

12 апреля, 10 т, часть 2

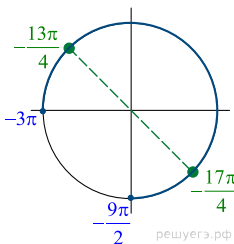
1. а) Решите уравнение $1 - 4\cos^2\left(x - \frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3}\cos 2x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

Решение.

а) Применим формулу приведения, понизим порядок уравнения, используем формулу косинуса суммы. Получаем:

$$1 - 4\cos^2\left(x - \frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow 1 - 4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow$$



$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2\left(1 - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right) - 1 = \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) - 1 = \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x - 1 = \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

б) Корни, принадлежащие заданному отрезку, отберем при помощи тригонометрической окружности. Получим числа $-\frac{17\pi}{4}; -\frac{13\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{4}; -\frac{13\pi}{4}$.

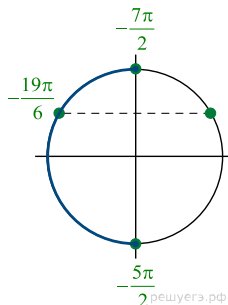
2. а) Решите уравнение $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\begin{aligned} 2\sin x \cos x &= \cos x \Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$. Получим числа: $-\frac{7\pi}{2}; -\frac{19\pi}{6}; -\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{7\pi}{2}; -\frac{19\pi}{6}; -\frac{5\pi}{2}$.

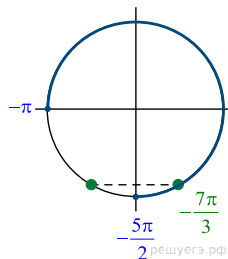
3. а) Решите уравнение $8\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 9$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\begin{aligned} 8\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x - 9 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3+72}}{8}, \\ \sin x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3+72}}{8}. \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \text{ решений нет} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$. Получим число $-\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$.

4. а) Решите уравнение $2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$.

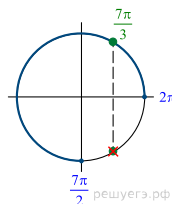
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Сгруппируем слагаемые и разложим левую часть уравнения на множители:

$$\begin{aligned} 2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 &= 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\cos^2 x + 1) - (\cos^2 x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\cos^2 x + 1)(2\cos x - 1) &= 0 \Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$. Получим числа $\frac{7\pi}{3}$



Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}$.

5. а) Решите уравнение $4\cos^2 x + 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.

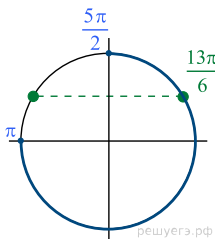
Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$4 - 4\sin^2 x - 4\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0.$$

Значит, или $\sin x = -\frac{3}{2}$ — уравнение не имеет корней, или $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$. Получим число $\frac{13\pi}{6}$.



Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.

6. а) Решите уравнение $7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x+1} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 2]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} 7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x+1} &= 0 \Leftrightarrow 7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 12 \cdot 4^{x^2-3x+1} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 7 \left(\frac{9}{4}\right)^{x^2-3x+1} + 5 \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} - 12 &= 0 \Leftrightarrow 7 \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}\right)^2 + 5 \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} = 1, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} = -\frac{12}{7}. \end{cases} \end{aligned}$$

У второго уравнения решений нет.

Преобразуем первое уравнение: $x^2 - 3x + 1 = 0$, откуда $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

б) Оценим $\sqrt{5}$ целыми числами: $2 < \sqrt{5} < 3$. Тогда

$$\frac{5}{2} < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < 3 \text{ и } 0 < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}.$$

Значит, отрезку $[-1; 2]$ принадлежит только $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: а) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; б) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

7. а) Решите уравнение: $9^x - 3^{x+2} + 14 = 0$.

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $[1; \sqrt{5}]$.

Решение.

а) Пусть $t = 3^x$, тогда исходное уравнение принимает вид $t^2 - 9t + 14 = 0$, откуда $t = 2$ или $t = 7$. Следовательно,

$$9^x - 9 \cdot 3^x + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 2, \\ 3^x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 2, \\ x = \log_3 7. \end{cases}$$

б) Поскольку $\log_3 2 < \log_3 3 = 1$, корень $\log_3 2$ не принадлежит отрезку $[1; \sqrt{5}]$. Поскольку $1 = \log_3 3 < \log_3 7 < \log_3 9 = 2 < \sqrt{5}$, корень $\log_3 7$ принадлежит отрезку $[1; \sqrt{5}]$.

Ответ: а) $\{\log_3 2; \log_3 7\}$, б) $\log_3 7$.

8. а) Решите уравнение $\log_2(x^2 - 5) \cdot \log_3^2(7 - x) + 3\log_2(x^2 - 5) - 2\log_3^2(7 - x) - 6 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\log_2 \frac{1}{7}; \log_2 9\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned}
& \log_2(x^2 - 5) \cdot \log_3^2(7 - x) + 3 \log_2(x^2 - 5) - 2 \log_3^2(7 - x) - 6 = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 5) \cdot (\log_3^2(7 - x) + 3) - 2(\log_3^2(7 - x) + 3) = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (\log_2(x^2 - 5) - 2)(\log_3^2(7 - x) + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x^2 - 5) - 2 = 0, & x < 7, \\ \log_3^2(7 - x) + 3 = 0, & x^2 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7, \\ \log_2(x^2 - 5) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7, \\ x^2 - 5 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = -3. \end{cases}
\end{aligned}$$

б) Заметим, что

$$-3 = \log_2 \frac{1}{8} < \log_2 \frac{1}{7} < 3 = \log_2 8 < \log_2 9,$$

поэтому в указанный промежуток попадает только корень $x = 3$.Ответ: а) $\{-3; 3\}$ б) 3.9. а) Решите уравнение $5 \cdot 4^{x^2+4x} + 20 \cdot 10^{x^2+4x-1} - 7 \cdot 25^{x^2+4x} = 0$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3; 1]$.**Решение.**а) Пусть $a = 2^{x^2+4x}$, $b = 5^{x^2+4x}$, тогда уравнение принимает вид

$$5a^2 + 2ab - 7b^2 = 0$$

Решим это уравнение, как квадратное относительно a .

$$\begin{aligned}
\frac{D}{4} &= b^2 + 5 \cdot 7b^2 = 36b^2 \\
a &= \frac{-b \pm 6b}{5} \\
\begin{cases} a = -\frac{7b}{5}, \\ a = b. \end{cases}
\end{aligned}$$

Вернёмся к исходной переменной:

1) Уравнение $2^{x^2+4x} = -\frac{7}{5} \cdot 5^{x^2+4x}$ корней не имеет2) $2^{x^2+4x} = 5^{x^2+4x} \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -4. \end{cases}$ б) Из чисел -4 и 0 отрезку $[-3; 1]$ принадлежит только число 0 Ответ: а) $-4; 0$; б) 0 .10. а) Решите уравнение $\log_3(3x^4 + 42) = 1 + \log_{\sqrt{3}} \sqrt{13x^2 + 2}$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5}{4}, 2\right]$.**Решение.**

Запишем исходное уравнение в виде:

$$\begin{aligned}
\log_3(3x^4 + 42) - \log_3 3 &= \log_3(13x^2 + 2) \Leftrightarrow \log_3(x^4 + 14) = \log_3(13x^2 + 2) \Leftrightarrow \\
x^4 + 14 &= 13x^2 + 2 \Leftrightarrow x^4 - 13x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 12) = 0.
\end{aligned}$$

Значит, либо $x^2 - 1 = 0$, откуда $x = -1$ или $x = 1$, либо $x^2 - 12 = 0$, откуда $x = -2\sqrt{3}$ или $x = 2\sqrt{3}$.Поскольку $-2\sqrt{3} < -\frac{5}{4} < -1 < 1 < 2 < 2\sqrt{3}$, отрезку $\left[-\frac{5}{4}, 2\right]$ принадлежат корни $x = -1$ и $x = 1$.Ответ: а) $x = \pm 2\sqrt{3}, x = \pm 1$, б) ± 1 .

Ключ

№ п/п	№ задания	Ответ
1	522122	а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{4}$; $-\frac{13\pi}{4}$.
2	514519	а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$.
3	541822	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}$.
4	500386	а) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.
5	516779	а) $\{\log_3 2; \log_3 7\}$; б) $\log_3 7$.
6	550261	а) $\{-3; 3\}$ б) 3.
7	515705	а) -4 ; 0; б) 0.