

# 1. МАТРИЦЫ

Матрицы позволяют оперировать с массивами чисел, функций или математических символов и имеют широкие приложения в различных отраслях знания - таких, например, как математика, физика, информатика, экономика и так далее. Матрицы позволяют решать системы обычных или дифференциальных уравнений, предсказывать значения физических величин в квантовой теории, шифровать сообщения в Интернете, и многое другое.

## 1.2. Основные понятия

Прежде чем приступить к формальному обсуждению матриц, рассмотрим два простых примера.

1) Линейное уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \quad (*)$$

содержит два набора величин, один из которых включает в себя коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , а другой - неизвестные  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

Очевидно, что уравнение (\*) полностью определяется заданием массива коэффициентов  $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ .

Аналогично, массив коэффициентов

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \end{pmatrix}$$

определяет систему двух линейных уравнений с пятью неизвестными:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 + a_{1,5}x_5 = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 + a_{2,5}x_5 = 0 \end{cases} \quad (**)$$

Коэффициенты при переменных для удобства пронумерованы двумя индексами, первый из которых указывает номер уравнения, а второй - номер соответствующей переменной.

Умножая обе части уравнения на одно и то же число или прибавляя к одному уравнению другое, мы фактически производим операции над массивами коэффициентов.

2) Вектор в трехмерном пространстве задается упорядоченным набором трех своих координат:  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ . При этом линейные операции над векторами сводятся к линейным операциям над координатами.

Таким образом, при решении многих задач приходится оперировать не с отдельными величинами, а с их упорядоченными наборами.

**Матрицы** это такие прямоугольные массивы элементов, для которых определены операции сложения и умножения. В качестве элементов матрицы могут выступать числа, алгебраические символы или математические функции.

Размерность матрицы определяется числом ее строк и числом столбцов. Для обозначения размерности матрицы используется символ  $m \times n$ , который означает, что матрица имеет  $m$  строк и  $n$  столбцов. Сама матрица обозначается одной из заглавных букв латинского алфавита, а таблица ее элементов помещается в круглые скобки.

### Примеры.

$3 \times 2$ матрица	$2 \times 3$ матрица	$2 \times 2$ матрица
$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$

В общем случае элемент матрицы  $A$ , стоящий в  $i$ -ой строке и  $j$ -ом столбце, обозначается символом  $a_{i,j}$  или  $A_{i,j}$ .

Запись вида  $A = \|a_{i,j}\|$  означает, что матрица  $A$  составлена из элементов  $a_{i,j}$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \|a_{i,j}\|.$$

Часто запятую между индексами опускают и пишут  $A = \|a_{i,j}\|$ .

Запомните, что первый индекс указывает номер строки, а второй – номер столбца. В вышеприведенных примерах жирным шрифтом выделены матричные элементы  $a_{3,2} = 4$  и  $b_{1,2} = 5$ .

Матрица размерности  $1 \times n$  является **однострочной**:

$$(a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \dots \quad a_{1,n}).$$

Матрица размерности  $m \times 1$  является **одно столбцовой**:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \dots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}.$$

В **квадратной** матрице число строк совпадает с числом столбцов и это число определяет **порядок** матрицы. Так, матрица третьего порядка представляет собой матрицу размерности  $3 \times 3$ .

### 1.3. Операции над матрицами

#### Равенство матриц

Матрицы  $A = \|a_{i,j}\|$  и  $B = \|b_{i,j}\|$  равны, если их размерности совпадают, а соответствующие матричные элементы попарно равны.

$$A = B \Leftrightarrow a_{i,j} = b_{i,j} \\ \text{для всех наборов индексов } \{i, j\}.$$

**Примеры:**

- 1) Матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $B = (2 \ 0)$  составлены из одних и тех же элементов, но имеют разные размерности. Поэтому  $A \neq B$ .
- 2) Матрицы  $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  и  $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ , имеющие одинаковые размерности, составлены из одних и тех же элементов. Однако не все соответствующие матричные элементы попарно равны. Поэтому  $C \neq D$ .

#### Умножение матрицы на скаляр

Умножение матрицы  $A$  на скалярную величину  $\lambda$  (справа или слева) дает матрицу  $B$  той же размерности, что и  $A$ ; при этом каждый элемент матрицы умножается на  $\lambda$ :  $b_{i,j} = \lambda a_{i,j}$ .

$$\text{Чтобы умножить матрицу на скаляр } \lambda, \text{ нужно каждый} \\ \text{матричный элемент умножить на } \lambda: \\ B = \lambda A \Leftrightarrow b_{i,j} = \lambda a_{i,j}.$$

**Пример:** Если  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ , то  $5A = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 0 \\ 5 & 20 & -5 \end{pmatrix}$ .

### Сложение матриц

Операция сложения определена только для матриц одной и той же размерности. Результатом сложения матриц  $A = \|a_{i,j}\|$  и  $B = \|b_{i,j}\|$  является матрица  $C = \|c_{i,j}\|$  той же размерности, элементы которой равны сумме соответствующих матричных элементов  $a_{i,j}$  и  $b_{i,j}$ :

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Чтобы найти алгебраическую сумму матриц, нужно попарно сложить соответствующие матричные элементы:

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

---

**Пример:** Пусть  $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Тогда

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+6 & 7-15 & 1+3 \\ -1+4 & 2+1 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

---