

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ГОРОДА МОСКВЫ
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение города Москвы
«ЮРИДИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
(ГБПОУ Юридический колледж)

ПЛАН-КОНСПЕКТ учебного занятия
по ОУДб.04 Математика
учебной дисциплине/междисциплинарному курсу
для обучающихся курс 1

Раздел 3. Геометрия
Тема 3.2. Многогранники и круглые тела
Занятие 22. Формулы объема пирамиды и конуса

Цель занятия: формировать основные понятия об объеме пирамиды и конуса.

Обучающая: основные методы построения призмы и цилиндра, решения задач по теме: «Формулы объема пирамиды и конуса»;

Воспитательная: воспитание ответственного отношения к учебному труду, воли и настойчивости для достижения конечных результатов;

Развивающая: развивать умение обобщать, систематизировать на основе сравнения, развивать логическое мышление, исследовательские навыки, функционального мышления, математической речи.

Базовый учебник:

1. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. М., Просвещение, 2019.

Дополнительная литература:

1. Башмаков М.И. Математика. М., «Академия», 2019
2. Богомолов Н.В. Сборник задач (учебное пособие) – М.: Дрофа, 2019.

Интернет-ресурсы:

Образовательный портал Решу ЕГЭ.

Форма доступа [http:// www.reshuege.ru](http://www.reshuege.ru)

Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов

Форма доступа www.school-collection.edu.ru

Открытый банк заданий по математике

Форма доступа [http:// www.mathege.ru](http://www.mathege.ru)

Информационные, тренировочные и контрольные материалы.

Форма доступа www.fcior.edu.ru

Междисциплинарные связи: алгебра и начала анализа, физика, естествознание

Внутридисциплинарные связи: геометрия

1.АКТУАЛИЗАЦИЯ РАНЕЕ ИЗУЧЕННОГО МАТЕРИАЛА УЧЕБНОГО КУРСА
(ответить на вопросы (тестовые задания) и провести самооценку усвоенного материала)

Таблица 1

Вопрос (тестовое задание)	Ответ
1. Сформулируйте определение конуса. 2. Какая фигура лежит в основании конуса? 3. Если прямоугольный треугольник вращается вокруг меньшего катета, то у конуса будет больше высота или радиус? 4. Назовите формулу площади основания конуса? 5. Какая фигура лежит в боковой поверхности конуса? 6. Назовите формулу площади боковой поверхности конуса? 7. Сформулируйте определение пирамиды. 8. Как называется пирамида, в основании которой пятиугольник? 9. Какая фигура лежит в основании правильной четырехугольной пирамиды? 10. Из каких фигур состоит боковая поверхность правильной четырехугольной пирамиды? 11. Назовите формулу площади основания треугольной пирамиды? 12. Какая фигура лежит в основании правильной треугольной пирамиды? 13. Назовите формулу площади полной поверхности пирамиды? 14. Сформулируйте определение правильной пирамиды. 15. Сформулируйте определение высоты пирамиды 16. Запишите формулу объема конуса и пирамиды.	

2. ИЗУЧАЕМЫЕ ВОПРОСЫ УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

Вопрос 1. Формулы объема пирамиды и конуса

3. Объем пирамиды. В пирамиде площади основания S и параллельных ему сечений $S(x)$ относятся как квадраты их расстояний от вершины (§ 83, п. 2). Примем в качестве оси Ox в пирамиде прямую, перпендикулярную к основанию, с началом в вершине пирамиды, таким образом, пределы интегрирования в (15.7) равны $a = 0$, $b = h$. Таким образом,

$$\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{h^2}$$

или

$$S(x) = \frac{S}{h^2} x^2.$$

Тогда объем пирамиды V равен

$$V = \int_0^h S(x) dx = \frac{S}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} Sh.$$

Таким образом, объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3} Sh. \quad (15.10)$$

4. Объем усеченной пирамиды. Представим себе усеченную пирамиду с площадями нижнего и верхнего основания, равными S_n и S_v соответственно и высотой h . Пусть высота полной пирамиды, образованной продолжением ребер усеченной до их пересечения в одной точке, равна $h + H$.

Объем усеченной пирамиды V равен разности между объемом полной пирамиды и объемом пирамиды, дополняющей усеченную до полной:

$$V = \frac{1}{3} S_n(H + h) - \frac{1}{3} S_v h. \quad (*)$$

По свойству параллельных сечений в пирамиде

$$\frac{S_n}{S_v} = \frac{(h + H)^2}{H^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{S_v}} = \frac{h + H}{H}.$$

Преобразуя пропорцию, получим

$$\frac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_v}}{\sqrt{S_v}} = \frac{h + H - H}{H}; \quad \frac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_v}}{\sqrt{S_v}} = \frac{h}{H}.$$

Отсюда

$$H = \frac{h\sqrt{S_B}}{\sqrt{S_H} - \sqrt{S_B}}. \quad (**)$$

Подставив (**) в (*) и упростив, приходим к формуле

$$V = \frac{h}{3} (S_H + S_B + \sqrt{S_H S_B}). \quad (15.11)$$

6. Объем конуса. Пусть конус, полученный в результате вращения прямоугольного треугольника OBA вокруг оси Ox (рис. 214), имеет радиус основания R и высоту h . Составим уравнение образующей OA :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{h} x,$$

где α — угол между осью конуса и его образующей.

По (15.12) объем V конуса составляет

$$V = \pi \int_0^h \frac{R^2}{h^2} x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi R^2 h,$$

т. е. объем конуса вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h. \quad (15.14)$$

7. Объем усеченного конуса. Пусть усеченный конус, образованный вращением прямоугольной трапеции $OABC$ вокруг оси Ox , имеет радиусы большего и меньшего оснований R и r соответственно и высоту h (рис. 215). Уравнение образующей AB этого конуса имеет вид $y = kx + b$, здесь угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha (R - r)/h$, α — угол между осью конуса и его образующей, b — ордината образующей в точке $x = 0$, $b = r$. Тогда уравнение образующей имеет вид

$$y = \frac{R - r}{h} x + r.$$

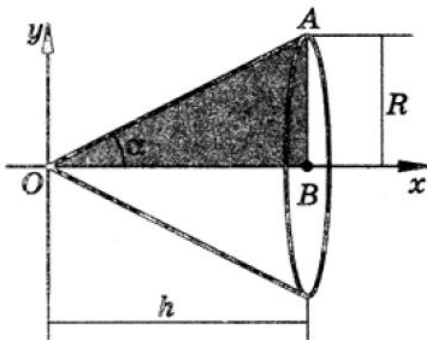


Рис. 214

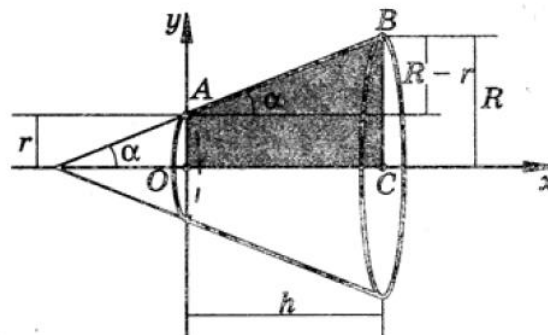


Рис. 215

По (15.12) объем V усеченного конуса

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h} x + r \right)^2 dx.$$

При интегрировании применим подстановку

$$\frac{R-r}{h} x + r = u, \quad \frac{R-r}{h} dx = du.$$

Находим новые пределы интегрирования:

$$u_0 = r, \quad u_1 = R.$$

Таким образом,

$$V = \pi \int_r^R u^2 \frac{h}{R-r} du = \frac{\pi h}{R-r} \int_r^R u^2 du = \frac{\pi h}{R-r} \cdot \frac{u^3}{3} \Big|_r^R = \frac{\pi h}{3(R-r)} (R^3 - r^3)$$

или

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr). \quad (15.15)$$

Задача 1.

Квадрат со стороной 3 см вращается вокруг своей диагонали. Найдите площадь поверхности тела вращения.

Задача 2.

Высота конуса равна 5 см, а угол при вершине осевого сечения равен 120° . Найдите объем конуса.

Задача 3.

В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45° . Найдите объем пирамиды.

Наименование изученного вопроса учебного занятия	Контрольное задание по изученному вопросу
Формулы объема пирамиды и конуса	Образующая конуса равна 4 см, а угол при вершине осевого сечения равен 90° . Найдите объем конуса.

4. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ НА СЛЕДУЮЩЕЕ ЗАНЯТИЕ

1. Решить задачу:

Найдите площадь полной поверхности тела, полученного при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом 8 см вокруг его оси симметрии.

2. Выучить определения.

Преподаватель

В.И. Древаль

