

12 апреля, 10 т, часть 2

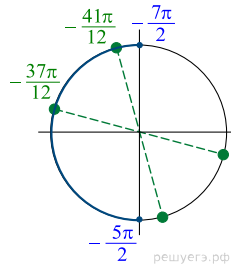
1. а) Решите уравнение  $8 \sin^2 \left( \frac{7\pi}{12} + x \right) - 2\sqrt{3} \cos 2x = 5$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2} \right]$ .

Решение.

а) Заметим, что  $\sin \left( \frac{7\pi}{12} + x \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} + x \right) = \cos \left( \frac{\pi}{12} + x \right)$ . Преобразуем уравнение:

$$8 \sin^2 \left( \frac{7\pi}{12} + x \right) - 2\sqrt{3} \cos 2x = 5 \Leftrightarrow 8 \cos^2 \left( \frac{\pi}{12} + x \right) - 2\sqrt{3} \cos 2x = 5 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow 4 \left( 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{12} + x \right) - 1 \right) + 4 - 2\sqrt{3} \cos 2x = 5 \Leftrightarrow 4 \cos \left( \frac{\pi}{6} + 2x \right) + 4 - 2\sqrt{3} \cos 2x = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + 4 - 2\sqrt{3} \cos 2x = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \cos 2x - 2 \sin 2x - 2\sqrt{3} \cos 2x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 2x = -1 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + \pi k, \\ x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности (см. рис.) отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[ -\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2} \right]$ . Получим числа  $-\frac{41\pi}{12}; -\frac{37\pi}{12}$ .

Ответ: а)  $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$ ,  $x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{41\pi}{12}; -\frac{37\pi}{12}$ .

2. а) Решите уравнение  $\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{7}{\operatorname{tg} x} + 5 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[3\pi; 4\pi]$ .

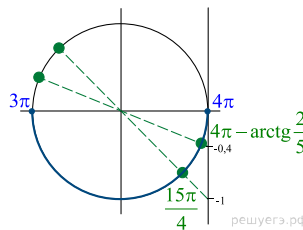
Решение.

а) Пусть  $t = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ , тогда  $2t^2 + 7t + 5 = 0$ , откуда  $t = -1$  или  $t = -\frac{5}{2}$ .

Имеем два уравнения:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} = -1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow x = -\arctg \frac{2}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности выберем корни уравнения на промежутке  $[3\pi; 4\pi]$ . Получим числа:  $\frac{15\pi}{4}; 4\pi - \arctg \frac{2}{5}$ .

Ответ: а)  $\left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi n, -\arctg \frac{2}{5} + \pi n : n \in \mathbb{Z} \right\}$ ; б)  $\frac{15\pi}{4}; 4\pi - \arctg \frac{2}{5}$ .

3. а) Решите уравнение  $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ \frac{\pi}{2}; 2\pi \right]$ .

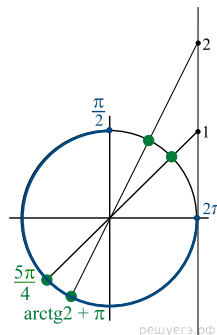
Решение.

а) Пусть  $t = \operatorname{tg} x$ , тогда уравнение запишется в виде:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = 2. \end{cases}$$

Далее имеем:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \arctg 2 + \pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[ \frac{\pi}{2}; 2\pi \right]$ . Получим числа  $\arctg 2 + \pi$  и  $\frac{5\pi}{4}$ .

Ответ: а)  $\left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k, \arctg 2 + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ ; б)  $\arctg 2 + \pi; \frac{5\pi}{4}$ .

4. а) Решите уравнение  $3 \cos 2x - 5 \sin x + 1 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

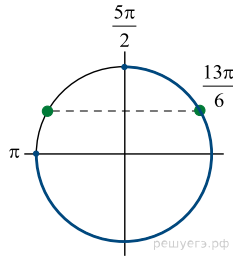
**Решение.**

Сведём уравнение к квадратному относительно синуса, используя формулу  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ . Имеем:

$$3 \cos 2x - 5 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3(1 - 2 \sin^2 x) - 5 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - 6 \sin^2 x - 5 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 \sin^2 x + 5 \sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$  (см. рис.), получим число  $\frac{13\pi}{6}$ .

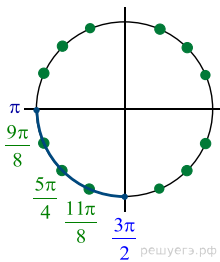
Ответ: а)  $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ ; б)  $\frac{13\pi}{6}$ .

5. а) Решите уравнение  $4 \sin^4 2x + 3 \cos 4x - 1 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

**Решение.**

а) Решим уравнение:



$$4 \sin^4 2x + 3 \cos 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4 \sin^4 2x + 3(1 - 2 \sin^2 2x) - 1 = 0 \Leftrightarrow 4 \sin^4 2x - 6 \sin^2 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 2x = 1, \\ \sin^2 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \pm 1, \\ \sin 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) Среди представленных корней отберем те, которые принадлежат отрезку  $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

Это числа  $\frac{9\pi}{8}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{8}$ .

Ответ: а)  $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ ; б)  $\frac{9\pi}{8}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{8}$ .

6. а) Решите уравнение  $9^{x+1} - 2 \cdot 3^{x+2} + 5 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left(\log_3 \frac{3}{2}, \sqrt{5}\right)$ .

**Решение.**

а) Преобразуем исходное уравнение:  $9^{x+1} - 6 \cdot 3^{x+1} + 5 = 0$ .

Пусть  $t = 3^{x+1}$ , тогда уравнение запишется в виде  $t^2 - 6t + 5 = 0$ , откуда  $t = 1$  или  $t = 5$ .

При  $t = 1$  получим  $3^{x+1} = 1$ , откуда  $x = -1$ .

При  $t = 5$  получим  $3^{x+1} = 5$ , откуда  $x = \log_3 \frac{5}{3}$ .

б) Так как  $-1 < 0 < \log_3 \frac{3}{2}$ , то корень  $x = -1$  не принадлежит промежутку  $\left(\log_3 \frac{3}{2}, \sqrt{5}\right)$ .

Поскольку  $\log_3 \frac{3}{2} < \log_3 \frac{5}{3} < \log_3 3 = 1 < \sqrt{5}$ , корень  $x = \log_3 \frac{5}{3}$  принадлежит промежутку  $\left(\log_3 \frac{3}{2}, \sqrt{5}\right)$ .

Ответ: а)  $-1, \log_3 \frac{5}{3}$ ; б)  $\log_3 \frac{5}{3}$ .

7. а) Решите уравнение  $\log_2^2(x^2) - 16 \log_2(2x) + 31 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[3; 6]$ .

**Решение.**

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$(2\log_2 x)^2 - 16(1 + \log_2 x) + 31 = 0 \Leftrightarrow 4\log_2^2(x) - 16\log_2(x) + 15 = 0 \Leftrightarrow (2\log_2 x - 3)(2\log_2 x - 5) = 0$$

Значит,  $\log_2 x = \frac{3}{2}$ , откуда  $x = 2\sqrt{2}$ , или  $\log_2 x = \frac{5}{2}$ , откуда  $x = 4\sqrt{2}$ .

б) Заметим, что  $2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3 < 4\sqrt{2} = \sqrt{32} < \sqrt{36} = 6$ . Значит, указанному отрезку принадлежит корень  $4\sqrt{2}$ .

Ответ: а)  $2\sqrt{2}$  и  $4\sqrt{2}$ ; б)  $4\sqrt{2}$ .

8. а) Решите уравнение  $8^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 2^{5-x} = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[\log_5 2; \log_5 20]$ .

**Решение.**

Умножим обе части уравнения на положительное выражение  $2^x$ , имеем:

$$16^x - 18 \cdot 4^x + 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x = 2, \\ 4^x = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,5, \\ x = 2. \end{cases}$$

В силу соотношений

$$\log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} < \log_5 20 < \log_5 25 = 2.$$

указанному отрезку принадлежит только корень  $\frac{1}{2}$ .

Ответ: а)  $\frac{1}{2}$  и 2; б)  $\frac{1}{2}$ .

9. а) Решите уравнение  $2\log_5^2 x - 3\log_9 x + 1 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[\sqrt{10}; \sqrt{99}]$ .

**Решение.**

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$(2\log_9 x - 1)(\log_9 x - 1) = 0.$$

Значит,  $2\log_9 x = 1$ , откуда  $x = 3$ , или  $\log_9 x = 1$ , откуда  $x = 9$ .

б) Заметим, что  $3 = \sqrt{9} < \sqrt{10} < 9 < \sqrt{99}$ . Значит, указанному отрезку принадлежит корень 9.

Ответ: а) 3 и 9; б) 9.

10. а) Решите уравнение  $\log_2(x^2 - 5) \cdot \log_3^2(7 - x) + 3\log_2(x^2 - 5) - 2\log_3^2(7 - x) - 6 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[\log_2 \frac{1}{7}; \log_2 9\right]$ .

**Решение.**

а) Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} \log_2(x^2 - 5) \cdot \log_3^2(7 - x) + 3\log_2(x^2 - 5) - 2\log_3^2(7 - x) - 6 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 5) \cdot (\log_3^2(7 - x) + 3) - 2(\log_3^2(7 - x) + 3) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\log_2(x^2 - 5) - 2)(\log_3^2(7 - x) + 3) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x^2 - 5) - 2 = 0, & x < 7, \\ \log_3^2(7 - x) + 3 = 0, & x^2 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7, \\ \log_2(x^2 - 5) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7, \\ x^2 - 5 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

б) Заметим, что

$$-3 = \log_2 \frac{1}{8} < \log_2 \frac{1}{7} < 3 = \log_2 8 < \log_2 9,$$

поэтому в указанный промежуток попадает только корень  $x = 3$ .

Ответ: а)  $\{-3; 3\}$  б) 3.

Ключ

№ п/п	№ задания	Ответ
1	521994	а) $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$ , $x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k$ , где $k \in \mathbb{Z}$ ; б) $-\frac{41\pi}{12}$ ; $-\frac{37\pi}{12}$ .
2	519632	а) $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi n, -\arctg \frac{2}{5} + \pi n : n \in \mathbb{Z}\right\}$ ; б) $\frac{15\pi}{4}$ ; $4\pi - \arctg \frac{2}{5}$ .
3	511407	а) $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k, \arctg 2 + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ ; б) $\arctg 2 + \pi$ ; $\frac{5\pi}{4}$ .
4	509947	а) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ ; б) $\frac{13\pi}{6}$ .
5	515762	а) $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ ; б) $\frac{9\pi}{8}$ ; $\frac{5\pi}{4}$ ; $\frac{11\pi}{8}$ .
6	518113	а) $2\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$ ; б) $4\sqrt{2}$ .
7	516798	а) $\frac{1}{2}$ и 2; б) $\frac{1}{2}$ .
8	514637	а) 3 и 9; б) 9.
9	550261	а) $\{-3; 3\}$ б) 3.