

12 апреля, 10 т, часть 2

1. а) Решите уравнение $2\sin^2 x = 3\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4$.

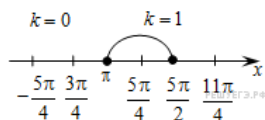
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Используем формулу приведения и основное тригонометрическое тождество

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x &= 3\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x) &= 3\sqrt{2}\cos x + 4 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{-3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{4}, \\ \cos x = \frac{-3\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = -\sqrt{2} \end{cases} \mid_{|\cos x| \leq 1} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

б) Отберём корни, лежащие на заданном отрезке (см. рис.).



Искомый корень: $\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{5\pi}{4}$.

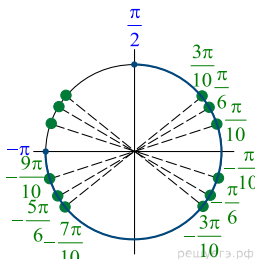
2. а) Решите уравнение $\cos 3x - \sin\left(7x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos 5x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} \cos 3x - \sin\left(7x - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos 5x \Leftrightarrow \cos 3x + \cos 7x = \cos 5x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\cos 5x \cos 2x - \cos 5x &= 0 \Leftrightarrow \cos 5x(2\cos 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 5x = 0, \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k. \end{cases} \end{aligned}$$



б) Отберём корни при помощи тригонометрической окружности (см. рис.). На заданном промежутке лежат корни: $-\frac{9\pi}{10}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{7\pi}{10}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{10}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{10}$.

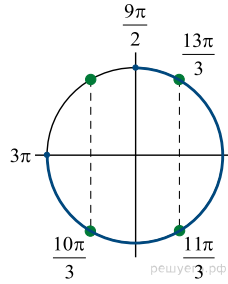
Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, \pm \frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{9\pi}{10}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{7\pi}{10}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{10}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{10}$.

3. а) Решите уравнение: $\cos 2x + \sin^2 x = 0,25$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi, \frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде:



$$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = 0.25 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi, \frac{9\pi}{2}\right]$. Получим числа $\frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + \pi k, \frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}$.

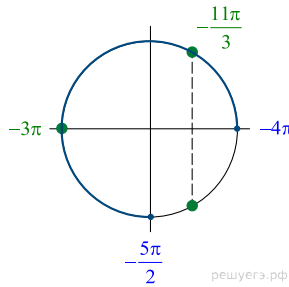
4. а) Решите уравнение $\cos x + \sqrt{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение, используя формулы

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \text{ и } \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = -\cos \frac{x}{2}:$$



$$2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} (2 \cos \frac{x}{2} - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0, \\ \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{3} + 4\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) На отрезке $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$ лежат корни -3π и $-\frac{11\pi}{3}$ (см. рис.).

Ответ: а) $\left\{\pi + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 4\pi k, -\frac{\pi}{3} + 4\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-3\pi; -\frac{11\pi}{3}$.

5. а) Решите уравнение $4 \sin^2 x - 12 \sin x + 5 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi, 2\pi]$.

Решение.

а) Сделаем замену $\sin x = y$ и получим квадратное уравнение $4y^2 - 12y + 5 = 0$, откуда, $y = \frac{1}{2}, y = \frac{5}{2}$. Уравнение $\sin x = \frac{5}{2}$ не имеет решений, а из уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ находим $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Найдем корни, принадлежащие отрезку $[-\pi, 2\pi]$. Решим неравенства:

$$\begin{aligned} -\pi &\leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{11}{12} \Leftrightarrow k = 0, x = \frac{\pi}{6}; \\ -\pi &\leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{11}{12} \leq k \leq \frac{7}{12} \Leftrightarrow k = 0, x = \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

Отрезку $[-\pi, 2\pi]$ принадлежат корни $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

6. а) Решите уравнение $4^{x^2-2x+1} + 4^{x^2-2x} = 20$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 2]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$4 \cdot 4^{x^2-2x} + 4^{x^2-2x} = 20 \Leftrightarrow 4^{x^2-2x} = 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Откуда $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

б) Оценим $\sqrt{2}$ сверху целыми числами: $1 < \sqrt{2} < 2$. Тогда

$$2 < 1 + \sqrt{2} < 3 \text{ и } -1 < 1 - \sqrt{2} < 0.$$

Значит, отрезку $[-1; 2]$ принадлежит только $x = 1 - \sqrt{2}$.

Ответ а) $x = 1 \pm \sqrt{2}$; б) $x = 1 - \sqrt{2}$.

7. а) Решите уравнение $4^{x-\frac{1}{2}} - 6 \cdot 2^{x-1} + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(0; 2)$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение, получим: $4^x - 6 \cdot 2^x + 6 = 0$. Пусть $t = 2^x$, тогда уравнение запишется в виде $t^2 - 6t + 6 = 0$, откуда $t = 3 \pm \sqrt{3}$. Возвращаясь к исходной переменной, имеем: $2^x = 3 \pm \sqrt{3}$, откуда $x = \log_2(3 \pm \sqrt{3})$.

б) Корень $x = \log_2(3 + \sqrt{3})$ не принадлежит промежутку $(0; 2)$, поскольку $2^2 < 3 + \sqrt{3}$, корень $x = \log_2(3 - \sqrt{3})$ принадлежит промежутку $(0; 2)$.

Ответ: а) $x = \log_2(3 \pm \sqrt{3})$, б) $\log_2(3 - \sqrt{3})$.

8. а) Решите уравнение $\log_5(2-x) = \log_{25}x^4$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\log_5(2-x) = \log_5 x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = x^2, \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = 1. \end{cases}$$

б) Поскольку $\log_9 \frac{1}{82} < -2 < \log_9 8 < 1$, отрезку $\left[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8\right]$ принадлежит единственный корень -2 .

Ответ: а) $-2; 1$, б) -2 .

9. а) Решите уравнение $1 + \log_2(9x^2 + 1) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2x^4 + 42}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$.

Решение.

Запишем исходное уравнение в виде:

$$\log_2(9x^2 + 1) = \log_2(2x^4 + 42) - \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(9x^2 + 1) = \log_2(x^4 + 21) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 + 1 = x^4 + 21, \\ x^4 + 21 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9x^2 + 1 = x^4 + 21 \Leftrightarrow x^4 - 9x^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 5) = 0.$$

Значит, либо $x^2 - 4 = 0$, откуда $x = -2$ или $x = 2$, либо $x^2 - 5 = 0$, откуда $x = -\sqrt{5}$ или $x = \sqrt{5}$.

б) Поскольку $-\sqrt{5} < -2 < \frac{3}{2} < 2 < \sqrt{5} < \frac{5}{2}$, отрезку принадлежат корни $x = 2$ и $x = \sqrt{5}$.

Ответ: а) $\{\pm\sqrt{5}, \pm 2\}$; б) $2, \sqrt{5}$.

10. а) Решите уравнение $2^{2x^2} - (2^3 + 2^8) \cdot 2^{x^2+2x} + 2^{11+4x} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $(1 + \log_2 0,25; \log_2 16, 1]$.

Решение.

а) Разделим обе части уравнения на положительное выражение 2^{4x} и решим квадратное уравнение:

$$2^{2x^2} - (2^3 + 2^8) \cdot 2^{x^2+2x} + 2^{11+4x} = 0 \Leftrightarrow 2^{2x^2-4x} - (2^3 + 2^8) \cdot 2^{x^2-2x} + 2^{11} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2^{x^2-2x})^2 - (2^3 + 2^8) \cdot 2^{x^2-2x} + 2^3 \cdot 2^8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-2x} = 2^3, \\ 2^{x^2-2x} = 2^8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0, \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = -1, \\ x = 4, \\ x = -2. \end{cases}$$

б) Заметим, что $1 + \log_2 0,25 = 1 - 2 = -1$ и $\log_2 16, 1 > \log_2 16 = 4$, поэтому на заданном промежутке лежат корни $x = 3$ и $x = 4$.

Ответ: а) $\{-2; -1; 3; 4\}$, б) $\{3; 4\}$.

Ключ

№ п/п	№ задания	Ответ
1	514473	а) $\left\{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}; 6) \frac{5\pi}{4}.$
2	553312	а) $\left\{\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, \pm \frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}; 6) -\frac{9\pi}{10}, -\frac{5\pi}{6},$ $-\frac{7\pi}{10}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{10}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{10}.$
3	501482	а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + \pi k, \frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}; 6) \frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}; \frac{13\pi}{3}.$
4	505449	а) $\left\{\pi + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 4\pi k, -\frac{\pi}{3} + 4\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}; 6)$ $-3\pi; -\frac{11\pi}{3}.$
5	511374	а) $x = \log_2(3 \pm \sqrt{3}), 6) \log_2(3 - \sqrt{3}).$
6	514082	а) $-2; 1, 6) -2.$
7	555583	а) $\{-2; -1; 3; 4\}, 6) \{3; 4\}.$