

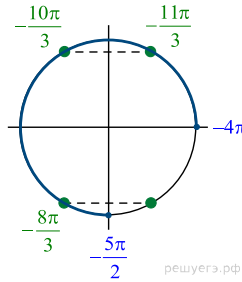
1. а) Решите уравнение $\cos 2x + \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = 0,25$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x = 0,25 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right]$. Получим числа:

$$-\frac{11\pi}{3}, -\frac{10\pi}{3}, -\frac{8\pi}{3}.$$

Ответ: а) $\left\{ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}$.

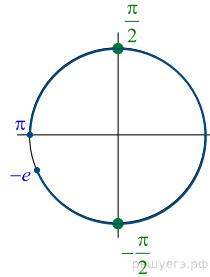
2. а) Решите уравнение $\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \sqrt{7} \cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-e; \pi]$.

Решение.

а) Используем формулу разности квадратов, затем формулы суммы и разности синусов:

$$\begin{aligned} \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) &= \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \sqrt{7} \cos x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) &= \sqrt{7} \cos x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right) \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right) &= \sqrt{7} \cos x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin x \cdot 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos x &= \sqrt{7} \cos x \Leftrightarrow \cos x (2 \sin x - \sqrt{7}) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{\sqrt{7}}{2} > 1 \end{cases} &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



б) Отберём корни при помощи единичной окружности. Получим $\pm \frac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\pm \frac{\pi}{2}$.

3. а) Решите уравнение $\cos 2x - 5\sqrt{2} \cos x - 5 = 0$.

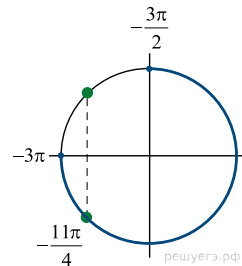
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\cos^2 x - 1 - 5\sqrt{2} \cos x - 5 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x + \sqrt{2})(\cos x - 3\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = 3\sqrt{2}, \text{ решений нет} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$. Получим число $-\frac{11\pi}{4}$.



Ответ: а) $\left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{11\pi}{4}$.

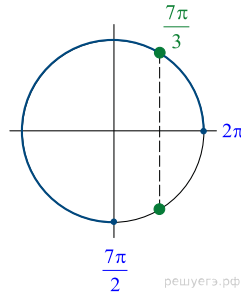
4. а) Решите уравнение $\frac{4}{\sin^2 \left(\frac{7\pi}{2} - x \right)} - \frac{11}{\cos x} + 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2} \right]$.

Решение.

а) Заметим, что $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$,
 поэтому $\sin^2\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = \cos^2 x$.

Пусть $\frac{1}{\cos x} = t$, тогда $4t^2 - 11t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{4}, \\ t = 2. \end{cases}$



Откуда

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos x} = \frac{3}{4}, \\ \frac{1}{\cos x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{4}{3}, \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{4}{3}, \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни при помощи тригонометрической окружности:

Получим число $\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{7\pi}{3}$.

5. а) Решите уравнение $|\cos x + \sin x| = \sqrt{2} \sin 2x$.

б) Найдите решения уравнения, принадлежащие отрезку $[3; 5]$.

Решение.

а) Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$|\cos x + \sin x| = \sqrt{2} \sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x + \sin x)^2 = 2 \sin^2 2x, \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sin 2x = 2 \sin^2 2x, \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1; \\ \sin 2x = -\frac{1}{2}, \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) Если $k \leq 0$, то $x \leq \frac{\pi}{4} < 1$, поэтому при таких k решений на отрезке $[3; 5]$ нет.

Если $k = 1$, то $x = \frac{5\pi}{4}$. Заметим, что $3 = \frac{12}{4} < \frac{5\pi}{4} < \frac{20}{4} = 5$, поэтому корень $\frac{5\pi}{4}$ лежит на отрезке $[3; 5]$.

Если $k \geq 2$, то $x \geq \frac{9\pi}{4} > 6$, поэтому при таких k решений на отрезке $[3; 5]$ нет.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}, \frac{5\pi}{4}$.

6. а) Решите уравнение $6 \log_8^2 x - 5 \log_8 x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 2.5]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$(3 \log_8 x - 1)(2 \log_8 x - 1) = 0.$$

Значит, $3 \log_8 x = 1$, откуда $x = 2$, или $2 \log_8 x = 1$, откуда $x = 2\sqrt{2}$.

б) Заметим, что $2 < 2.5 = \sqrt{6.25} < \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Значит, указанному отрезку принадлежит корень 2.

Ответ: а) 2 и $2\sqrt{2}$; б) 2.

7. а) Решите уравнение: $4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$.

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $[2; \sqrt{10}]$.

Решение.

а) Пусть $t = 2^x$, тогда исходное уравнение принимает вид $t^2 - 8t + 15 = 0$, откуда $t = 3$ или $t = 5$. Следовательно,

$$2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 3, \\ 2^x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 3, \\ x = \log_2 5. \end{cases}$$

б) Поскольку $\log_2 3 < \log_2 4 = 2$, корень $\log_2 3$ не принадлежит отрезку $[2; \sqrt{10}]$. Поскольку $2 = \log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8 = 3 < \sqrt{10}$, корень $\log_2 5$ принадлежит отрезку $[2; \sqrt{10}]$.

Ответ: а) $\{\log_2 3; \log_2 5\}$; б) $\log_2 5$.

8. а) Решите уравнение $\log_5(x^2 - 4x) = 1$.

б) Укажите его корни на отрезке $[\log_3 0, 1; \log_3 10]$.

Решение.

а) Решим уравнение:

$$\log_5(x^2 - 4x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 5. \end{cases}$$

б) Поскольку

$$\log_3 \frac{1}{10} < \log_3 \frac{1}{3} = -1 < \log_3 10 < \log_3 243 = 5,$$

на заданном отрезке лежит только -1 .Ответ: а) $\{-1; 5\}$, б) -1 .9. а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.**Решение.**а) Заметим, что $9^{(x-\frac{1}{2})} = 9^{(x-1+\frac{1}{2})} = 9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{(x-1)} = 3 \cdot 9^{(x-1)}$, преобразуем исходное уравнение:

$$9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 9^{x-1} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0.$$

Пусть $t = 3^{x-1}$, тогда уравнение запишется в виде $3t^2 - 8t + 5 = 0$, откуда $t = 1$ или $t = \frac{5}{3}$.При $t = 1$ получим: $3^{x-1} = 1$ откуда $x = 1$.При $t = \frac{5}{3}$ получим: $3^{x-1} = \frac{5}{3}$ откуда $x = \log_3 5$.б) Корень $x = 1$ не принадлежит промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$. Поскольку $1 < \log_3 5$ и $\log_3 5 < \log_3 9 = 2 < \frac{7}{3}$, корень $x = \log_3 5$ принадлежит промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.Ответ: а) $1, \log_3 5$; б) $\log_3 5$.10. а) Решите уравнение $\log_3(x^2 - 24x) = 4$.б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_2 0, 1; 12\sqrt{5}]$.**Решение.**

а) Из уравнения получаем:

$$x^2 - 24x = 81 \Leftrightarrow (x+3)(x-27) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ x = 27. \end{cases}$$

б) Заметим, что $\log_2 0, 1 < \log_2 0, 125 = -3 < 12\sqrt{5} = \sqrt{720} < \sqrt{729} = 27$. Значит, указанному отрезку принадлежит корень -3 .Ответ: а) -3 и 27 ; б) -3 .

Ключ

№ п/п	№ задания	Ответ
1	514505	а) $\left\{-\frac{\pi}{3}+2\pi k, -\frac{2\pi}{3}+2\pi k, \frac{\pi}{3}+2\pi k, \frac{2\pi}{3}+2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}$.
2	560429	а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\pm \frac{\pi}{2}$.
3	510106	а) $\left\{-\frac{3\pi}{4}+2\pi k, \frac{3\pi}{4}+2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{11\pi}{4}$.
4	519634	а) $\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi k, -\frac{\pi}{3}+2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{7\pi}{3}$.
5	484545	$\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}, \frac{5\pi}{4}$.
6	514623	а) 2 и $2\sqrt{2}$; б) 2.
7	516760	а) $\{\log_2 3; \log_2 5\}$; б) $\log_2 5$.
8	548495	а) $\{-1; 5\}$; б) -1 .
9	502094	а) 1, $\log_3 5$; б) $\log_3 5$.
10	517746	а) -3 и 27; б) -3 .