

Тема: Действия над комплексными числами в различных формах

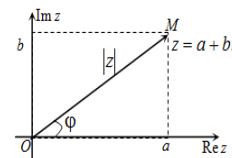
Цель: научиться переводить комплексные числа и выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

Краткие теоретические сведения.

Для всякого комплексного числа $z = a + ib$ справедливо равенство:
 $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называют *тригонометрической формой комплексного числа*,
 $z = Re^{i\varphi}$ – называют *показательной формой комплексного числа*

Здесь $R = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ - *модуль комплексного числа* - расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, *модуль – это длина радиус-вектора*.

Угол φ между положительной полуосью действительной оси и радиус-вектором, проведенным из начала координат к соответствующей точке, называется *аргументом комплексного числа* - $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$.



Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

В тригонометрической форме $z_1 = R_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = R_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$		В показательной форме $Z_1 = R_1e^{i\varphi_1}, Z_2 = R_2e^{i\varphi_2}$
Умножение	$Z_1 \cdot Z_2 = R_1 \cdot R_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$	$Z_1 \cdot Z_2 = R_1 R_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Деление	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1}{R_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$	$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{R_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$
Возведение в степень	$z^n = R^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ - <i>формула Муавра</i>	$Z_1^n = R_1 e^{in\varphi_1}.$
Извлечение корня	$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{R} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$	$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{R} e^{i\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)},$ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Примеры решения задач:

Пример. А) Представить числа $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = 3 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической и показательной форме,

Б) вычислить в тригонометрической форме: 1) $z_1 \cdot z_2$; 2) $\frac{z_1}{z_2}$; 3) z_2^5 ; 4) $\sqrt{z_1}$

Решение: А). Получим тригонометрическую и показательную форму $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$,

1) Найдем модуль числа - $R_1 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, 2) Найдем аргумент числа -
 $\varphi_1 = \arctg \left(\frac{-\sqrt{3}}{1} \right) = -\arctg \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3},$

3) запишем к.ч. в тригонометрической и показательной форме:

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i\sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}.$$

$$z_2 = 2 + 2i,$$

1) $R_2 = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ - модуль числа,

2) $\varphi_2 = \arctg \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{\pi}{6}$ - аргумент числа

3) запишем к.ч. в тригонометрической и показательной форме:

$$z_2 = 3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i\sin \frac{\pi}{6} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Б) Произведение:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 2\sqrt{3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = 4\sqrt{3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) =$$

$$= 4\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 4\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 6 - 2\sqrt{3}i.$$

Частное:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2\sqrt{3}} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} (0 - 1i) = \frac{\sqrt{3}}{3} i.$$

Возведение в степень:

$$z_2^5 = \left(2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right)^5 = (2\sqrt{3})^5 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 288\sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) =$$

$$= 288\sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 432 = 144i.$$

Извлечение из под знака корня:

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{2} \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2} \right).$$

$$\text{Пр } k=0: z_0 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i;$$

$$\text{Пр } k=1: z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi}{2} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = -z_0.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Изобразить комплексные числа на комплексной плоскости.
2. Определить длину и аргумент каждого комплексного числа.
3. Представить данные комплексные числа в тригонометрической и показательной форме.
4. Вычислить в тригонометрической и показательной формах:

$$1) z_1 \cdot z_2; \quad 2) \frac{z_1}{z_2}; \quad 3) z_2^3; \quad 4) \sqrt{z_1}$$

<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>
$Z_1 = 2 - 2i;$ $Z_2 = -\sqrt{3} + i$	$Z_1 = 2\sqrt{3} + 2i;$ $Z_2 = 3 + 3\sqrt{3}i$	$Z_1 = 1 - i;$ $Z_2 = -2 - 2i$	$Z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i;$ $Z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$