

Тема: Среднеквадратичное отклонение случайной величины.

Цель:

рассмотреть понятие «среднее квадратичное отклонение»;
рассмотреть среднее квадратичное отклонение в рядах распределения;
рассмотреть среднее квадратичное отклонение случайных величин.

Теоретический материал

Среднее квадратическое отклонение

Среднеквадратическое отклонение равно квадратному корню из дисперсии: $\sigma = \sqrt{D}$

При определении среднего квадратического отклонения при достаточно большом объеме изучаемой совокупности ($n > 30$) применяются формулы:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{— среднее квадратическое отклонение простое (или невзвешенное);}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}} \quad \text{— среднее квадратическое отклонение взвешенное, где:}$$

x_i — значения изучаемого признака (варианты);

n — объем статистической совокупности;

\bar{x} — средняя арифметическая величина.

Среднее квадратическое отклонение характеризует разброс значений относительно среднего (математического ожидания). Обозначается как $\sigma(x)$ или $s(x)$.

Рассчитать среднеквадратическое отклонение можно разными калькуляторами, в зависимости от исходных данных. Ниже представлены наиболее распространенные из них.

Среднее квадратическое отклонение в рядах распределения

1. Равномерное распределение

$$\text{Дисперсия: } D[X] = \frac{(b - a)^2}{12}$$

$$\text{Среднеквадратическое отклонение: } \sigma = \sqrt{D}$$

2. Нормальное распределение

$$\text{Дисперсия: } D[X] = \sigma^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - a)^2 n_i}{\sum n_i}$$

$$\text{Среднеквадратическое отклонение: } \sigma = \sqrt{D}$$

3. Показательное распределение

Дисперсия: $D[X] = 1/\lambda^2$

Среднеквадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{D}$

4. Распределение Пуассона

Дисперсия

$$D[X] = \frac{\sum (x_i - \lambda)n_i}{\sum n_i}$$

Среднеквадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{D}$

5. Биномиальное распределение

Дисперсия

$$D[X] = \sum x^2 p_i - M[X]^2$$

Среднеквадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{D}$

Среднее квадратическое отклонение случайных величин

1. Дискретной случайной величины

Дисперсия $d = \sum x^2 p_i - M[x]^2$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(x) = \sqrt{D[X]}$

2. Непрерывной случайной величины

Дисперсия $D[x] = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - M[x]^2$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(x) = \sqrt{D[X]}$

3. Системы случайных величин

Выборочные средние:

$$\bar{x} = (20(2 + 4) + 30(6 + 3) + 40(6 + 45 + 4) + 50(2 + 8 + 6) + 60(4 + 7 + 3))/100 = 42.3$$

$$\bar{y} = (20(2 + 4) + 30(6 + 3) + 40(6 + 45 + 4) + 50(2 + 8 + 6) + 60(4 + 7 + 3))/100 = 25.3$$

Дисперсии:

$$\sigma_x^2 = (20^2(2 + 4) + 30^2(6 + 3) + 40^2(6 + 45 + 4) + 50^2(2 + 8 + 6) + 60^2(4 + 7 + 3))/100 - 42.3^2 = 99.71$$

$$\sigma_y^2 = (11^2(2) + 16^2(4 + 6) + 21^2(3 + 6 + 2) + 26^2(45 + 8 + 4) + 31^2(4 + 6 + 7) + 36^2(3))/100 - 25.3^2 = 24.01$$

Среднеквадратические отклонения: $\sigma_x = 9.99$ и $\sigma_y = 4.9$

Рассмотрим на примере. Допустим, вы с друзьями решили измерить рост ваших собак (в миллиметрах). В результате измерений вы получили следующие данные измерений роста (в холке): 600 мм, 470 мм, 170 мм, 430 мм и 300 мм.

Порода собаки	Рост в миллиметрах
Ротвейлер	600

Бульдог	470
Такса	170
Пудель	430
Мопс	300

Вычислим среднее значение, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

Сперва найдём среднее значение. Как вы уже знаете, для этого нужно сложить все измеренные значения и поделить на количество измерений. Ход вычислений:

$$\text{Среднее} = \frac{600+470+170+430+300}{5} = 394_{\text{мм.}}$$

Итак, среднее (среднеарифметическое) составляет 394 мм.

Теперь нужно определить **отклонение роста каждой из собак от среднего:**

$$1 : 600 - 394 = 206$$

$$2 : 470 - 394 = 76$$

$$3 : 170 - 394 = -224$$

$$4 : 430 - 394 = 36$$

$$5 : 300 - 394 = -94$$

Наконец, **чтобы вычислить дисперсию**, каждую из полученных разностей возводим в квадрат, а затем находим среднее арифметическое от полученных результатов:

$$\text{Дисперсия} = \frac{206^2+76^2+(-224)^2+36^2+(-94)^2}{5} = 21704_{\text{мм}^2}.$$

Таким образом, дисперсия составляет 21704 мм².

Как найти среднеквадратическое отклонение

Так как же теперь вычислить среднеквадратическое отклонение, зная дисперсию? Как мы помним, взять из нее квадратный корень. То есть среднеквадратическое отклонение равно:

$$\sigma = \sqrt{21704} \approx 147_{\text{мм}} \text{ (округлено до ближайшего целого значения в мм).}$$

Применив данный метод, мы выяснили, что некоторые собаки (например, ротвейлеры) – очень большие собаки. Но есть и очень маленькие собаки (например, таксы, только говорить им этого не стоит).

Самое интересное, что среднеквадратическое отклонение несет в себе полезную информацию. Теперь мы можем показать, какие из полученных результатов измерения роста находятся в пределах интервала, который мы получим, если отложим от среднего (в обе стороны от него) среднеквадратическое отклонение.

То есть с помощью среднеквадратического отклонения мы получаем “стандартный” метод, который позволяет узнать, какое из значений является

нормальным (среднестатистическим), а какое экстраординарно большим или, наоборот, малым.

Практическая часть:

Найти среднее квадратичное отклонение от среднего значения элементов выборки:

1) 3 кг, 5 кг, 5 кг, 8 кг, 4 кг;

2) 12 м, 10 м, 7 м, 12 м, 9 м