a_x < 0$, то проекция скорости v_x убывает, и опять-таки вне зависимости от того, в каком направлении движется тело.

Обнаруженная в этих примерах связь знака проекции ускорения a_x с возрастанием (убыванием) проекции скорости v_x приводит нас к нужной модификации формулы (34):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x. \quad (35)$$

Проекция ускорения a_x является производной проекции скорости v_x . Вспомним, что v_x в свою очередь является производной координаты x . Поэтому проекция ускорения a_x — это вторая производная координаты x :

$$a_x = \ddot{x}. \quad (36)$$

Пример. Ещё раз вернёмся к примеру (26):

$$x = 1 + 12t - 3t^2$$

(координата измеряется в метрах, время — в секундах). Последовательно дифференцируя два раза, получаем:

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= 12 - 6t, \\ a_x = \dot{v}_x &= -6. \end{aligned}$$

Как видим, ускорение постоянно по модулю и равно 6 м/с^2 . Направлено ускорение в сторону, противоположную оси X .

Приведённый пример есть случай *равноускоренного* движения, при котором модуль и направление ускорения неизменны (или, короче говоря, $\vec{a} = \text{const}$). Равноускоренное движение — один из важнейших и часто встречающихся видов движения в механике.

Из данного примера нетрудно понять, что при равноускоренном движении проекция скорости является линейной функцией времени, а координата — квадратичной функцией.

Пример. Рассмотрим более экзотический случай:

$$x = 2 + 3t - 4t^2 + 5t^3.$$

Дифференцируем:

$$\begin{aligned}v_x &= \dot{x} = 3 - 8t + 15t^2, \\a_x &= \dot{v}_x = -8 + 30t.\end{aligned}$$

Данное движение не является равноускоренным: ускорение зависит от времени.

Пример. Пусть тело движется вдоль оси X по следующему закону:

$$x = 5 \sin 2t.$$

Мы видим, что координата тела периодически изменяется, находясь в пределах от -5 до 5 . Данное движение является примером *гармонических колебаний*, когда координата меняется со временем по закону синуса.

Дифференцируем дважды:

$$\begin{aligned}v_x &= \dot{x} = 5 \cos 2t \cdot 2 = 10 \cos 2t, \\a_x &= \dot{v}_x = -20 \sin 2t.\end{aligned}$$

Проекция скорости меняется по закону косинуса, а проекция ускорения — снова по закону синуса.

2.3 Дифференцирование векторов

Формулы (32) и (35) на самом деле являются частными случаями более общих соотношений, в которых производная берётся от векторов. Мы скоро напишем эти соотношения, но сначала нам нужно понять, что такое производная векторной величины.

Предположим, что имеется некоторый вектор $\vec{u}(t)$, зависящий от времени. Это означает, что длина данного вектора или его направление могут меняться с течением времени.

По аналогии с обычной (скалярной) функцией вводится понятие изменения вектора. *Изменение вектора \vec{u} за время Δt* есть векторная величина:

$$\Delta \vec{u} = \vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t).$$

Обратите внимание, что в правой части данного соотношения стоит разность векторов. Изменение вектора \vec{u} показано на рис. 20.

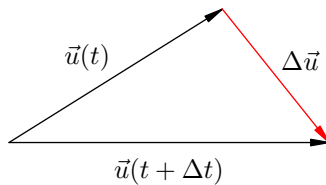


Рис. 20. Изменение вектора

Если промежуток времени Δt достаточно мал, то и вектор \vec{u} за это время меняется мало (в физике, по крайней мере, так считается всегда). Если при $\Delta t \rightarrow 0$ отношение $\Delta \vec{u} / \Delta t$ стремится к некоторому пределу, то этот предел называется *производной вектора \vec{u}* :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t}. \quad (37)$$

При обозначении производной вектора мы не будем использовать точку сверху, так как символ $\dot{\vec{u}}$ не слишком хорошо смотрится; соответственно, ограничиваемся обозначением (37). Но для производной скаляра мы, разумеется, свободно используем оба обозначения.

Напомним, что $d\vec{u}/dt$ — это *символ* производной. Его можно понимать и как дробь, в числителе которой стоит *дифференциал* вектора \vec{u} , соответствующий промежутку времени dt . В общей статье о производной мы не стали обсуждать понятие дифференциала, так как в школе его не проходят; не будем обсуждать дифференциал и здесь.

Однако на физическом уровне строгости производную $d\vec{u}/dt$ можно считать дробью, в знаменателе которой стоит очень малый интервал времени dt , а в числителе — соответствующее малое изменение $d\vec{u}$ вектора \vec{u} . При достаточно малом dt величина данной дроби отличается от предела в правой части (37) столь мало, что с учётом имеющейся точности измерений этим отличием можно пренебречь.

Мы будем рассматривать векторы на плоскости, в которой введена система координат OXY . Именно такая ситуация характерна для многих задач школьной механики: выписав второй закон Ньютона в векторной форме, мы выбираем две оси и затем переходим к проекциям векторов на эти оси.

Как вам известно из раздела 6.1 статьи «Векторы в физике», вектор \vec{u} на плоскости единственным образом раскладывается по базису единичных векторов \vec{i} , \vec{j} прямоугольной декартовой системы координат OXY :

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j}.$$

Здесь u_x и u_y — проекции вектора \vec{u} на координатные оси, они же — координаты вектора \vec{u} в данном базисе (рис. 21).

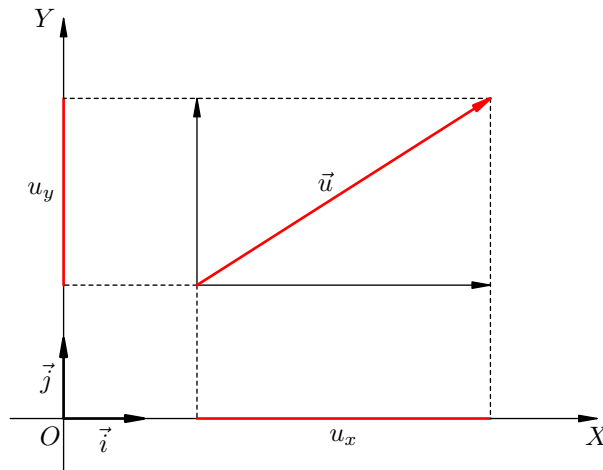


Рис. 21. $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j}$

Вектор \vec{u} в нашем случае зависит от времени, а это значит, что его координаты u_x и u_y являются функциями времени:

$$\vec{u}(t) = u_x(t) \vec{i} + u_y(t) \vec{j}.$$

В момент времени $t + \Delta t$ имеем соответственно:

$$\vec{u}(t + \Delta t) = u_x(t + \Delta t) \vec{i} + u_y(t + \Delta t) \vec{j}.$$

Изменение вектора \vec{u} тогда равно:

$$\Delta \vec{u} = \vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t) = (u_x(t + \Delta t) - u_x(t)) \vec{i} + (u_y(t + \Delta t) - u_y(t)) \vec{j} = \Delta u_x \cdot \vec{i} + \Delta u_y \cdot \vec{j}.$$

Имеем, соответственно:

$$\frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{\Delta u_x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta u_y}{\Delta t} \vec{j}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, для производной вектора \vec{u} получаем:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{u}_x \vec{i} + \dot{u}_y \vec{j}. \quad (38)$$

Таким образом, если вектор \vec{u} имеет координаты (u_x, u_y) , то координаты производной $d\vec{u}/dt$ являются производными координат вектора \vec{u} , а именно — (\dot{u}_x, \dot{u}_y) .

2.4 Производная радиус-вектора

Предположим, что точка M движется на координатной плоскости OXY (рис. 22). Синяя дуга — это *траектория* точки M , то есть кривая, которую точка описывает в процессе своего движения.

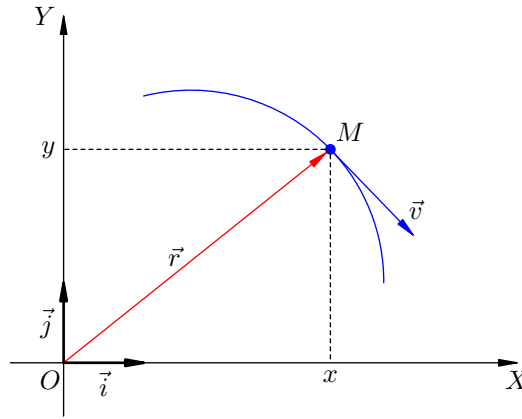


Рис. 22. $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

Радиус-вектор точки M — это вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, началом которого служит начало координат, а концом — точка M . Радиус-вектор постоянно указывает на данную точку и как бы «отслеживает» её движение.

Таким образом, радиус-вектор движущейся точки — это вектор, зависящий от времени. Поэтому резонно спросить, чему равна производная радиус-вектора.

Координаты точки M обозначим через x и y . Соответственно, радиус-вектор \vec{r} также имеет координаты (x, y) , и мы можем написать:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Теперь используем формулу (38):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}.$$

Как мы уже знаем, $\dot{x} = v_x$ и аналогично $\dot{y} = v_y$. Следовательно:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}.$$

В правой части полученной формулы стоит вектор \vec{v} скорости точки M . Итак:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}. \quad (39)$$

Мы получили важный результат: *производная радиус-вектора точки — это вектор её скорости*.

Можно показать, что *скорость движущейся точки всегда направлена по касательной к траектории*. В школьной физике этот факт принимается без доказательства. Мы впоследствии докажем его для одного частного случая — равномерного движения по окружности.

2.5 Производная вектора скорости

Давайте посмотрим теперь, чему равна производная вектора \vec{v} . Пишем:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j},$$

и снова используем формулу (38):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}_x \vec{i} + \dot{v}_y \vec{j}.$$

Мы знаем, что $\dot{v}_x = a_x$ и аналогично $\dot{v}_y = a_y$. Поэтому имеем:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}.$$

В правой части получился вектор \vec{a} ускорения точки M :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}. \quad (40)$$

Итак, *производная вектора скорости точки — это вектор её ускорения.*

Обратите внимание, что формулы (39) и (40) уже не содержат упоминаний о координатах. Это чисто векторные соотношения; они *инвариантны* в том смысле, что выполняются сами по себе, безотносительно к какой-либо конкретной системе координат.

Более того, эти формулы справедливы не только на плоскости, но и в пространстве. Доказать это можно тем же способом, каким мы действовали на плоскости, а именно — ввести систему координат. Выкладки окажутся полностью аналогичными (добавится лишь третье слагаемое, отвечающее z -координате).

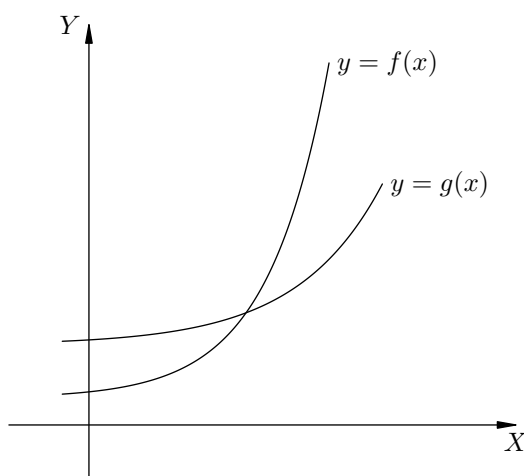
Статья написана в соавторстве с А. Г. Малковой

Геометрический смысл производной

Большинство школьных учебников даёт определение производной через определение предела. А определения предела не даётся вообще. Поэтому школьники в лучшем случае помнят таблицу производных и правила нахождения производной, но смутно представляют, что же именно они ищут.

Цель статьи — доступно объяснить, что такое производная и как её применять. Наше изложение неформально, ни о какой строгости сейчас не может быть и речи. Черёд строгого изложения придёт на первом курсе при изучении математического анализа.

Начнём с простого вопроса. Нарисуем графики двух функций $f(x)$ и $g(x)$.

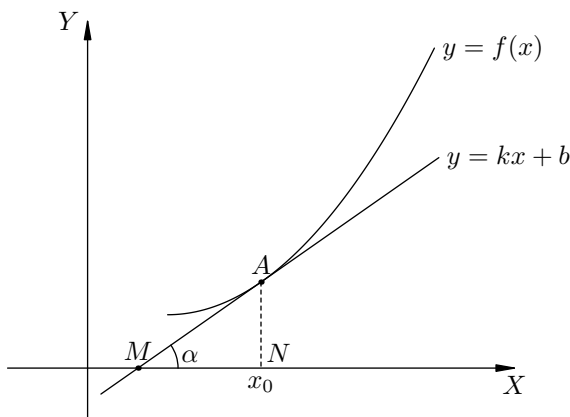


Спрашивается: какая из них быстрее растёт? Ответ очевиден: конечно, $f(x)$. Скорость изменения функции $f(x)$ больше.

Скорость изменения функции и называется производной этой функции. У функции $f(x)$ производная больше.

Хорошо, но как мы оценивали производную? Мы смотрели, насколько круто идет вверх график функции, то есть насколько быстро меняется y при изменении x . Очевидно, что одна и та же функция в разных точках может меняться быстрее или медленнее — то есть иметь разные значения производной.

Покажем, как найти производную с помощью графика функции.



Возьмём на графике $y = f(x)$ точку A с абсциссой x_0 . Проведём в точке A касательную к графику функции¹. Нам надо оценить, насколько быстро растёт функция, то есть насколько быстро идет вверх её график. Удобная величина для этого — тангенс угла наклона касательной к графику функции.

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к графику $y = f(x)$, проведённой в точке A с абсциссой x_0 :

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Поскольку тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего катета к прилежащему, из прямоугольного треугольника AMN находим:

$$f'(x_0) = \frac{AN}{MN}.$$

Мы смогли найти производную без всяких таблиц, пользуясь только графиком функции!

Есть ещё одно важное соотношение. Вспомним, что в уравнении прямой $y = kx + b$ угловой коэффициент k показывает, насколько круто идёт прямая по отношению к оси X . Численно коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой: $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Таким образом, производная функции в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции, проведённой в точке A с абсциссой x_0 :

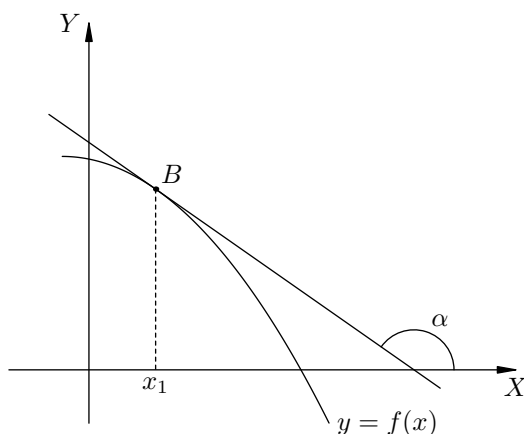
$$f'(x_0) = k.$$

Обратим внимание, что угол α мы измеряем между касательной к графику и *положительным направлением* оси X . При этом $\alpha \in [0, \pi)$.

Если функция возрастает (как, например, вблизи точки A), то касательная образует *острый* угол α с положительным направлением оси X . Тангенс острого угла положителен. Следовательно, *если функция возрастает, то её производная положительна*.

Так, в нашем примере будет $f'(x_0) > 0$.

А если функция убывает?



Касательная к графику, проведённая в точке B с абсциссой x_1 , образует *тупой* угол α с положительным направлением оси X . Тангенс тупого угла отрицателен. Значит, *если функция убывает, её производная отрицательна*: $f'(x_1) < 0$.

Верны и обратные утверждения:

- если производная функции положительна на некотором промежутке, то функция возрастает на данном промежутке;

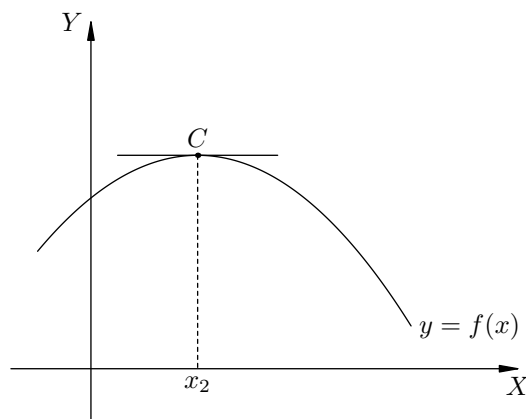
¹Мы предполагаем, что касательную провести *можно*. Такое, однако, бывает не всегда — см. далее.

- если производная функции отрицательна на некотором промежутке, то функция убывает на данном промежутке.

Особый интерес представляют точки, в которых производная обращается в нуль. Они называются *стационарными точками* функции.

Стационарные точки могут быть трёх видов.

1. *Точка максимума.*

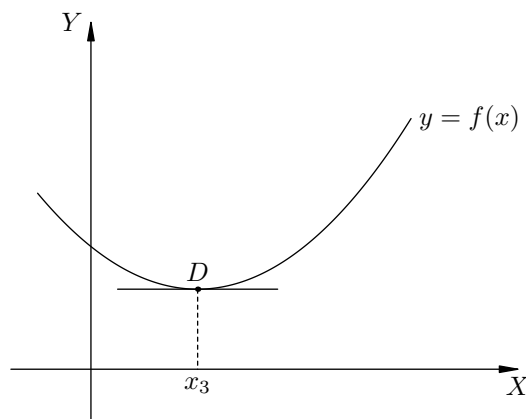


Касательная в точке C горизонтальна, т. е. образует нулевой угол с осью X . Поэтому $f'(x_2) = 0$.

При переходе через точку x_2 возрастание функции сменяется убыванием. Иными словами, производная меняет знак с $(+)$ на $(-)$.

Точка x_2 является *точкой максимума*: значение функции в точке x_2 больше, чем во всех достаточно близких к ней точках.

2. *Точка минимума.*



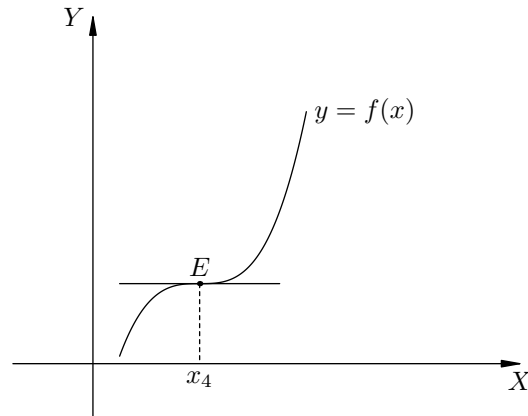
Касательная в точке D также горизонтальна. Поэтому $f'(x_3) = 0$.

При переходе через точку x_3 убывание функции сменяется возрастанием, т. е. производная меняет знак с $(-)$ на $(+)$.

Точка x_3 является *точкой минимума*: значение функции в точке x_3 меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках.

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*.

3. Седловая точка.



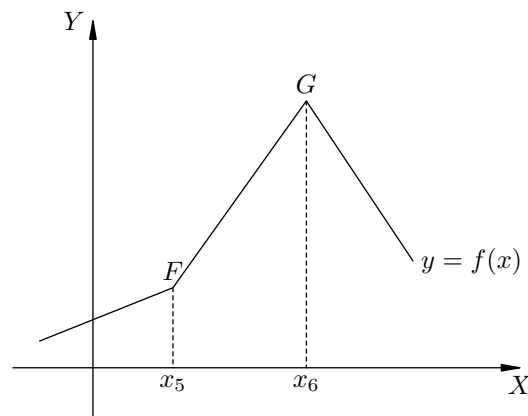
Касательная в точке E горизонтальна, $f'(x_4) = 0$.

При переходе через точку x_4 смены тенденции не происходит: функция как возрастала, так и продолжает возрастать. Производная не меняет своего знака.

Стационарная точка, не являющаяся точкой экстремума, называется *седловой точкой*. Точка x_4 — седловая точка.

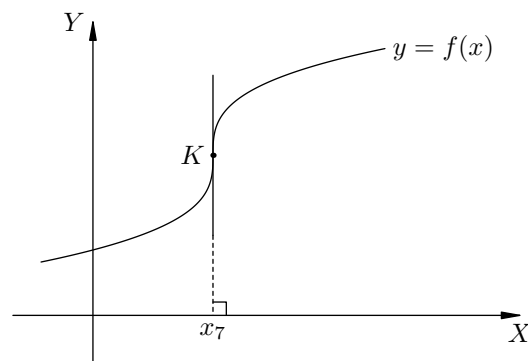
Возможны ситуации, когда производная в данной точке не существует.

Такое может случиться, например, когда на графике функции имеется излом. В точке излома касательную провести нельзя.



На данном графике в точках F и G касательная не существует. Следовательно, не существует и производная в точках x_5 и x_6 .

Но производная может не существовать даже в том случае, когда существует касательная! Вспомните, ведь производная — это тангенс угла наклона касательной. И если касательная образует с осью X угол 90° , то тангенс не существует.



В случае, изображённом на рисунке, производная в точке x_7 не существует.

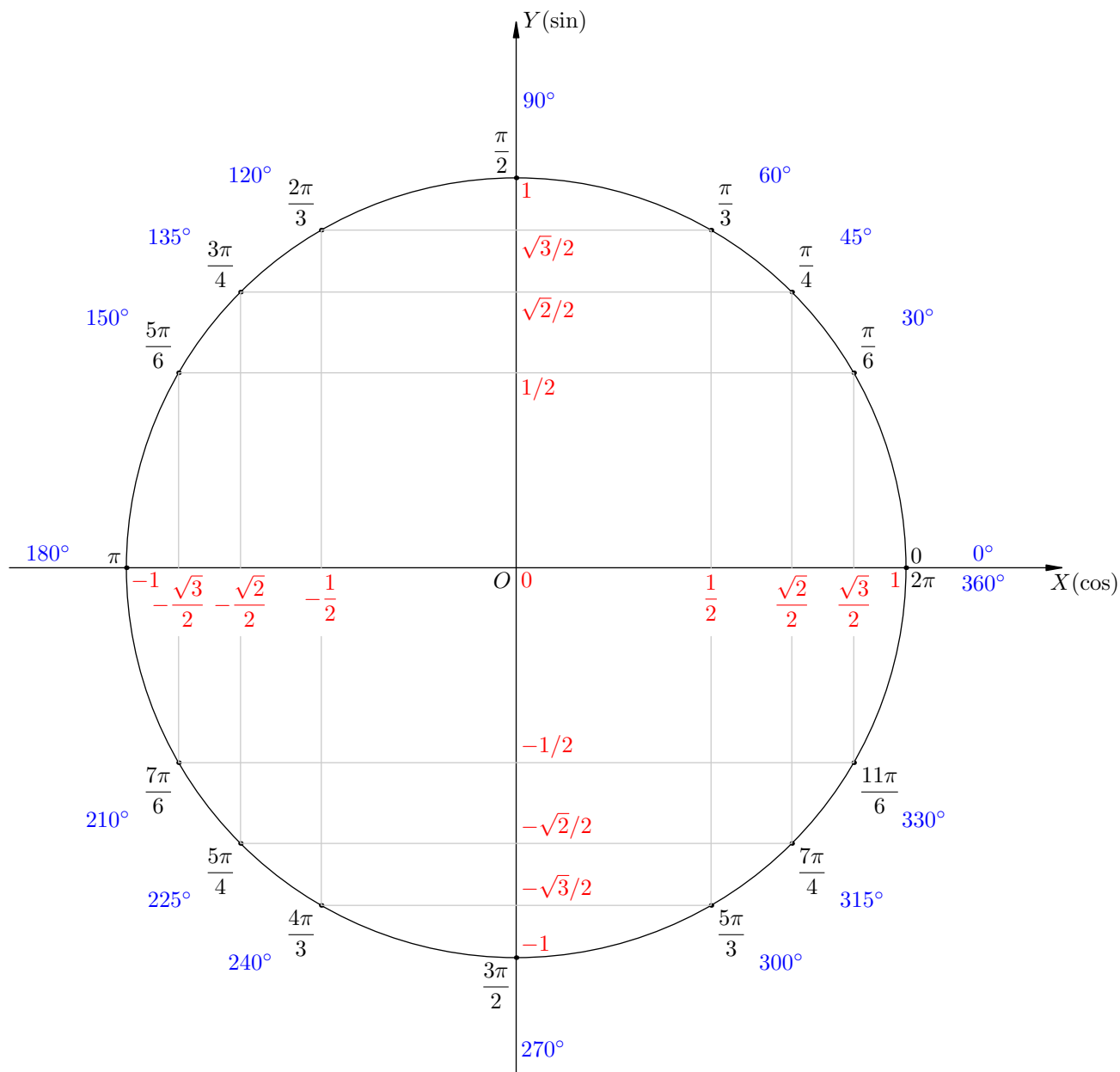
Стационарные точки (типа x_2, x_3, x_4), а также точки типа x_5, x_6, x_7 называются *критическими точками*.

Критическая точка функции — это внутренняя точка области определения, в которой производная равна нулю или не существует.

Случаи, когда производная не существует, могут встретиться в части С заданий ЕГЭ. Но в части В задачи стандартные: во всех нужных точках производная существует. Тогда связь поведения функции со значениями её производной иллюстрируется следующей таблицей.

$f(x)$	возрастает	точка максимума	убывает	точка минимума	возрастает
$f'(x)$	+	0	—	0	+

Тригонометрический круг



Статья написана в соавторстве с А. Г. Малковой

Тригонометрические формулы

Из-за чего происходит досадная потеря баллов на ЕГЭ по математике? Из-за невнимательности и вычислительных ошибок. Из-за плохого почерка, в котором эксперт не смог разобраться. А ещё из-за того, что *лень было выучить формулы*.

Тригонометрические формулы необходимы даже для решения задач части В вариантов ЕГЭ. А уж в части С без них вообще никуда.

Как правило, школьники помнят основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. А про остальные формулы говорят: «Зачем их учить, у меня шпаргалка в телефоне есть!»

Забудьте об этом. Во-первых, использование на ЕГЭ шпаргалок и мобильных телефонов, мягко говоря, не приветствуется. Кончиться может печально — удалением с экзамена. Оно вам надо?

Во-вторых, большинство сборников формул в мобильниках, которые мы видели, содержат дикие ошибки.

А в третьих... Представьте, что вы в незнакомой стране и вам надо объясниться с её жителями, по возможности быстро. И вы знаете только одно слово, зато у вас с собой мобильник (который нельзя доставать), а в нём словарь (который содержит ошибки). В таком же положении оказывается и школьник, у которого в активном запасе одна формула, а всё остальное — где-то там, в шпаргалке, и всё это в волнительной обстановке экзамена!

Итак, одной формулы мало. Зато шпаргалки по тригонометрии содержат иногда больше ста формул. Неужели их все надо выучить?

Нет, конечно. Необходимых формул не так уж и много. Все они — здесь.

Тангенс и котангенс

Не сомневаемся, что вы это помните, но всё же... Определения тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Эти две функции связаны очевидным соотношением:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Основное тригонометрическое тождество и следствия из него

Итак, ещё раз основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (1)$$

Разделив обе части на $\cos^2 \alpha$, получим:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \quad (2)$$

Аналогично, разделив обе части (1) на $\sin^2 \alpha$, получим:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad (3)$$

Это первые три необходимых формулы.

Функции суммы и разности двух аргументов

Следующие четыре формулы составляют фундамент тригонометрии.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad (4)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \quad (5)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (6)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (7)$$

Обратите внимание: синус сохраняет знак и перемешивает функции, а косинус меняет знак и не перемешивает функции :-)

Функции двойного аргумента

Возьмём формулу (4) синуса суммы и положим в ней $\beta = \alpha$:

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha.$$

Получим формулу синуса двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (8)$$

Аналогично, полагаем $\beta = \alpha$ в формуле (6) косинуса суммы:

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha.$$

Получаем формулу косинуса двойного угла:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \quad (9)$$

Эта формула считается основной, но применяется не часто. Гораздо популярнее две других формулы, которые получаются из неё с помощью основного тригонометрического тождества.

Так, из (1) выражаем $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ и подставляем в (9). Получаем:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1. \quad (10)$$

Теперь из (1) выразим $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ и подставим в (9). Получим:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha. \quad (11)$$

Вот эти две формулы, (10) и (11), куда более употребительны.

Итак, формулы синуса и косинуса двойного угла мы получили из формул синуса и косинуса суммы. Вопрос: а что мы получим, положив $\beta = \alpha$ в формуле (7) косинуса разности? ;-)

Формулы понижения степени

Это те же формулы косинуса двойного угла, но записанные в ином виде. Выразим $\cos^2 \alpha$ из формулы (10):

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}. \quad (12)$$

А теперь выразим $\sin^2 \alpha$ из формулы (11):

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}. \quad (13)$$

Выражения (12) и (13) как раз и называются *формулами понижения степени*. Смысл названия ясен: они позволяют переходить от второй степени тригонометрической функции к первой.

Вот и все тригонометрические формулы, необходимые для решения задач части В из банка заданий ЕГЭ.

Задачи части С намного сложнее, и формул нужно знать больше.

Преобразование суммы и разности в произведение

Ещё одна важная четвёрка формул:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (14)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad (15)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (16)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}. \quad (17)$$

Чаще всего ошибаются в последней формуле. Запомните: «Разность косинусов — это два синус полусуммы на синус *обратной* полуразности».

И снова обратите внимание, что синус сохраняет знак и перемешивает функции, а косинус меняет знак и не перемешивает функции. Видите, каким образом?

Преобразование произведения в сумму или разность

Речь идёт о следующих формулах:

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta), \quad (18)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta), \quad (19)$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta). \quad (20)$$

Они легко проверяются справа налево с помощью преобразования суммы или разности в произведение (или, что вернее с логической точки зрения, с помощью формул (4)–(7)).

Формулы (18)–(20) — постоянная головная боль для школьников. Как их усвоить? Самая простая рекомендация — выучить раз и навсегда. Но есть и неформальные методы безошибочного превращения произведений в сумму/разность. Какие? На занятиях расскажем ;-)

Тангенс суммы, разности и двойного угла

Имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Теперь разделим числитель и знаменатель на $\cos \alpha \cos \beta$ и получим формулу тангенса суммы:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (21)$$

Аналогично получается формула тангенса разности:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (22)$$

Положив $\beta = \alpha$ в (21), приходим к формуле тангенса двойного угла:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (23)$$

Формулы тройного угла

Начинаем:

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \dots$$

Дальше — сами! Раскрываем синус суммы, пользуемся формулами двойного угла и — получаем синус тройного угла:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha. \quad (24)$$

Аналогично выводим формулу косинуса тройного угла:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \quad (25)$$

Универсальная подстановка

Так называются формулы, выражающие синус и косинус через одну и ту же функцию — тангенс половинного аргумента:

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (26)$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (27)$$

Обе формулы несложно доказываются справа налево. Попробуйте это сделать самостоятельно.

Как учить формулы по тригонометрии? Так же, как слова иностранного языка: понемногу, но часто. Берёте две-три формулы из списка. Если вы готовитесь самостоятельно — подбираете для себя задачи на преобразование тригонометрических выражений и уравнения, в которых эти формулы применяются.

Некоторые школьники развешивают формулы по квартире: на холодильник, на зеркало, на дверь туалета изнутри :-)

Есть и универсальный способ: ежедневно, садясь за уроки, берите чистый листок и выписывайте наизусть все тригонометрические формулы, какие помните. Когда всё готово — сверяете. Конечно, это требует определённой силы характера, как любая тренировка. Зато успех на ЕГЭ обеспечен.

Статья написана в соавторстве с А. Г. Малковой

Простейшие тригонометрические уравнения. 1

Простейшими называются тригонометрические уравнения следующих четырёх видов:

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = a, \quad \operatorname{ctg} x = a.$$

Любое тригонометрическое уравнение в конечном счёте сводится к решению одного или нескольких простейших. К сожалению, на этом заключительном стандартном шаге школьники допускают множество элементарных ошибок. Цель данной статьи — уберечь вас от нелепых и досадных потерь баллов в подобной ситуации на едином госэкзамене.

Существуют два подхода к решению простейших тригонометрических уравнений.

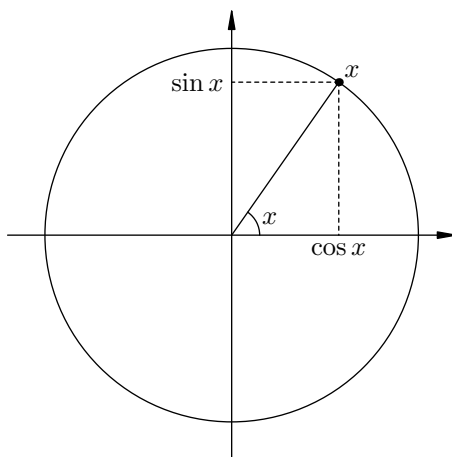
Первый подход — бессмысленный и тяжёлый. Надо выучить по шпаргалке общие формулы, а также все частные случаи. Польза от этого столь же невелика, как от зубрёжки шестнадцати строк заклинаний на непонятном языке. Мы забраковываем этот подход раз и навсегда.

Второй подход — логический и наглядный. Для решения простейших тригонометрических уравнений мы пользуемся тригонометрическим кругом и определениями тригонометрических функций.

Данный подход требует понимания, осмысленных действий и ясного видения тригонометрического круга. Не беспокойтесь, эти трудности преодолеваются быстро. Усилия, потраченные на этом пути, будут щедро вознаграждены: вы начнёте безошибочно решать тригонометрические уравнения.

Уравнения $\cos x = a$ и $\sin x = a$

Напомним, что $\cos x$ — абсцисса точки на единичной окружности, соответствующей углу x , а $\sin x$ — её ордината.

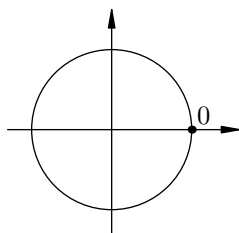


Из определения синуса и косинуса следует, что уравнения $\cos x = a$ и $\sin x = a$ имеют решения только при условии $|a| \leq 1$. Абитуриент, будь внимателен! Уравнения $\sin x = 3/2$ или $\cos x = -7$ решений не имеют!

Начнём с самых простых уравнений.

1. $\cos x = 1$.

Мы видим, что на единичной окружности имеется лишь одна точка с абсциссой 1:



Эта точка соответствует бесконечному множеству углов: $0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, 6\pi, -6\pi, \dots$. Все они получаются из нулевого угла прибавлением целого числа полных углов 2π (т. е. нескольких полных оборотов как в одну, так и в другую сторону).

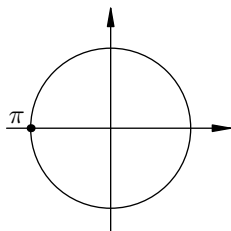
Следовательно, все эти углы могут быть записаны одной формулой:

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Это и есть множество решений данного уравнения. Напоминаем, что \mathbb{Z} — это множество целых чисел.

2. $\cos x = -1$.

Снова видим, что на единичной окружности есть лишь одна точка с абсциссой -1 :

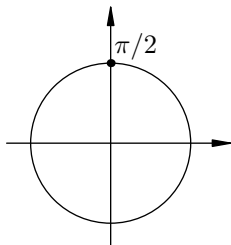


Эта точка соответствует углу π и всем углам, отличающимся от π на несколько полных оборотов в обе стороны, т. е. на целое число полных углов. Следовательно, все решения данного уравнения записываются формулой:

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

3. $\sin x = 1$.

Отмечаем на тригонометрическом круге единственную точку с ординатой 1:

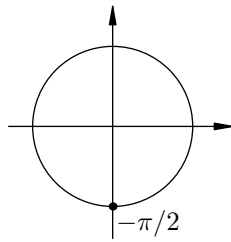


И записываем ответ:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

4. $\sin x = -1$.

Обсуждать тут уже нечего, не так ли? :-)



$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Можете, кстати, записать ответ и в другом виде:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

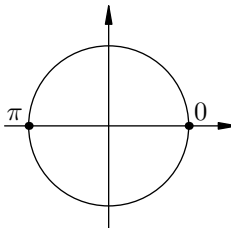
Это — дело исключительно вашего вкуса.

Заодно сделаем первое полезное наблюдение.

Чтобы описать множество углов, отвечающих одной-единственной точке тригонометрического круга, нужно взять какой-либо один угол из этого множества и прибавить $2\pi n$.

5. $\sin x = 0$.

На тригонометрическом круге имеются две точки с ординатой 0:



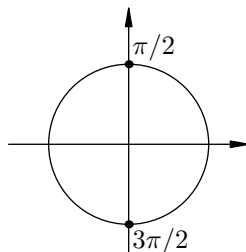
Эти точки соответствуют углам $0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$ Все эти углы получаются из нулевого угла прибавлением целого числа углов π (т. е. с помощью нескольких полуоборотов в обе стороны). Таким образом,

$$x = \pi n, n \in Z.$$

Точки, лежащие на концах диаметра тригонометрического круга, мы будем называть *диаметральной парой*.

6. $\cos x = 0$.

Точки с абсциссой 0 также образуют диаметрально пару, на сей раз вертикальную:



Все углы, отвечающие этим точкам, получаются из $\pi/2$ прибавлением целого числа углов π (полуоборотов):

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

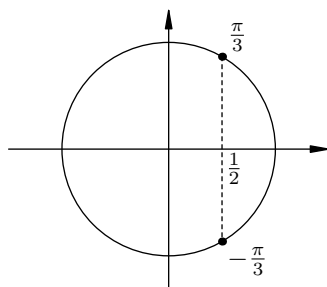
Теперь мы можем сделать и второе полезное наблюдение.

Чтобы описать множество углов, отвечающих диаметральной паре точек тригонометрического круга, нужно взять какой-либо один угол из этого множества и прибавить π .

Переходим к следующему этапу. Теперь в правой части будет стоять табличное значение синуса или косинуса (отличное от 0 или ± 1). Начинаем с косинуса.

7. $\cos x = \frac{1}{2}$.

Имеем вертикальную пару точек с абсциссой $1/2$:



Все углы, соответствующие верхней точке, описываются формулой (вспомните первое полезное наблюдение!):

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Аналогично, все углы, соответствующие нижней точке, описываются формулой:

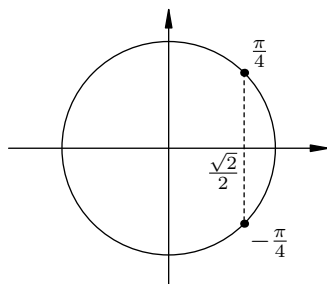
$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Обе серии решений можно описать одной формулой:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

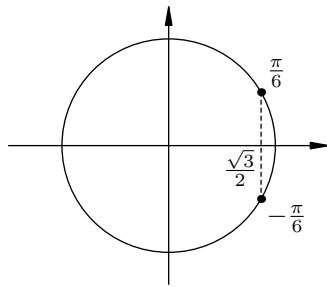
Остальные уравнения с косинусом решаются совершенно аналогично. Мы приводим лишь рисунок и ответ.

8. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



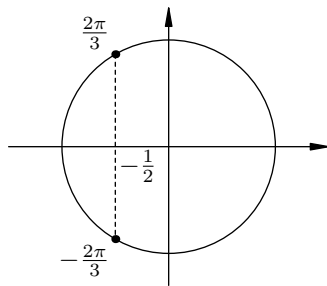
$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

9. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



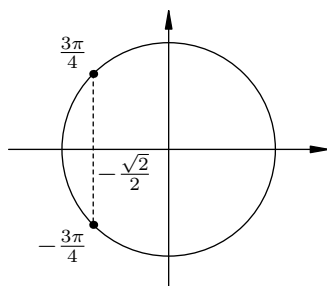
$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

10. $\cos x = -\frac{1}{2}$.



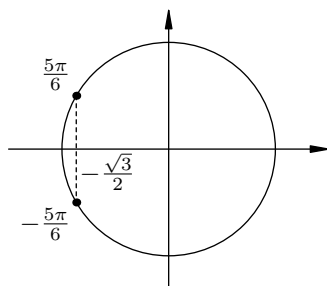
$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

11. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

12. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

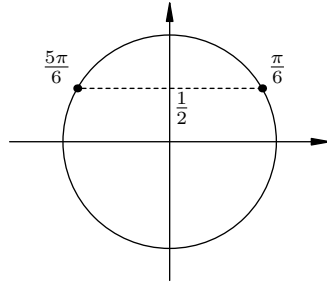


$$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Теперь рассмотрим уравнения с синусом. Тут ситуация немного сложнее.

13. $\sin x = \frac{1}{2}$.

Имеем горизонтальную пару точек с ординатой $1/2$:



Углы, отвечающие правой точке:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Углы, отвечающие левой точке:

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Описывать эти две серии одной формулой никто не заставляет. Можно записать ответ в таком виде:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тем не менее, объединяющая формула существует, и её надо знать. Выглядит она так:

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

На первый взгляд совершенно не ясно, каким образом она даёт обе серии решений. Но давайте посмотрим, что получается при чётных k . Если $k = 2n$, то

$$x = (-1)^{2n} \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 2n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n.$$

Мы получили первую серию решений x_1 . А если k нечётно, $k = 2n + 1$, то

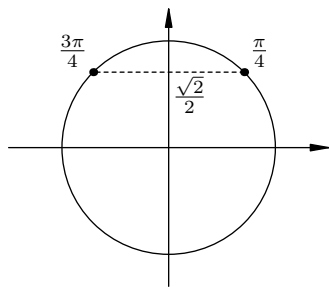
$$x = (-1)^{2n+1} \frac{\pi}{6} + \pi(2n + 1) = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n + \pi = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

Это вторая серия x_2 .

Обратим внимание, что в качестве множителя при $(-1)^k$ обычно ставится правая точка, в данном случае $\pi/6$.

Остальные уравнения с синусом решаются точно так же. Мы приводим рисунок, запись ответа в виде совокупности двух серий и объединяющую формулу.

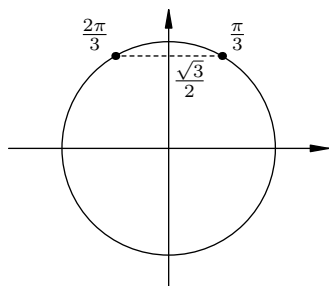
14. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

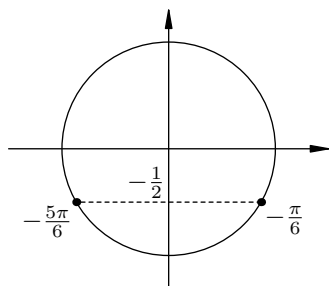
15. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

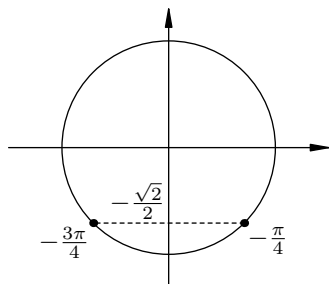
16. $\sin x = -\frac{1}{2}$.



$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

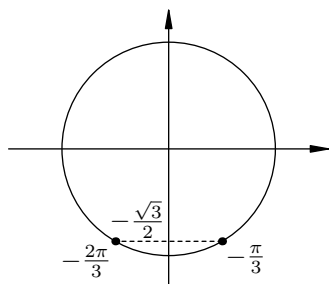
17. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

18. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



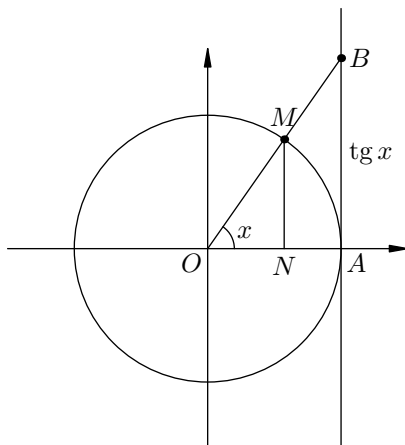
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

На этом с синусом и косинусом пока всё. Переходим к тангенсу.

Линия тангенсов

Начнём с геометрической интерпретации тангенса — так называемой линии тангенсов. Это касательная AB к единичной окружности, параллельная оси ординат (см. рисунок).



Из подобия треугольников OAB и ONM имеем:

$$\frac{AB}{OA} = \frac{MN}{ON}.$$

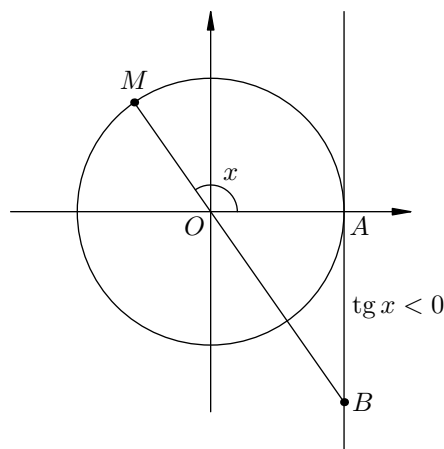
Но $OA = 1$, $MN = \sin x$, $ON = \cos x$, поэтому

$$AB = \operatorname{tg} x.$$

Мы рассмотрели случай, когда x находится в первой четверти. Аналогично рассматриваются случаи, когда x находится в остальных четвертях. В результате мы приходим к следующей геометрической интерпретации тангенса.

Тангенс угла x равен ординате точки B , которая является точкой пересечения линии тангенсов и прямой OM , соединяющей точку x с началом координат.

Вот рисунок в случае, когда x находится во второй четверти. Тангенс угла x отрицателен.

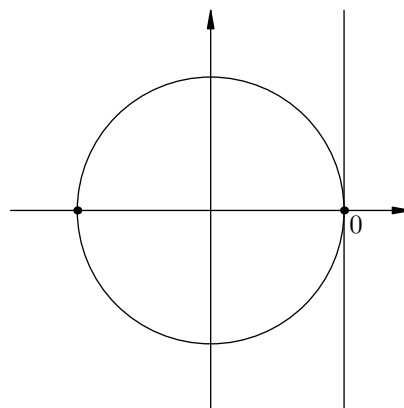


Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

Заметим, что тангенс может принимать любые действительные значения. Иными словами, уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решения при любом a .

19. $\operatorname{tg} x = 0$.

Имеем диаметрально противоположную пару точек:

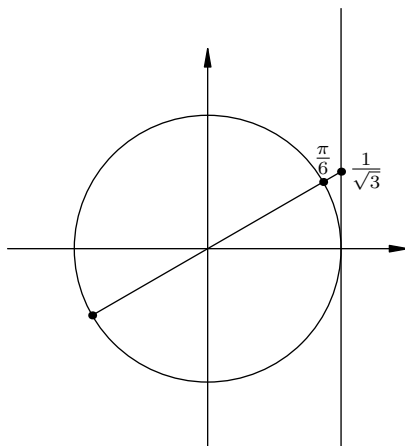


Эта пара, как мы уже знаем, описывается формулой:

$$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

20. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Имеем диаметрально пару:

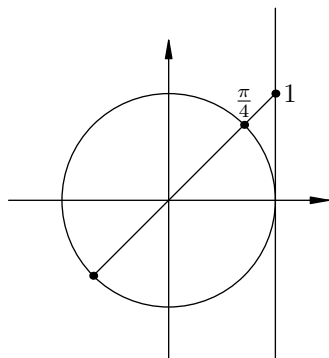


Вспоминаем второе полезное наблюдение и пишем ответ:

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

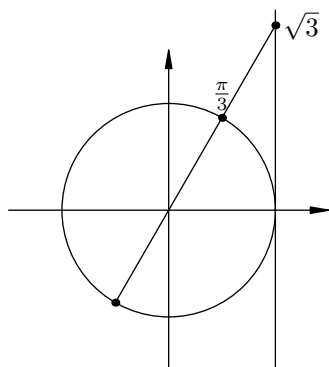
Остальные уравнения с тангенсом решаются аналогично. Мы приводим лишь рисунки и ответы.

21. $\operatorname{tg} x = 1.$



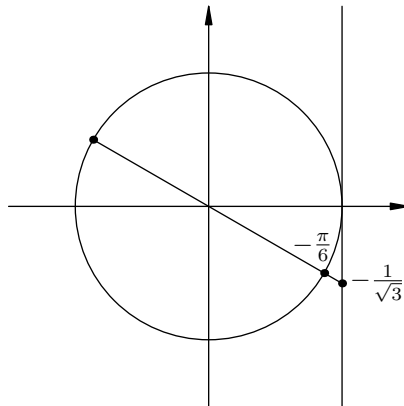
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

22. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$



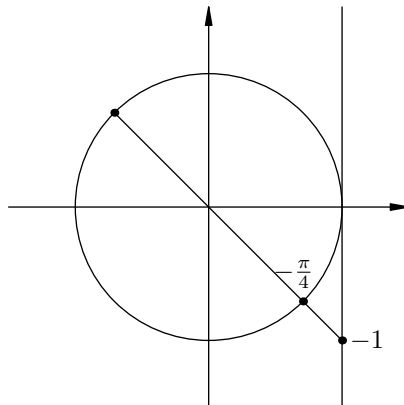
$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

23. $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$



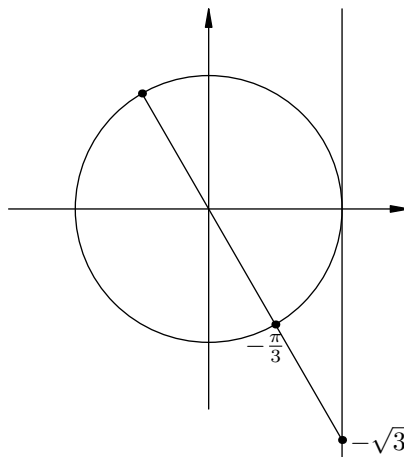
$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

24. $\operatorname{tg} x = -1.$



$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

25. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}.$



$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

На этом заканчиваем пока и с тангенсом.

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ нет смысла рассматривать особо. Дело в том, что:

- уравнение $\operatorname{ctg} x = 0$ равносильно уравнению $\cos x = 0$;
- при $a \neq 0$ уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$.

Впрочем, существует также и линия котангенсов, но... Об этом мы вам расскажем на занятиях :-)

Итак, мы разобрали простейшие тригонометрические уравнения, содержащие в правой части табличные значения тригонометрических функций. Именно такие задачи встречаются в части В вариантов ЕГЭ.

А что делать, например, с уравнением $\sin x = \frac{1}{3}$? Для этого надо сначала познакомиться с обратными тригонометрическими функциями. О них мы расскажем вам в следующей статье.

Статья написана в соавторстве с А. Г. Малковой

Простейшие тригонометрические уравнения. 2

Предыдущая статья была посвящена главной идее решения простейших тригонометрических уравнений: нарисовать единичную окружность, определить положения нужных точек и написать формулы для углов, соответствующим этим точкам.

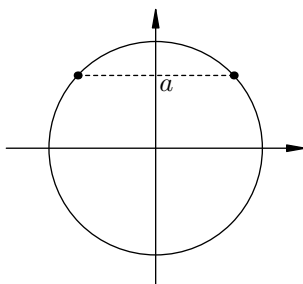
Чтобы эта идея проявилась наиболее отчётливо, мы ограничились рассмотрением случаев, когда в правой части уравнений стояли табличные значения тригонометрических функций.

Теперь, когда главная идея ясна, можно перейти к общему случаю. Как же записываются решения простейших тригонометрических уравнений, если в правой части стоит произвольное число a ?

Уравнение $\sin x = a$

Уравнение $\sin x = a$ имеет решения только при условии $|a| \leq 1$. Рассмотрением таких a мы и ограничиваемся.

Случай $a = \pm 1$ разобран в предыдущей статье. При $|a| < 1$ решения уравнения $\sin x = a$ изображаются горизонтальной парой точек тригонометрического круга, имеющих ординату a .



Осталось записать эти решения.

Здесь не обойтись без новой функции, обозначающей угол, синус которого равен числу a . Проблема, однако, в том, что таких углов бесконечно много — функция не получается. (Если последняя фраза для вас не ясна, то вам стоит прочитать нашу статью «Что такое функция?»)

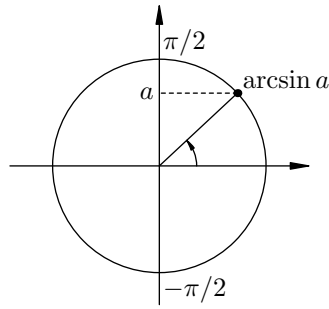
Чтобы упомянутая функция существовала, нужно ограничиться определённым промежутком углов, на котором каждое значение синуса принимается только один раз. Самый удобный выбор — отрезок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Взгляните на тригонометрический круг и убедитесь сами: любому значению синуса из промежутка $[-1; 1]$ отвечает одно-единственное значение угла на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Вот теперь наше соответствие, сопоставляющее числу $a \in [-1; 1]$ угол $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ такой, что $\sin \varphi = a$, становится функцией. Эта функция носит красивое название — арксинус.

Арксинусом числа a называется угол $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, такой, что $\sin \varphi = a$.

Обозначение: $\varphi = \arcsin a$. Область определения арксинуса — отрезок $[-1; 1]$. Область значений — отрезок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.



Можно запомнить фразу «арксинусы живут справа». Не забывайте только, что не просто справа, но ещё и на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Например:

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \text{ так как } \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

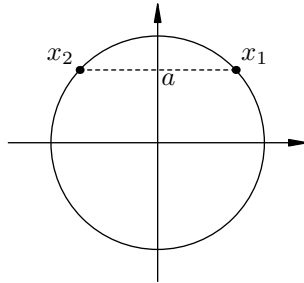
$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \text{ так как } -\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}; \quad \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6};$$

$$\arcsin 0 = 0; \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}; \quad \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Обратите внимание, что $\arcsin(-a) = -\arcsin a$. Иными словами, арксинус является нечётной функцией.

Теперь мы готовы вернуться к уравнению $\sin x = a$. Снова изобразим горизонтальную пару точек с ординатой a . Углы, отвечающие правой точке, обозначим x_1 . Углы, отвечающие левой точке, обозначим x_2 .



Не составляет труда записать эти углы:

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Собственно, это и есть ответ. При желании можно объединить обе формулы в одну — с помощью конструкции, известной вам из предыдущей статьи:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

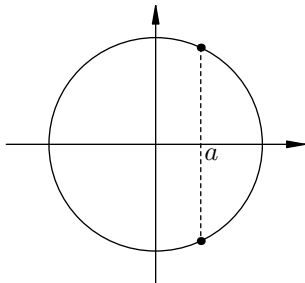
При записи ответа в случае отрицательного a можно использовать нечётность арксинуса. Например, для уравнения $\sin x = -\frac{1}{3}$ имеем:

$$x = (-1)^k \arcsin \left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение $\cos x = a$

Уравнение $\cos x = a$ также имеет решения лишь при $|a| \leq 1$. Случай $a = \pm 1$ рассмотрен в предыдущей статье.

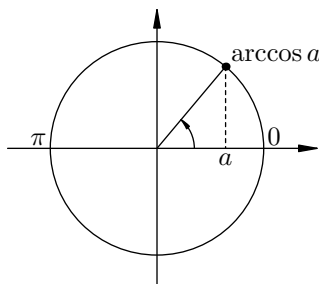
Решения уравнения $\cos x = a$ при $|a| < 1$ изображаются вертикальной парой точек с абсциссой a :



Как вы уже догадались, сейчас возникнет новая функция — арккосинус. Кто лучший кандидат в арккосинусы — верхняя или нижняя точка? Принципиальной разницы нет, но люди выбрали верхнюю. «Арккосинусы живут сверху», и не просто сверху, а на отрезке $[0; \pi]$.

Арккосинусом числа a называется угол $\varphi \in [0; \pi]$, такой, что $\cos \varphi = a$.

Обозначение: $\varphi = \arccos a$. Область определения арккосинуса — отрезок $[-1; 1]$. Область значений — отрезок $[0; \pi]$.



Промежуток $[0; \pi]$ выбран потому, что на нём каждое значение косинуса принимается только один раз. Иными словами, каждому значению косинуса, от -1 до 1 , соответствует единственное значение угла из промежутка $[0; \pi]$.

Например:

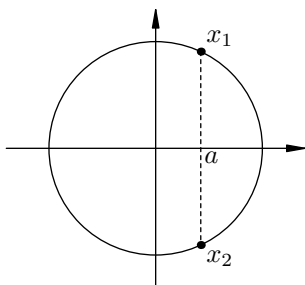
$$\begin{aligned}\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{\pi}{6}, \text{ так как } \frac{\pi}{6} \in [0; \pi] \text{ и } \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) &= \frac{3\pi}{4}, \text{ так как } \frac{3\pi}{4} \in [0; \pi] \text{ и } \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \arccos \frac{1}{2} &= \frac{\pi}{3}; \quad \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}; \\ \arccos 0 &= \frac{\pi}{2}; \quad \arccos 1 = 0; \quad \arccos(-1) = \pi.\end{aligned}$$

Внимание! Арккосинус не является ни чётной, ни нечётной функцией. Имеет место следующее очевидное соотношение:

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$

Теперь мы можем решить уравнение $\cos x = a$ для произвольного a , удовлетворяющего неравенству $|a| < 1$.

Снова отметим на окружности вертикальную пару точек с абсциссой a . Углы, отвечающие верхней точке, обозначим x_1 . Углы, отвечающие нижней точке, обозначим x_2 .



Легко написать формулы для этих углов:

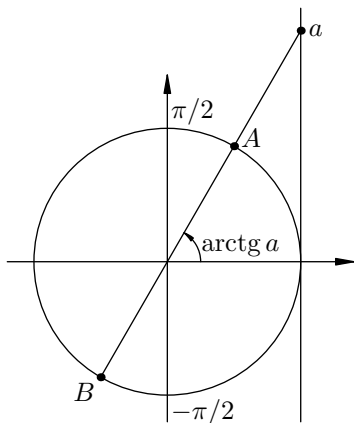
$$\begin{aligned} x_1 &= \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ x_2 &= -\arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Объединяем их в одну формулу и записываем ответ:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнения $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решения при любом a . Эти решения изображаются диаметральной парой точек:



Как и в случае арксинуса, роль арктангенса отведена правой точке. Точнее:

Арктангенсом числа a называется угол $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, такой, что $\operatorname{tg} \varphi = a$.

Обозначение: $\varphi = \operatorname{arctg} a$. Область определения арктангенса — промежуток $(-\infty; +\infty)$. Область значений — интервал $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

На нашем рисунке $\operatorname{arctg} a$ является одним из углов, соответствующих точке A .

А почему в определении арктангенса исключены концы промежутка — точки $\pm\frac{\pi}{2}$? Дело в том, что тангенс в этих точках не определён. Не существует числа a , равного тангенсу какого-либо из этих углов.

Записать решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ совсем просто. Вспоминаем второе полезное наблюдение из предыдущей статьи (как описывать диаметральную пару) и пишем ответ:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тем самым мы фактически разобрались и с уравнением $\operatorname{ctg} x = a$ при $a \neq 0$. В этом случае оно равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$, и можно сразу записать ответ:

$$x = \operatorname{arctg} \frac{1}{a} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Но можно использовать и арккотангенс. Такая функция тоже существует, и вот её определение.

Арккотангенсом числа a называется угол $\varphi \in (0; \pi)$, такой, что $\operatorname{ctg} \varphi = a$.

Тогда решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ при любом a имеют вид:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Подведём итог. Соберём формулы для решений простейших тригонометрических уравнений в небольшую таблицу.

Уравнение	Решения
$\sin x = a, a \leq 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a, a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Обратите внимание, что все частные случаи типа $\sin x = 0$, $\cos x = 1$, $\operatorname{tg} x = 0$, с которых мы начинали изучение простейших тригонометрических уравнений, тоже вписываются в эту схему. Однако стоит ли записывать, например, решение уравнения $\sin x = 0$ в виде $x = (-1)^k \arcsin 0 + \pi k$? Ведь можно сделать это намного проще — так, как было показано в первой статье.

Статья написана в соавторстве с А. Г. Малковой

Тригонометрические уравнения

В данной статье мы расскажем об основных типах тригонометрических уравнений и методах их решения. Эта тема — одна из самых сложных для абитуриентов. Тригонометрические уравнения встречаются в части С вариантов ЕГЭ, а также в заданиях вступительных экзаменов в ВУЗы.

Некоторые из методов (например, замена переменной или разложение на множители) являются универсальными, то есть применяются и в других разделах математики. Другие являются специфическими именно для тригонометрии, и о них, как правило, рассказывает абитуриенту репетитор.

Необходимых формул по тригонометрии не так уж и много. Их нужно знать наизусть.

Любой метод решения тригонометрических уравнений состоит в том, чтобы привести их к простейшим, то есть к уравнениям вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Простейшие тригонометрические уравнения мы уже умеем решать.

Теперь — сами методы.

Замена переменной и сведение к квадратному уравнению

Это универсальный способ. Применяется в любых уравнениях — степенных, показательных, тригонометрических, логарифмических, каких угодно. Замена не всегда видна сразу, и уравнение нужно сначала преобразовать.

1. Рассмотрим уравнение

$$2 \cos^2 x + 5 \sin x = 5.$$

Преобразуем его, применив основное тригонометрическое тождество:

$$2(1 - \sin^2 x) + 5 \sin x = 5,$$

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x + 3 = 0.$$

Заменяя $\sin x$ на t , приходим к квадратному уравнению:

$$2t^2 - 5t + 3 = 0.$$

Решая его, получим:

$$t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = 1.$$

Теперь вспоминаем, что мы обозначили за t . Первый корень приводит нас к уравнению $\sin x = \frac{3}{2}$. Оно не имеет решений, поскольку $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Второй корень даёт простейшее уравнение $\sin x = 1$. Решаем его: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Это и есть ответ.

2. Решить уравнение

$$3 + \cos 2x + 3\sqrt{2} \cos x = 0.$$

Здесь нужно применить формулу косинуса двойного угла. Какую именно? Судя по уравнению — ясно, что ту, которая с косинусом!

$$3 + 2 \cos^2 x - 1 + 3\sqrt{2} \cos x = 0,$$

$$2 \cos^2 x + 3\sqrt{2} \cos x + 2 = 0.$$

Теперь замена $t = \cos x$ и... дальше вы знаете.

3. Бывает, что оба рассмотренных выше метода нужно комбинировать. Например:

$$2 \cos 2x - 3 \cos^2 x - 2 \sin x = 0.$$

Здесь всё подчиняется синусу. Именно через него выражаем косинус двойного угла, а $\cos^2 x$ выражаем из основного тригонометрического тождества:

$$2(1 - 2 \sin^2 x) - 3(1 - \sin^2 x) - 2 \sin x = 0.$$

Дальше понятно.

Разложение на множители

Очень хорошо, если уравнение удастся представить в таком виде, что в левой части стоит произведение двух или нескольких множителей, а в правой части — ноль. Произведение двух или нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю. Сложное уравнение, таким образом, распадается в совокупность более простых.

1. Начнём с уравнения

$$\sin 2x = \cos x.$$

Применяем формулу синуса двойного угла:

$$2 \sin x \cos x = \cos x.$$

Ни в коем случае не сокращайте на косинус! Ведь может случиться, что $\cos x$ обратится в нуль, и мы потеряем целую серию решений. Переносим всё в одну часть, и общий множитель — за скобки:

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cos x - \cos x &= 0, \\ \cos x(2 \sin x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\cos x = 0$ и $2 \sin x - 1 = 0$. Решаем каждое из них и берём объединение множества решений.

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

2. Рассмотрим уравнение

$$\sin 3x + \sin 7x = 2 \sin 5x.$$

Применим формулу суммы синусов:

$$2 \sin 5x \cos 2x = 2 \sin 5x.$$

Дальше действуем так же, как и в предыдущей задаче:

$$\begin{aligned} 2 \sin 5x \cos 2x - 2 \sin 5x &= 0, \\ 2 \sin 5x(\cos 2x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Решаем уравнение $\sin 5x = 0$:

$$x = \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Решаем уравнение $\cos 2x - 1 = 0$:

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Ну что, перечисляем обе серии (1) и (2) в ответе через запятую? Нет! Серия (2) является в данном случае частью серии (1). Действительно, если в формуле (1) число n кратно 5, то мы получаем все решения серии (2).

Поэтому ответ: $x = \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$.

3. Бывает, что перед разложением суммы или разности тригонометрических функций в произведение надо проделать обратную процедуру: превратить произведение в сумму (разность). Решим уравнение:

$$\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x.$$

Домножаем обе части на 2, преобразуем левую часть в разность косинусов, а правую часть — в сумму косинусов:

$$\begin{aligned} 2 \sin 2x \sin 6x &= 2 \cos x \cos 3x, \\ \cos 4x - \cos 8x &= \cos 2x + \cos 4x, \\ \cos 2x + \cos 8x &= 0, \\ 2 \cos 5x \cos 3x &= 0. \end{aligned}$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

4. Ещё пример, где финальное разложение на множители поначалу замаскировано:

$$\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1.$$

Здесь используем формулу понижения степени:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

(которая является ни чем иным, как переписанной в другом виде формулой косинуса двойного угла). Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} &= 1, \\ \cos 4x + \cos 6x &= 0, \end{aligned}$$

и дальше ясно.

5. Многие оказываются в ступоре при виде следующего уравнения:

$$\sin 3x = \cos 5x.$$

Переносим косинус влево и применяем формулу приведения $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$:

$$\begin{aligned} \sin 3x - \cos 5x &= 0, \\ \sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) &= 0. \end{aligned}$$

Дальше — дело техники.

6. А в этом примере нужны совсем другие манипуляции:

$$\sin 2x - \cos x + 2 \sin x = 1.$$

Раскладываем синус двойного угла, всё собираем в левой части и группируем:

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cos x - \cos x + 2 \sin x - 1 &= 0, \\ \cos x(2 \sin x - 1) + (2 \sin x - 1) &= 0, \\ (2 \sin x - 1)(\cos x + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Цель достигнута.

Однородные уравнения

Рассмотрим уравнение:

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0.$$

Степень каждого слагаемого в левой части равна двум. Точно так же, как в обычном многочлене $a^2 + 2ab - 3b^2$ степень каждого слагаемого равна двум (степень одночлена — это сумма степеней входящих в него сомножителей).

Поскольку степени всех слагаемых одинаковы, такое уравнение называют *однородным*. Для однородных уравнений существует стандартный приём решения — деление обеих его частей на $\cos^2 x$. Возможность этого деления, однако, должна быть обоснована: а что, если косинус равен нулю?

Следующий абзац предлагаем выучить наизусть и всегда прописывать его при решении однородных уравнений.

Предположим, что $\cos x = 0$. Тогда в силу уравнения и $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Следовательно, любое решение данного уравнения удовлетворяет условию $\cos x \neq 0$, и мы можем разделить обе его части на $\cos^2 x$.

В результате деления приходим к равносильному квадратному уравнению относительно тангенса:

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0,$$

и дальнейший ход решения трудностей не представляет.

1. Рассмотрим уравнение

$$10 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 3.$$

Если бы в правой части стоял нуль, уравнение было бы однородным. Мы поправим ситуацию изящным приёмом: заменим число 3 на выражение $3(\sin^2 x + \cos^2 x)$:

$$\begin{aligned} 10 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x &= 3(\sin^2 x + \cos^2 x), \\ 7 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x &= 0, \end{aligned}$$

и дело сделано.

2. Неожиданным образом сводится к однородному следующее уравнение:

$$3 \cos x + 2 \sin x = 1.$$

Казалось бы, где тут однородность? Переходим к половинному углу!

$$\begin{aligned} 3 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) + 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} &= \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}, \\ 4 \sin^2 \frac{x}{2} - 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \cos^2 \frac{x}{2} &= 0, \\ 2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 &= 0, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} &= \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

откуда

$$x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Мы не случайно довели это уравнение до ответа. В следующем разделе оно будет решено другим методом, и ответ окажется внешне непохожим на этот.

Введение дополнительного угла

Этот метод применяется для уравнений вида $a \cos x + b \sin x = c$. Он присутствует в школьных учебниках. Правда, в них рассматриваются только частные случаи — когда числа a и b являются значениями синуса и косинуса углов в 30° , 45° или 60° .

1. Рассмотрим уравнение

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2.$$

Делим обе части на 2:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = 1.$$

Замечаем, что $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$:

$$\cos \frac{\pi}{6} \sin x + \sin \frac{\pi}{6} \cos x = 1.$$

В левой части получили синус суммы:

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1,$$

откуда $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Другой пример:

$$\cos x + \sin x = 1.$$

Делим обе части на $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Сделаем теперь для разнообразия в левой части косинус разности:

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x_2 = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. Рассмотрим теперь общий случай — уравнение

$$a \cos x + b \sin x = c.$$

Делим обе части на $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4)$$

Для чего мы выполнили это деление? Всё дело в получившихся коэффициентах при косинусе и синусе. Легко видеть, что сумма их квадратов равна единице:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1.$$

Это означает, что данные коэффициенты сами являются косинусом и синусом некоторого угла φ :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi.$$

Соотношение (4) тогда приобретает вид:

$$\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

или

$$\cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Исходное уравнение сведено к простейшему. Теперь понятно, почему рассматриваемый метод называется *введением дополнительного угла*. Этим дополнительным углом как раз и является угол φ .

4. Снова решим уравнение

$$3 \cos x + 2 \sin x = 1.$$

Делим обе части на $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$:

$$\frac{3}{\sqrt{13}} \cos x + \frac{2}{\sqrt{13}} \sin x = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Существует угол φ такой, что $\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Например, $\varphi = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}}$. Получаем:

$$\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x = \frac{1}{\sqrt{13}},$$

$$\cos(x - \varphi) = \frac{1}{\sqrt{13}},$$

$$x - \varphi = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{13}} + 2\pi n,$$

$$x = \varphi \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{13}} + 2\pi n,$$

$$x = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{13}} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В предыдущем разделе мы решили это уравнение, сведя его к однородному, и получили в качестве ответа выражение (3). Сравните с полученным только что выражением. А ведь это одно и то же множество решений!

Универсальная подстановка

Запомним две важные формулы:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Их ценность в том, что они позволяют выразить синус и косинус через одну и ту же функцию — тангенс половинного угла. Именно поэтому они получили название *универсальной подстановки*.

Единственная неприятность, о которой не надо забывать: правые части этих формул не определены при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому если применение универсальной подстановки приводит к сужению ОДЗ, то данную серию нужно проверить непосредственно.

1. Решим уравнение

$$\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2.$$

Выражаем $\sin 2x$, используя универсальную подстановку:

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x = 2.$$

Делаем замену $t = \operatorname{tg} x$:

$$\frac{2t}{1 + t^2} + t = 2.$$

Получаем кубическое уравнение:

$$\begin{aligned} t^3 - 2t^2 + 3t - 2 &= 0, \\ (t - 1)(t^2 - t + 2) &= 0. \end{aligned}$$

Оно имеет единственный корень $t = 1$. Стало быть, $\operatorname{tg} x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Сужения ОДЗ в данном случае не было, так как уравнение с самого начала содержало $\operatorname{tg} x$.

2. Рассмотрим уравнение

$$6 + 6 \cos x + 5 \sin x \cos x = 0.$$

А вот здесь использование универсальной подстановки сужает ОДЗ. Поэтому сначала непосредственно подставляем $x = \pi + 2\pi n$ в уравнение и убеждаемся, что это — решение.

Теперь обозначаем $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ и применяем универсальную подстановку:

$$6 + 6 \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{10t(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2} = 0.$$

После простых алгебраических преобразований приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} 5t^3 - 6t^2 - 5t - 6 &= 0, \\ (t - 2)(5t^2 + 4t + 3) &= 0, \\ t &= 2. \end{aligned}$$

Следовательно, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2$ и $x = 2 \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$.

Ответ: $x_1 = \pi + 2\pi n, x_2 = 2 \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Метод оценок

В некоторых уравнениях на помощь приходят оценки $-1 \leq \sin x \leq 1, -1 \leq \cos x \leq 1$.

3. Рассмотрим уравнение

$$\sin 5x + \sin 9x = 2.$$

Так как оба синуса не превосходят единицы, данное равенство может быть выполнено лишь в том случае, когда *они равны единице одновременно*:

$$\begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \sin 9x = 1. \end{cases}$$

Таким образом, должны одновременно выполняться следующие равенства:

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 9x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9}, n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Обратите внимание, что сейчас речь идёт о *пересечении* множества решений (а не об их объединении, как это было в случае разложения на множители). Нам ещё предстоит понять, какие значения x удовлетворяют обоим равенствам. Имеем:

$$\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9}.$$

Умножаем обе части на 90 и сокращаем на π :

$$\begin{aligned} 9 + 36n &= 5 + 20k, \\ 20k &= 36n + 4, \\ 5k &= 9n + 1. \end{aligned}$$

Правая часть, как видим, должна делиться на 5. Число n при делении на 5 может давать остатки от 0 до 4; иначе говоря, число n может иметь один из следующих пяти видов: $5m$, $5m + 1$, $5m + 2$, $5m + 3$ и $5m + 4$, где $m \in \mathbb{Z}$. Для того, чтобы $9n + 1$ делилось на 5, годится лишь $n = 5m + 1$.

Искать k , в принципе, уже не нужно. Сразу находим x :

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi(5m+1)}{5} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

4. Рассмотрим уравнение

$$\sin 2x \sin 5x = 1.$$

Ясно, что данное равенство может выполняться лишь в двух случаях: когда оба синуса одновременно равны 1 или -1 . Действуя так, мы должны были бы поочерёдно рассмотреть две системы уравнений.

Лучше поступить по-другому: умножим обе части на 2 и преобразуем левую часть в разность косинусов:

$$\begin{aligned} 2 \sin 2x \sin 5x &= 2, \\ \cos 3x - \cos 7x &= 2. \end{aligned}$$

Тем самым мы сокращаем работу вдвое, получая лишь одну систему:

$$\begin{cases} \cos 3x = 1, \\ \cos 7x = -1. \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases} 3x = 2\pi n \\ 7x = \pi + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi n}{3}, \\ x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}, n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ищем пересечение:

$$\frac{2\pi n}{3} = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}.$$

Умножаем на 21 и сокращаем на π :

$$14n = 3 + 6k.$$

Данное равенство невозможно, так как в левой части стоит чётное число, а в правой — нечётное.

Ответ: решений нет.

5. Страшное с виду уравнение

$$\sin^5 x + \cos^8 x = 1$$

также решается методом оценок. В самом деле, из неравенств $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$ следует, что $\sin^5 x \leq \sin^2 x$, $\cos^8 x \leq \cos^2 x$. Следовательно, $\sin^5 x + \cos^8 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, причём равенство возможно в том и только в том случае, когда

$$\begin{cases} \sin^5 x = \sin^2 x, \\ \cos^8 x = \cos^2 x. \end{cases}$$

Остаётся решить полученную систему. Это не сложно.

Учёт тригонометрических неравенств

Рассмотрим уравнение:

$$\sqrt{5 \cos x - \cos 2x} + 2 \sin x = 0.$$

Перепишем его в виде, пригодном для возведения в квадрат:

$$\sqrt{5 \cos x - \cos 2x} = -2 \sin x.$$

Тогда наше уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 5 \cos x - \cos 2x = 4 \sin^2 x, \\ \sin x \leq 0. \end{cases}$$

Решаем уравнение системы:

$$\begin{aligned} 5 \cos x - (2 \cos^2 x - 1) &= 4(1 - \cos^2 x), \\ 2 \cos^2 x + 5 \cos x - 3 &= 0, \\ \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Второе уравнение данной совокупности не имеет решений, а первое даёт две серии:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Теперь нужно произвести отбор решений в соответствии с неравенством $\sin x \leq 0$. Серия x_1 не удовлетворяет этому неравенству, а серия x_2 удовлетворяет ему. Следовательно, решением исходного уравнения служит только серия x_2 .

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Специальные приёмы

В этом разделе рассматриваются некоторые типы уравнений, приёмы решения которых нужно знать обязательно.

1. Рассмотрим уравнение

$$\cos 2x = \cos x + \sin x.$$

Это сравнительно редкий случай, когда используется *исходная* формула косинуса двойного угла:

$$\begin{aligned}\cos^2 x - \sin^2 x &= \cos x + \sin x, \\ (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) &= \cos x + \sin x, \\ (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - 1) &= 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0, \\ \cos x - \sin x = 1. \end{array} \right.\end{aligned}$$

Каждое из уравнений полученной совокупности мы решать умеем.

2. Теперь рассмотрим такое уравнение:

$$\sin 2x = \cos x + \sin x + 1.$$

Метод решения будет совсем другим. Сделаем замену $t = \cos x + \sin x$. Как выразить $\sin 2x$ через t ? Имеем:

$$t^2 = \cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x = 1 + \sin 2x,$$

откуда $\sin 2x = t^2 - 1$. Получаем:

$$\begin{aligned}t^2 - 1 &= t + 1, \\ t^2 - t - 2 &= 0, \\ t_1 &= -1, t_2 = 2, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = -1, \\ \cos x + \sin x = 2. \end{array} \right.\end{aligned}$$

Как действовать дальше, мы знаем.

3. Надо обязательно помнить формулы косинуса и синуса тройного угла (чтобы не изобретать их на экзамене):

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \\ \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.\end{aligned}$$

Вот, например, уравнение:

$$\sin 3x + 2 \cos 2x = 2.$$

Оно сводится к уравнению относительно $\sin x$:

$$\begin{aligned}3 \sin x - 4 \sin^3 x + 2(1 - 2 \sin^2 x) &= 2, \\ 4 \sin^3 x + 4 \sin^2 x - 3 \sin x &= 0, \\ \sin x(4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3) &= 0.\end{aligned}$$

Дальше всё понятно.

4. Как бороться с суммой четвёртых степеней синуса и косинуса? Рассмотрим уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}.$$

Выделяем полный квадрат!

$$\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{5}{8},$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{5}{8},$$

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{5}{8},$$

$$\sin^2 2x = \frac{3}{4},$$

$$\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n,$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

5. А как быть с суммой шестых степеней? Рассмотрим такое уравнение:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}.$$

Раскладываем левую часть на множители как сумму кубов: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Получим:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \frac{1}{4},$$

$$\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}.$$

С суммой четвёртых степеней вы уже умеете обращаться.

Мы рассмотрели основные методы решения тригонометрических уравнений. Знать их нужно обязательно, это — необходимая база.

В более сложных и нестандартных задачах нужно ещё догадаться, как использовать те или иные методы. Это приходит только с опытом. Именно этому мы и учим на наших занятиях.

О первичных понятиях

Дать определение (т. е. объяснение) какого-либо понятия — это значит описать его с помощью других понятий, которые считаются известными.

В жизни нам часто приходится что-то кому-то объяснять, и мы далеко не всегда задумываемся о том, *как* это происходит, какова *логика* нашего объяснения. Не задумываемся потому, что запас имеющихся в нашем распоряжении слов достаточно велик и нам ясен смысл этих слов, так что общение друг с другом не представляет для нас никаких трудностей.

Но представим себе инопланетянина, прилетевшего на Землю из совершенно иной реальности. Ему непривычно абсолютно всё вокруг. Допустим, он выучился читать по-русски и теперь хочет уяснить себе смысл различных слов. Вооружившись энциклопедическим словарём, он пытается разобраться, что означает, например, слово «орёл».

Орёл — хищная птица семейства ястребиных.

Почувствовав, что главным понятием в этом определении является «птица», он читает:

Птицы — класс позвоночных животных.

Похоже, дело в слове «животные»:

Животные — организмы, составляющие одно из царств органического мира.

Да, но что такое «организмы» и «органический мир»?

Организм — живое существо, обладающее совокупностью свойств, отличающих его от неживой материи.

Органический мир — совокупность организмов, населяющих биосферу Земли.

Если инопланетянин имеет представление о том, что такое «живое существо», «совокупность», «свойство» и т. д., он сможет понять две последние фразы и начать обратное движение к слову «орёл». Если нет — ему придётся выяснять дальше, пока не появятся известные ему понятия. При полном отсутствии изначально известных, *первичных* понятий дело инопланетянина безнадежно — переходы от одной словарной статьи к другой будут продолжаться до бесконечности.

Итак, если мы хотим дать чему-то определение, мы должны в конечном счёте располагать какими-то первичными (исходными, простейшими, неопределяемыми) понятиями, которые лежат в основе всей логической системы и уже не сводятся ни к каким другим понятиям. Смысл первичных понятий должен быть интуитивно очевиден. Тогда определение какого-либо объекта может быть дано или непосредственно с помощью первичных понятий (как в случае «организма» и «органического мира» при условии, что инопланетянин понял эти фразы), или с помощью понятий, уже определённых ранее через первичные (как в случае «орла», с которого всё и началось).

Именно так устроена математика. Слово «совокупность», с которым столкнулся инопланетянин, в школьной математике является первичным понятием и называется *множеством*.

Множество состоит из *элементов*, которые ему *принадлежат*. Например, орёл является элементом множества птиц и не является элементом множества рыб (или: орёл принадлежит множеству птиц и не принадлежит множеству рыб).

К числу первичных относится также понятие *соответствия* между элементами множеств. Так, каждой птице можно поставить в соответствие число, которое выражает длину её клюва (каждому элементу множества птиц ставится в соответствие элемент множества чисел).

К первичным понятиям геометрии относятся *точка*, *прямая*, *плоскость* и *пространство*. Есть первичные понятия и в физике — это, в частности, *пространство* и *время*.

Как сами первичные понятия, так и определённые с их помощью объекты могут находиться в некоторых *отношениях* друг с другом. Например, точка может лежать на прямой, а может и не лежать; каждому отрезку можно поставить в соответствие число — его длину, и т. д.

Такие отношения описываются при помощи специальных утверждений, которые называются *аксиомами*. Аксиомы являются начальными утверждениями теории и составляют её фундамент. Любое другое утверждение (*теорема*) должно быть *доказано*, т. е. выведено из аксиом при помощи логических умозаключений. Конечно, в каждом конкретном случае при доказательстве теорем можно опираться на теоремы, уже доказанные ранее.

Пирамида

Пирамида и призма присутствуют в очень многих задачах по стереометрии (в частности, они фигурируют во всех задачах С2, предлагавшихся на ЕГЭ по математике с 2010 года). Данная статья посвящена пирамиде.

Самая простая пирамида — это *треугольная пирамида*, или *тетраэдр*¹. На рис. 1 изображена треугольная пирамида $ABCD$. Точки A, B, C, D — это *вершины* пирамиды. Треугольники ABC, ABD, BCD, ACD — это *грани* пирамиды.

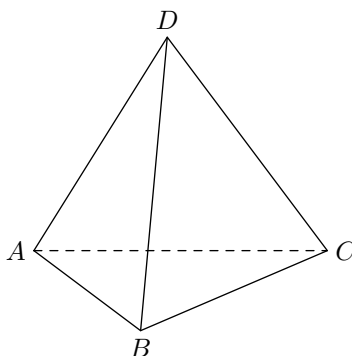


Рис. 1. Треугольная пирамида

В основании пирамиды лежит треугольник ABC , и, соответственно, грань ABC называется *основанием* пирамиды. Остальные грани — ABD, BCD и ACD — называются *боковыми гранями*. Понятно, что на какую грань поставишь треугольную пирамиду — та и будет основанием, а остальные грани тогда станут боковыми.

Отрезки AB, BC, AC, AD, BD, CD , являющиеся сторонами граней, называются *рёбрами* пирамиды. При этом отрезки AD, BD и CD называются также *боковыми рёбрами*.

На рис. 2 изображена четырёхугольная пирамида $ABCD S$. Её основанием служит четырёхугольник $ABCD$.

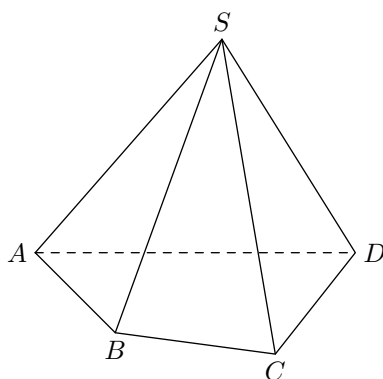


Рис. 2. Четырёхугольная пирамида

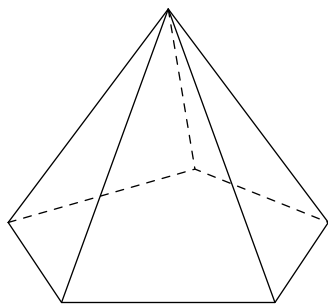
Вершиной данной четырёхугольной пирамиды называется точка S . Точки A, B, C, D называются *вершинами основания*.

Отрезки SA, SB, SC, SD , соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, снова называются *боковыми рёбрами*, а треугольники SAB, SBC, SCD и SAD — *боковыми гранями* пирамиды.

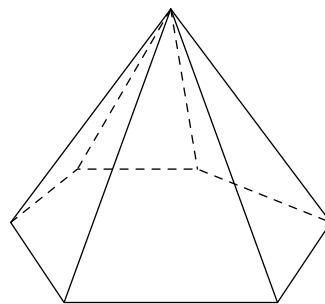
¹ *Тетраэдр* по-гречески означает *четырёхгранник*.

Обратите внимание, что теперь грани не являются равноправными: основание — это четырёхугольник, а боковые грани — треугольники.

На рис. 3 показаны ещё две пирамиды — пятиугольная и шестиугольная.



Пятиугольная пирамида



Шестиугольная пирамида

Рис. 3. Многоугольные пирамиды

Основанием пятиугольной пирамиды служит пятиугольник; основанием шестиугольной пирамиды служит шестиугольник. Боковые рёбра соединяют вершины основания с фиксированной точкой — вершиной пирамиды, которая лежит вне плоскости основания. Боковыми гранями пирамиды являются треугольники, образованные двумя соседними боковыми рёбрами и соответствующей стороной основания.

Аналогично описывается произвольная n -угольная пирамида: в её основании лежит n -угольник, а боковыми гранями являются треугольники с общей вершиной (которая и называется вершиной пирамиды).

Высота пирамиды

Высота пирамиды — это перпендикуляр², проведённый из вершины пирамиды на плоскость её основания. Длина h этого перпендикуляра также называется высотой пирамиды.

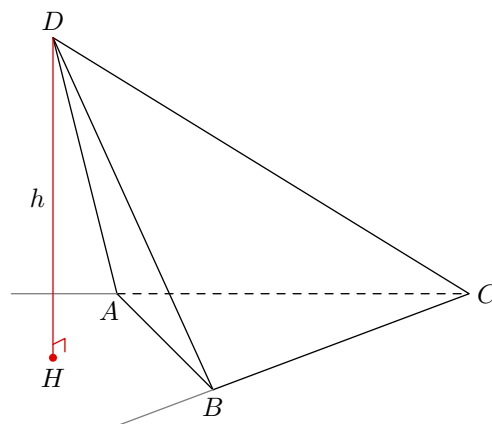
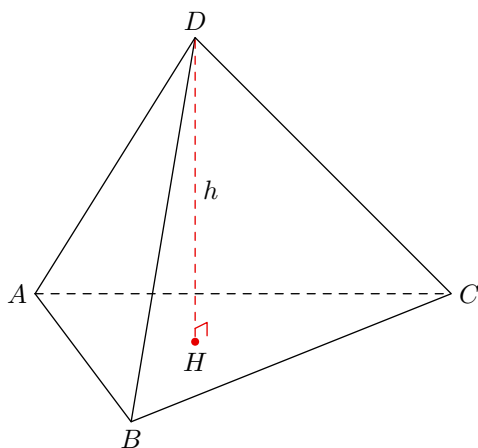


Рис. 4. Высота пирамиды

На рис. 4 изображена треугольная пирамида $ABCD$, из вершины D которой проведена высота DH к плоскости ABC . Точка H лежит в плоскости ABC и называется *основанием высоты*. Как видите, основание высоты может оказаться где угодно — как внутри грани (левый рисунок), так и вне грани (правый рисунок).

²Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Сейчас вполне достаточно интуитивного понимания перпендикулярности прямой и плоскости; позже мы обсудим это понятие более подробно.

Имеется, однако, важный частный случай, когда мы можем точно указать, в какую именно точку основания попадёт основание высоты.

Теорема. Если в n -угольной пирамиде боковые рёбра равны, то основание высоты совпадает с центром окружности, описанной вокруг n -угольника, лежащего в основании пирамиды.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением треугольной пирамиды (в общем случае доказательство совершенно аналогично). Пусть $ABCD$ — треугольная пирамида с равными боковыми рёбрами, в которой проведена высота DH (рис. 5).

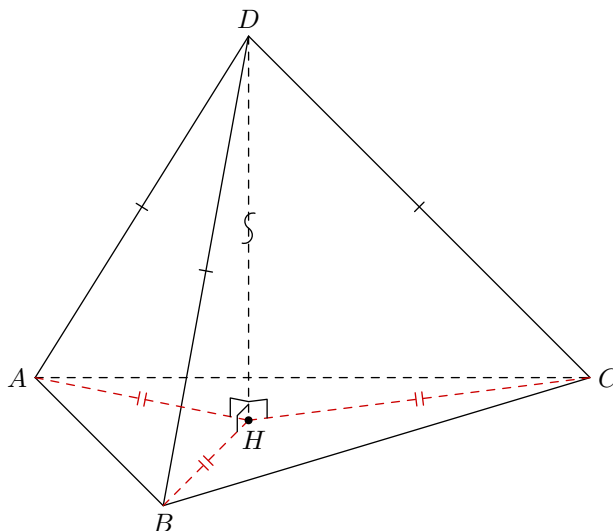


Рис. 5. К доказательству теоремы

Треугольники ADH , BDH и CDH — прямоугольные с общим катетом DH . Их гипотенузы равны, поэтому данные треугольники равны по гипотенузе и катету. Следовательно, равны их вторые катеты: $AH = BH = CH$.

Таким образом, точка H равноудалена от точек A , B , C и потому является центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC . Теорема доказана.

Можно запомнить эту теорему и в такой формулировке: *если боковые рёбра пирамиды равны, то вершина пирамиды проектируется в центр описанной вокруг основания окружности.*

Объём пирамиды

Объём пирамиды вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

где S — площадь основания, h — высота пирамиды.

Для треугольной пирамиды всё равно, какую грань считать основанием (разумеется, в таком случае h будет высотой, опущенной на выбранное основание). Мы можем «поставить» треугольную пирамиду так, как нам удобно, и этот факт часто помогает при решении задач.

Задача. Найти объём треугольной пирамиды с рёбрами 6, 8, 10, 13, 13, 13.

Решение. Какую грань выбрать в качестве основания? Здесь сомнений нет: естественно, ту, стороны которой равны 6, 8 и 10. Почему?

Прежде всего, треугольник со сторонами 6, 8, 10 является прямоугольным в силу обратной теоремы Пифагора (поскольку $6^2 + 8^2 = 10^2$). Это уже хорошо.

Кроме того, при таком выборе основания боковые рёбра пирамиды оказываются равными (13, 13 и 13). Значит, вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной вокруг основания.

А где находится центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника? В середине гипотенузы! Делаем рисунок (рис. 6).

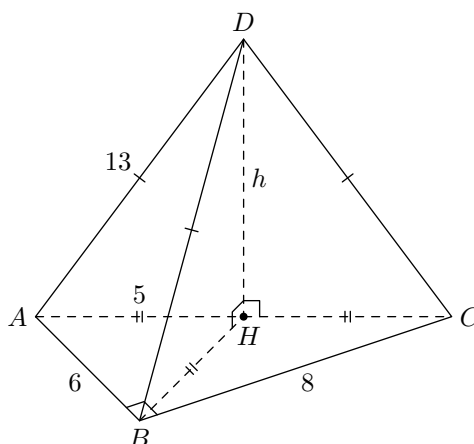


Рис. 6. К задаче

В основании нашей пирамиды лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC . Точка H — середина гипотенузы; $h = DH$ — высота пирамиды.

Площадь основания ABC равна половине произведения катетов:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24.$$

Высоту пирамиды находим по теореме Пифагора:

$$h = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

И, наконец, вычисляем объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 12 = 96.$$

Правильная пирамида

Мы уже убедились, что равенство боковых рёбер пирамиды позволяет легче проводить вычисления. Теперь наложим ещё одно дополнительное требование — на сей раз к основанию пирамиды — и придём к важнейшему понятию *правильной пирамиды*.

Правильная пирамида — это пирамида, у которой боковые ребра равны, а в основании лежит правильный n -угольник.

Легко видеть, что *вершина правильной пирамиды проектируется в центр симметрии правильного n -угольника, лежащего в её основании*. В самом деле, из равенства боковых рёбер следует, что вершина проектируется в центр описанной вокруг основания окружности, который в случае правильного n -угольника совпадает с центром его симметрии.

Чаще всего в задачах встречаются правильная треугольная и правильная четырёхугольная пирамида. Продублируем определение для этих двух случаев.

- **Правильная треугольная пирамида** — это пирамида с равными боковыми рёбрами, основанием которой служит равносторонний треугольник.

- **Правильная четырёхугольная пирамида** — это пирамида с равными боковыми рёбрами, основанием которой служит квадрат.

Правильную треугольную и правильную четырёхугольную пирамиду лучше всего рисовать следующим образом (рис. 7).

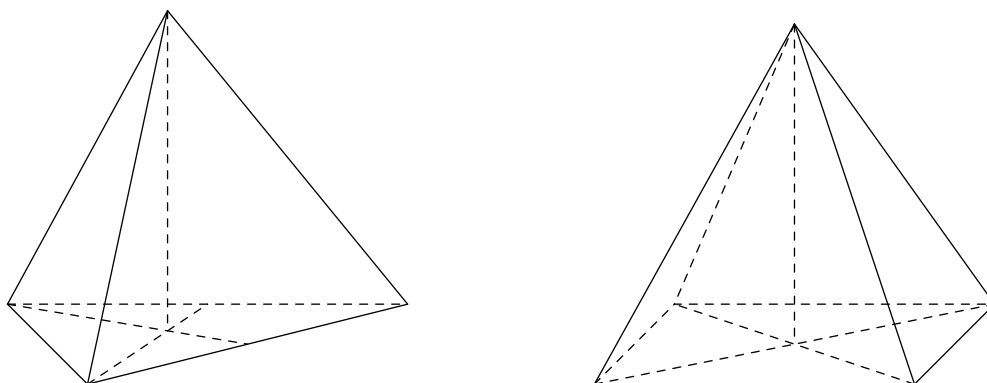


Рис. 7. Как рисовать правильную пирамиду

Последовательность действий такая: 1) рисуем основание пирамиды; 2) строим центр основания, проводя медианы треугольника или диагонали квадрата; 3) из центра ведём вверх высоту и отмечаем на ней вершину пирамиды; 4) соединяем вершину пирамиды с вершинами основания.

В самом начале мы сказали, что треугольная пирамида и тетраэдр — это синонимы. Однако правильный тетраэдр и правильная треугольная пирамида — не одно и то же! Такой вот терминологический курьёз.

Правильный тетраэдр — это треугольная пирамида, все рёбра которой равны.

В правильной треугольной пирамиде боковое ребро может быть не равно стороне основания; иными словами, боковые грани правильной треугольной пирамиды — равнобедренные, но не обязательно равносторонние треугольники. В правильном тетраэдре все шесть граней — равносторонние треугольники.

Задача. Найти объём правильного тетраэдра со стороной a .

Решение. Делаем рисунок (рис. 8).

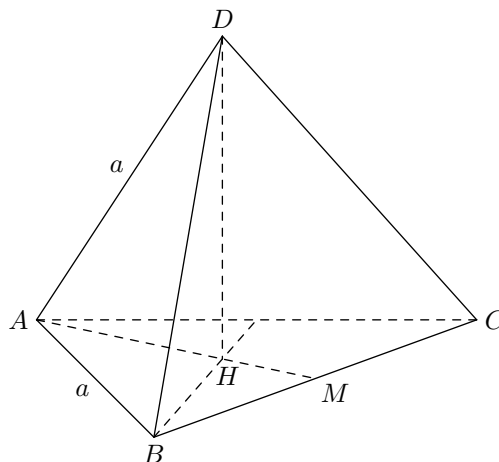


Рис. 8. К задаче

Нам нужно выразить через a площадь S треугольника ABC и высоту тетраэдра DH . Высоту будем искать из треугольника ADH ; для этого в треугольнике ABC надо будет найти AH .

Сделаем планиметрический чертёж треугольника ABC (рис. 9). Его площадь проще всего найти как половину произведения сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

(данную формулу площади правильного треугольника имеет смысл помнить).

Длину отрезка AH находим из прямоугольного треугольника AHN :

$$AH = \frac{AN}{\cos 30^\circ} = \frac{a/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

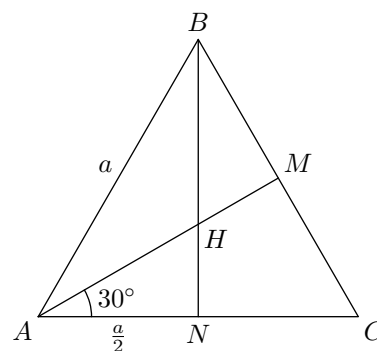


Рис. 9. К задаче

(желательно помнить и это выражение для радиуса окружности, описанной вокруг правильного треугольника).

Высоту тетраэдра найдём из прямоугольного треугольника ADH :

$$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

И теперь находим объём:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot DH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}.$$

Площадь поверхности пирамиды

Площадь поверхности пирамиды — это сумма площадей всех её граней. **Площадь боковой поверхности пирамиды** — это сумма площадей всех её боковых граней.

Задача. Найти площадь поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, у которой сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 5.

Решение. Пусть $ABCDE$ — наша пирамида (рис. 10).

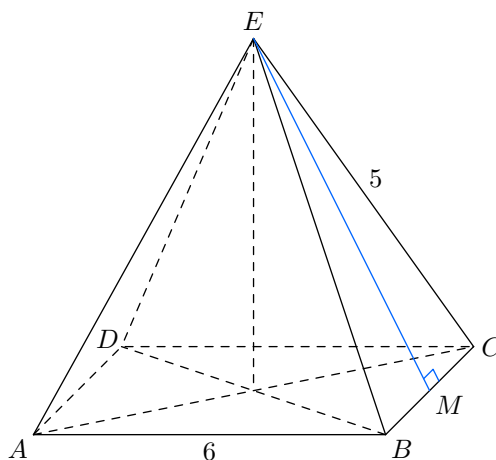


Рис. 10. К задаче

Площадь основания пирамиды равна: $S_{\text{осн}} = 6^2 = 36$. Остаётся найти площадь боковой поверхности.

Проведём высоту EM боковой грани пирамиды³. Треугольник BEC — равнобедренный; значит, EM является также его медианой, и потому $MC = 3$. Отсюда

$$EM = \sqrt{EC^2 - MC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Следовательно, площадь S_1 боковой грани равна:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot EM = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12.$$

Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}} = 4S_1 = 4 \cdot 12 = 48.$$

Площадь поверхности пирамиды:

$$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 36 + 48 = 84.$$

³Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из вершины пирамиды, называется *апофемой*.

Призма

Призма встречается в задачах по стереометрии столь же часто, как и пирамида. Цель данной статьи — ввести основную терминологию, связанную с понятием призмы.

Рассмотрим в пространстве треугольник ABC . Предположим, что треугольник $A_1B_1C_1$ лежит в плоскости, параллельной плоскости ABC , и получается из треугольника ABC параллельным сдвигом. Соединим соответствующие вершины — A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 — и получим *треугольную призму* $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 1).

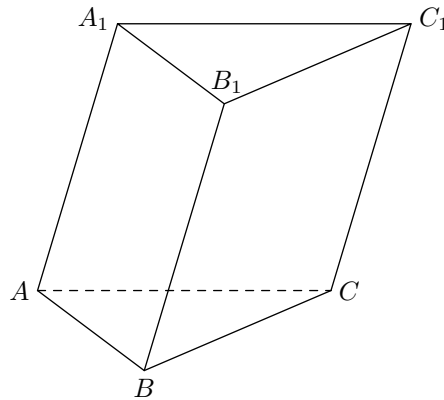


Рис. 1. Треугольная призма

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются *основаниями* призмы. Три параллелограмма ABB_1A_1 , BCC_1B_1 и ACC_1A_1 — это *боковые грани* призмы. Отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 — это *боковые рёбра* призмы.

Таким образом, основания треугольной призмы — равные треугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а боковые грани — параллелограммы.

Аналогично получается *четырёхугольная призма* $ABCD A_1B_1C_1D_1$ (рис. 2).

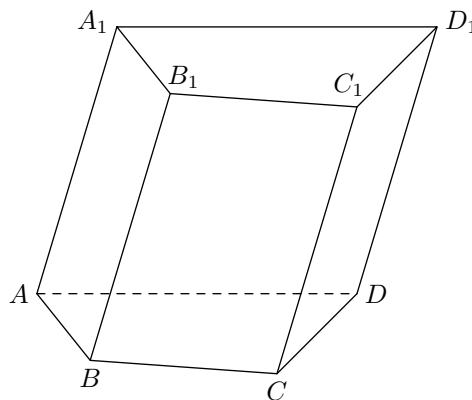


Рис. 2. Четырёхугольная призма

Основаниями этой призмы служат равные четырёхугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, лежащие в параллельных плоскостях. Боковые грани призмы — снова параллелограммы. Отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 — боковые рёбра призмы.

Вообще, в n -угольной призме основаниями служат равные n -угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а боковые грани являются параллелограммами. Боковые рёбра призмы, будучи параллельными сторонами параллелограммов, равны друг другу.

На приведённых выше рисунках боковые рёбра призмы наклонены к плоскостям оснований: обе призмы являются *наклонными*. Однако в задачах и на практике (в оптике, например) наиболее часто встречается *прямая* призма.

Прямая призма

Прямая призма — это призма, боковые рёбра которой перпендикулярны плоскостям оснований.

На рис. 3 изображены две прямые призмы — треугольная и четырёхугольная.

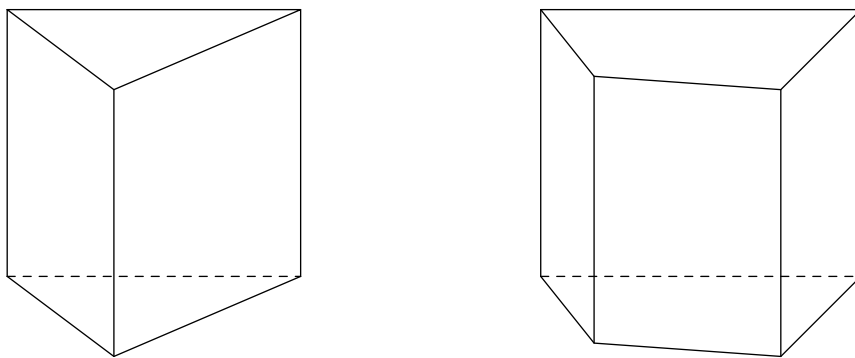


Рис. 3. Прямая призма

Как видите, боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками.

Правильная призма

Правильная n -угольная призма — это прямая призма, основанием которой служит правильный n -угольник.

На рис. 4 изображены две правильные призмы — треугольная и четырёхугольная. Штрихи на равных отрезках поставлены исключительно для наглядности — на рисунках в задачах их можно не ставить.

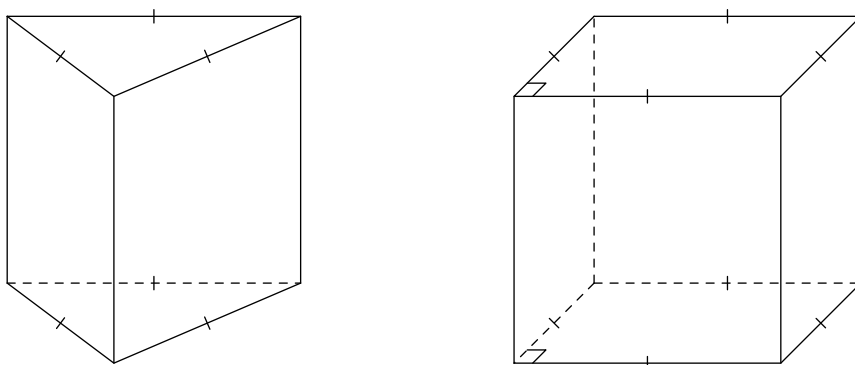


Рис. 4. Правильная призма

Поскольку эти случаи встречаются часто, мы специально для них конкретизируем общее определение.

- **Правильная треугольная призма** — это прямая призма, основанием которой является равносторонний треугольник.

- **Правильная четырёхугольная призма** — это прямая призма, основанием которой является квадрат.

Если боковое ребро правильной четырёхугольной призмы равно стороне основания, то получается хорошо известный вам **куб**.

Вы видите, что боковые грани правильной призмы являются равными прямоугольниками. На ЕГЭ по математике в задачах С2 попадается правильная шестиугольная призма. Посмотрите, как её надо рисовать (рис. 5).

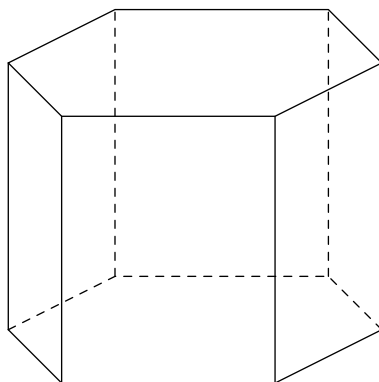
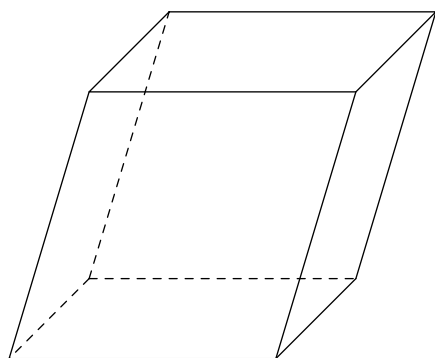


Рис. 5. Правильная шестиугольная призма

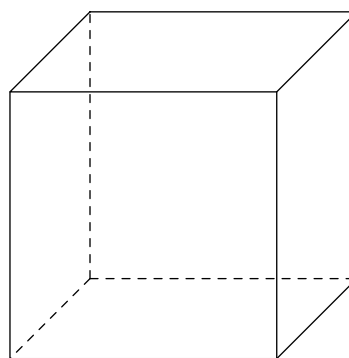
Параллелепипед

Параллелепипед — это призма, основанием которой служит параллелограмм.

Таким образом, все грани параллелепипеда являются параллелограммами. На рис. 6 изображены *наклонный параллелепипед* (боковые рёбра которого наклонены к плоскости основания) и *прямой параллелепипед* (боковые рёбра которого перпендикулярны плоскости основания).



Наклонный параллелепипед



Прямой параллелепипед

Рис. 6. Параллелепипед

Подчеркнём, что в основании (прямого) параллелепипеда может лежать какой угодно параллелограмм. Особый интерес представляет следующий частный случай.

Прямоугольный параллелепипед — это прямая призма, в основании которой лежит прямоугольник.

Изображается прямоугольный параллелепипед точно так же, как и прямой параллелепипед на рис. 6 (ведь на таких чертежах невозможно передать информацию о величине углов).

Диагональю параллелепипеда называется отрезок, который соединяет вершины параллелепипеда, на принадлежащие одной грани. Всего у параллелепипеда восемь вершин, так что имеются четыре диагонали (рис. 7).

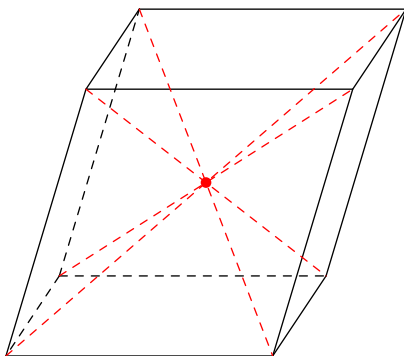


Рис. 7. Диагонали параллелепипеда

Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке, которая является центром симметрии параллелепипеда.

Объём и площадь поверхности призмы

Объём призмы вычисляется по формуле:

$$V = Sh,$$

где S — площадь основания призмы, h — её высота. При этом *высотой* призмы называется общий перпендикуляр к основаниям призмы (а также длина этого перпендикуляра, рис. 8).

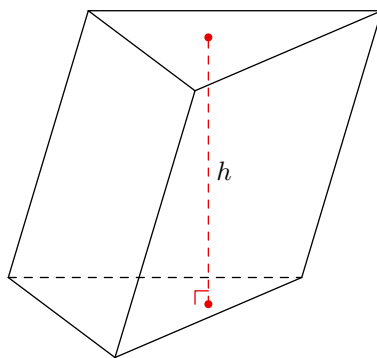


Рис. 8. Высота призмы

У прямой призмы высота совпадает с боковым ребром.

Особенно просто вычисляется объём прямоугольного параллелепипеда. Если его боковое ребро равно c , а в основании лежит прямоугольник со сторонами a и b , то площадь основания $S = ab$, и тогда объём:

$$S = abc.$$

Площадь боковой поверхности призмы — это сумма площадей её боковых граней.

Площадь поверхности призмы — это сумма площадей всех её граней. Ясно, что площадь поверхности призмы равна сумме площади боковой поверхности и площадей двух оснований.

Никаких формул для площади боковой или полной поверхности мы приводить не будем. Запоминать их смысла нет — лучше вычислять эти площади непосредственно в каждой конкретной задаче.

Взаимное расположение прямых в пространстве

Существует три варианта взаимного расположения двух прямых в пространстве: прямые могут быть *пересекающимися*, *параллельными* и *скрещивающимися*.

Пересекающиеся прямые

Две различные прямые называются *пересекающимися*, если они имеют общую точку. Точка пересечения единственна: если две прямые имеют две общие точки, то они совпадают.

Пересекающиеся прямые изображены на рис. 1. Прямые a и b , как видим, пересекаются в точке A .

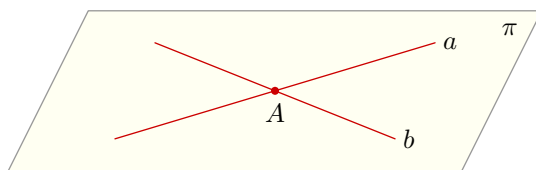


Рис. 1. Пересекающиеся прямые

Заметьте, что существует единственная плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые. Это также показано на рис. 1: через прямые a и b проходит единственная плоскость π .

Вопрос. Прямая a пересекает прямую b , прямая b пересекает прямую c . Верно ли, что прямые a и c пересекаются?

Параллельные прямые

Ещё с седьмого класса вы помните, что «параллельные прямые — это те, которые не пересекаются». В пространстве, однако, для параллельности прямых нужно одно дополнительное условие.

Определение. Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Таким образом, помимо «непересечения» требуется, чтобы прямые лежали в одной плоскости. На рис. 2 показаны параллельные прямые a и b ; через них проходит (единственная) плоскость π .

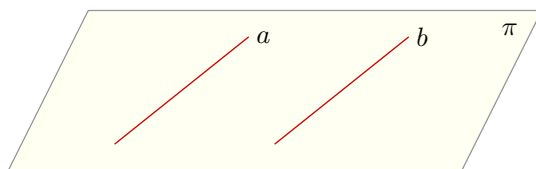


Рис. 2. Параллельные прямые

Параллельность обладает важным свойством *транзитивности*. Именно, для трёх различных прямых a , b и c выполнено:

$$a \parallel b \text{ и } b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$$

(две различные прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой).

Скрещивающиеся прямые

Если две прямые пересекаются или параллельны, то, как мы видели, через них можно провести плоскость (и притом единственную). Возможна также ситуация, когда через две прямые плоскость провести нельзя.

Определение. Две прямые называются скрещивающимися, если они не параллельны и не пересекаются.

Равносильное определение такое: *две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.*

На рис. 3 показаны скрещивающиеся прямые a и b .

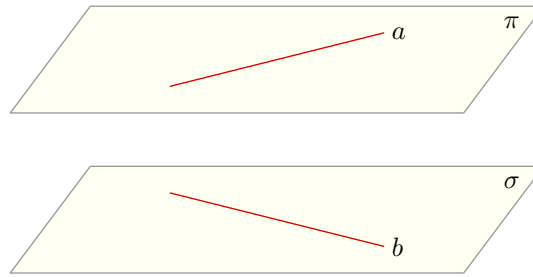


Рис. 3. Скрещивающиеся прямые

Важный факт состоит в том, что через две скрещивающиеся прямые можно провести две параллельные плоскости¹. Именно, *если прямые a и b скрещиваются, то существует единственная пара плоскостей π и σ таких, что $a \subset \pi$, $b \subset \sigma$ и $\pi \parallel \sigma$.* Это и показано на рис. 3.

Все три рассмотренных варианта взаимного расположения прямых можно видеть в треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 4).

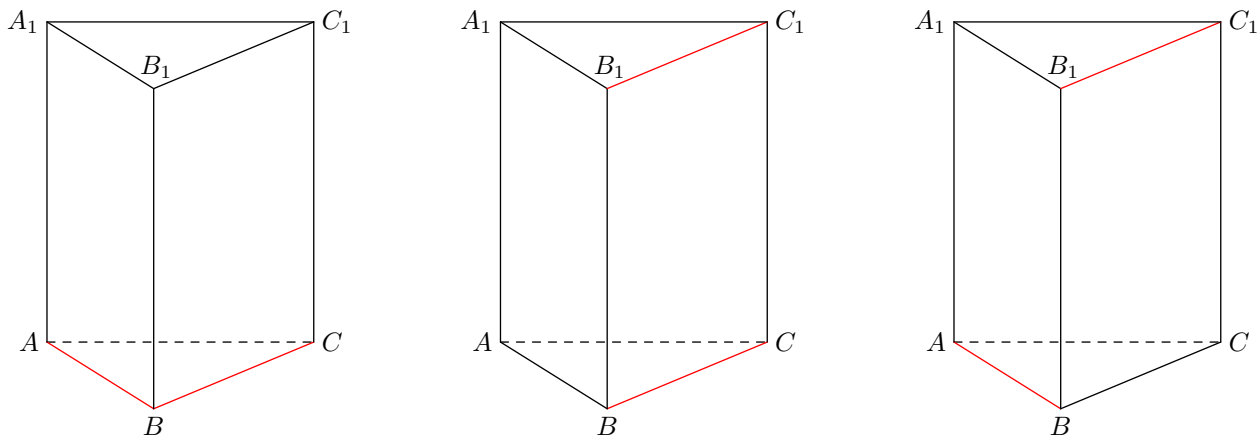


Рис. 4. Взаимное расположение двух прямых

Именно, прямые AB и BC пересекаются (левый рисунок); прямые BC и B_1C_1 параллельны (рисунок в центре); прямые AB и B_1C_1 скрещиваются (правый рисунок).

¹Плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.