

# Оглавление

Введение .....	3
О системах счисления .....	4
<u>Глава 1.Троичная уравновешенная система счисления</u>	
§1. Определение троичной уравновешенной системы счисления .....	9
§2. Алгоритм перевода числа из десятичной системы счисления в уравновешенную троичную систему счисления .....	12
§3. Алгоритм перевода числа из троичной уравновешенной системы счисления в десятичную систему счисления .....	17
<i>Тест по главе 1</i> .....	21
<u>Глава 2. Арифметические операции в троичной уравновешенной системе счисления</u>	
§4. Операции сложения и вычитания .....	24
§5. Операции умножения и деления .....	29
<i>Тест по главе 2</i> .....	36
<u>Глава 3. Теория делимости в ЗУСС</u>	
§6.Признак делимости на $3^n$ .....	39
§7. Признак делимости на 2 и 6 .....	45
§8. Признак делимости на 4 и 8 .....	48
<i>Тест по главе 3</i> .....	53
<u>Проектная деятельность</u> .....	55

# ВВЕДЕНИЕ

Устройства микропроцессорной техники (компьютеры, ноутбуки, сканеры, принтеры, модемы, мониторы, плоттеры и т.д.) основаны на использовании двоичной системы счисления. Однако двоичная система счисления имеет ряд недостатков, которые влияют на скорость работы процессора. Самый существенный из них – это проблематичное представление отрицательных чисел.

В десятичной системе счисления проблем с представлением отрицательного числа нет – мы помечаем их знаком, которые принято называть «минус». Добавление одного знака в десятичной системе счисления к уже имеющимся десяти (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) особой роли не играет. Однако, если добавить к двум уже имеющимся знакам двоичной системы (0, 1) еще один, то количество знаков увеличится в полтора раза!

Одним из способов преодоления проблемы представления отрицательных чисел является использование симметричной (уравновешенной) системы счисления.

В своё время были разработаны и даже выпущены в серию вычислительные машины, работающие на уравновешенной троичной системе счисления (например, ЭВМ «Сетунь», который был разработан в вычислительном центре МГУ в 1959 году). Данный компьютер поразил рациональностью технических решений. Однако его выпуск прекратился в связи с тенденцией использования в интегральных схемах двоичной системы счисления.

В данном учебном пособии будет подробно описана именно уравновешенная троичная система счисления и её преимущества перед другими системами счисления.

# О системах счисления

**Система счисления** — это правила записи чисел и правила выполнения операций над ними.

В течении многих столетий десятичная система счисления показала свои преимущества и постепенно вытеснила другие системы счисления из научной и общекультурной среды.

Однако в информатике наиболее удобной для технической реализации оказалась двоичная система счисления, а для некоторых применений — шестнадцатеричная система счисления. Во времена восьмиразрядных компьютеров, в которых информация передавалась и обрабатывалась порциями по восемь бит, использовалась и восьмеричная система счисления, однако с развитием 16-, 32- и 64-разрядных компьютеров восьмеричная система вышла из употребления.

Двоичная, восьмеричная, десятичная и шестнадцатеричная системы счисления имеют много общего. Фактически они отличаются только основанием системы счисления  $p = 2$ ,  $p=8$ ,  $p=10$  или  $p=16$ , а также наборов цифр, которые содержат соответственно две, восемь, десять или шестнадцать цифр. В двоичной и восьмеричной системах счисления используются сокращенные наборы цифр 0..1 и 0..7 соответственно, при этом цифры приобретают несколько другие свойства по сравнению с десятичной системой счисления.

*Пример 1.* В двоичной системе счисления следующим числом за числом, состоящим из одной цифры 1, является число  $10_2$ .

*Пример 2.* В восьмеричной системе счисления следующим числом за числом, состоящим из одной цифры 7, является число  $10_8$ .

В обоих примерах нижний индекс обозначает основание системы счисления.

В шестнадцатеричной системе счисления приходится изобретать недостающие шесть цифр, и люди решили эту проблему просто — в качестве цифр стали использовать, кроме традиционных 0..9 символы A, B, C, D, E, F.

Что объединяет указанные системы счисления?

Любое целое неотрицательное число можно представить в виде суммы выражений  $d_i \cdot p^i$ . Сколько таких выражений потребуется — зависит от величины самого числа и от основания системы счисления  $p = 2$ ,  $p = 8$ ,  $p = 10$  или  $p = 16$ .

*Примечание.* Выбор символов не является случайным. Символ  $d$  происходит от английского "*digit*" — цифра, символ  $p$  происходит от английского "*power*" — степень, символ  $i$  происходит от английского "*index*" — индекс, порядковый номер.

Для  $p = 2$  число объектов будет записано как:

$$1 \cdot p^3 + 1 \cdot p^2 + 0 \cdot p^1 + 0 \cdot p^0,$$

то есть

$$1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0.$$

Краткая запись  $1100_2$ .

Для  $p = 8$  число объектов будет записано как:

$$1 \cdot p^1 + 4 \cdot p^0,$$

то есть

$$1 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0.$$

Краткая запись  $14_8$ .

Для  $p = 10$  число объектов будет записано как:

$$1 \cdot p^1 + 2 \cdot p^0,$$

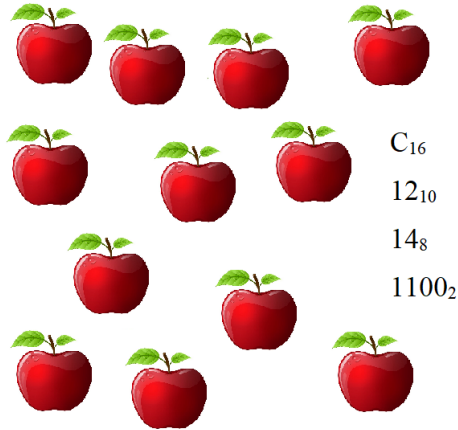


Рис. 1: Число, выражающее количество объектов, и записи этого числа в различных системах счисления

то есть

$$1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0,$$

и это число нам давно знакомо — это 12, которое читается как «двенадцать». В слове «двенадцать» звучит «две над десять», то есть «один десяток и ещё две единицы».

Наконец, для  $p = 16$  число объектов будет записано как  $C \cdot p^0$ , то есть  $C \cdot 16^0$ , то есть просто  $C_{16}$ . В общем случае используют многоточие, которое указывает, что число слагаемых выражений зависит от ситуации:

$$d_i \cdot p^i + \dots + d_2 \cdot p^2 + d_1 \cdot p^1 + d_0 \cdot p^0.$$

Такая запись называется **развернутой записью числа**, а  $d_i \dots d_2 d_1 d_0$  — называется **краткой** или **естественной записью числа**.

В случае неопределенности в краткой записи числа указывают основание системы счисления, как нижний индекс.  $1100_2 = 14_8 = 12_{10} = C_{16}$  — это одно и то же число. Важно то, что каждая из указанных систем счисления позволяет выразить все целые неотрицательные числа  $0, 1, \dots$ , а также с помощью некоторых ухищрений запи-

сать и другие числа. (На самом деле это не совсем так. Оказывается, есть числа, о наличии которых мы знаем, но записать их абсолютно точно в позиционных системах счисления не можем. Такие числа называются трансцендентными. Некоторые из них имеют персональные имена, например, знаменитое  $\pi$ . Обычно мы заменяем их на некоторые приближения, например, 3.14).

Можно рассматривать и системы счисления с другими основаниями:  $p = 3$ ,  $p = 4$ ,  $p = 5$ , и т.д. В компьютерной технике они не применяются, однако их изучение повышает нашу общую культуру, развивает математические и общеинтеллектуальные способности, и в частности, позволяет увереннее работать с компьютерными системами счисления (двоичная, шестнадцатеричная).



## Вопросы

1. Что называется "системой счисления"?
2. Какая запись числа называется "развёрнутой"?
3. В чем отличие "развёрнутой" записи числа от "краткой"?
4. Как вы думаете, сколько систем счисления существует?



## Задачи для повторения

№1. Какая минимальная система счисления может быть у числа  $d$ , если:

- |                 |                |
|-----------------|----------------|
| 1) $d=101110$ ; | 5) $d=A1201$ ; |
| 2) $d=23101$ ;  | 6) $d=12B$ ;   |
| 3) $d=455322$ ; | 7) $d=1101E$ ; |
| 4) $d=1276$ ;   | 8) $d=AD$ .    |

№2. Напишите развёрнутую запись следующих чисел:

- |                  |                   |
|------------------|-------------------|
| 1) $1000100_2$ ; | 5) $10001101_2$ ; |
| 2) $2111_3$ ;    | 6) $20010_3$ ;    |
| 3) $136_8$ ;     | 7) $260_8$ ;      |
| 4) $70_{16}$ ;   | 8) $316_{16}$ .   |

№3. Переведите число  $d$  с основанием системы счисления  $p$  в десятичную систему счисления, если:

- |                      |                       |
|----------------------|-----------------------|
| 1) $d=101001, p=2$ ; | 5) $d=1100101, p=2$ ; |
| 2) $d=12101, p=3$ ;  | 6) $d=211012, p=3$ ;  |
| 3) $d=2310, p=4$ ;   | 7) $d=12031, p=4$ ;   |
| 4) $d=A1C, p=16$ ;   | 8) $d=1A02, p=16$ .   |

№4. Переведите числа из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную, шестнадцатеричную системы счисления:

- 1) 203; 2) 523; 7) 763; 4) 943.

№5. Среди приведённых ниже трёх чисел, записанных в различных системах счисления, найдите максимальное и запишите его в ответе в десятичной системе счисления:

$23_{16}$ ,  $32_8$ ,  $11110$ .

# Глава 1. Троичная уравновешенная система счисления

## §1. Определение троичной уравновешенной системы счисления

Выше уже было упомянуто, что кроме традиционных систем счисления (двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная) существует троичная система счисления, которая состоит из трех цифр: 0, 1, 2.

Также троичная система счисления может быть представлена с помощью чисел 1, 0, -1 (для удобства отрицательную единицу будем обозначать с надчеркиванием ( $\bar{1}$ ), чтобы избежать путаницы в арифметических операциях). Данный вид троичной системы счисления называется *симметричной* или *уравновешенной*.

**Троичная уравновешенная система счисления (ЗУСС)** — это система счисления с основанием три, но использующая для записи числа 1, 0,  $\bar{1}$ .

Троичная уравновешенная система счисления была представлена Леонардо Пизано Фиббоначи для решения "задачи о гирях". Именно решение этой задачи дало троичной симметричной системе счисления альтернативное название "уравновешенная".



### Задача о 4 гирях

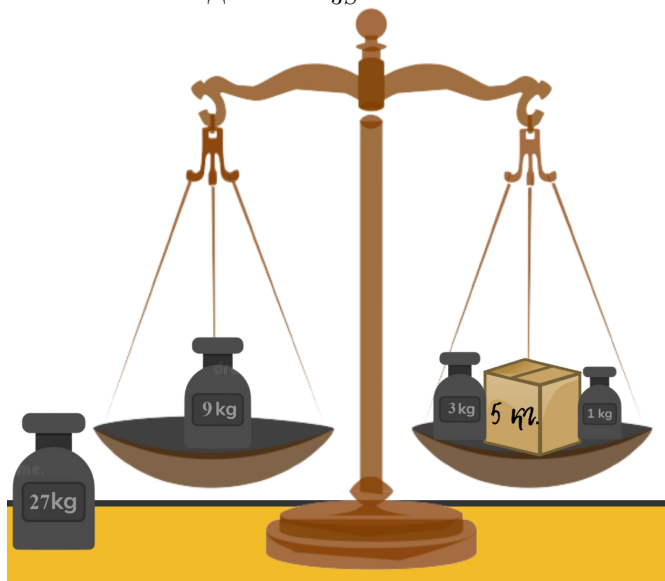
Набор из четырех гирь какой массы нужно собрать, что можно было взвесить любой груз от 1 до 40 кг включительно? Гири при необходимости можно располагать на обеих чашах весов.

*Решение* сводится к уравновешенной троичной системе счисления, то есть искомый набор гирь состоит из 1, 3, 9 и 27.

Чтобы взвесить груз массой 1 кг., нужна 1-килограммовая гиря. То есть запись будет выглядеть следующим образом:  $0001_{3S}$ .

При взвешивании 2 кг. понадобится две гири: на пустую чашу ставится гиря массой 3 кг, а на чашу весов с грузом ставится 1-килограммовая гиря. Запись "взвешивания" будет выглядеть так:  $001\bar{1}_{3S}$ .

Очевидно, что при взвешивании груза массой 4 кг. запись выглядит  $0011_{3S}$ .



Чтобы взвесить груз массой 5 кг. необходимо на чашу с ним положить две гири: 1 кг. и 3 кг., а на пустую чашу 9-килограммовую гирю. Его запись:  $01\bar{1}\bar{1}_{3S}$

Данный алгоритм можно повторять до достижения наибольшего числа (то есть суммы всех гирь) -  $1111_{3S}$ . В десятичной системе это число 40.

Связь обычной системы счисления и уравновешенной объясняется следующим образом.

Некоторое десятичное число  $X$  представлено в троичной системе счисления как  $(d_i \dots d_2 d_1 d_0)_3$ , то есть в развернутой записи:

$$d_i \cdot 3^i + \dots + d_2 \cdot 3^2 + d_1 \cdot 3^1 + d_0 \cdot 3^0,$$

где цифры  $d_0, d_1, d_2, \dots, d_i$  могут принимать значения 0, 1 или 2.

Можно доказать, что  $2 \cdot 3^i = 3^{i+1} - 3^i$ . Введем отрицательное число 1 и обозначим её с верхней чертой  $\bar{1}$ . Тогда последнее равенство можно записать в виде:  $2 \cdot 3^i = 3^{i+1} + \bar{1} \cdot 3^i$ . Отсюда можно сделать вывод, что любое десятичное число можно записать в троичной уравновешенной системе счисления с помощью 0, 1 и  $\bar{1}$ .

В троичной уравновешенной системе счисления можно отобразить не только положительные, но и отрицательные числа. Это является ее большим преимуществом перед другими системами счисления. Алгоритмы перевода десятичных положительных и отрицательных.



## Вопросы

1. Что называют "троичной системой счисления"?
2. Какие виды троичной системы бывают? В чем их отличие?

3. Дайте определение троичной уравновешенной системе счисления.

4. Как связаны между собой обычная троичная система счисления и уравновешенная?

5. Какое основное преимущество у троичной уравновешенной системы счисления перед другими системами счисления?

## §2. Алгоритм перевода числа из десятичной системы счисления в уравновешенную троичную систему счисления

Чаще всего при переводе из десятичной системы счисления в любую другую систему счисления, используют деление столбиком. Альтернативой данного оформления является запись в два столбца. В отличие от деления в столбик, запись в два столбца экономит место в более сложных примерах и уменьшает риск "потерять" один из остатков.

При переводе десятичного числа в ЗУСС, чтобы избежать путаницы с остатками и частными, которые в определенных случаях нужно изменять, будем пользоваться методом деления в два столбца.

### *Алгоритм перевода $d_{10}$ в $d_{3S}$*

1. Найдем остаток от деления исходного числа на 3. Чтобы это сделать, воспользуемся *признаком деления на 3*: число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

2. Если остаток равен 0 или 1, то записываем частное под исходным числом, а полученный остаток справа от исходного числа, за чертой.

3. Если остаток равен 2, то к исходному чис-

лу  $d_{10}$  прибавляем 1 и делим  $(d_{10} + 1)$  на 3. В этом случае под исходным числом нужно написать частное от деления  $(d_{10} + 1)$  на 3, а справа от исходного числа отрицательную единицу ( $\bar{1}$ ).

4. Повторяем пункт 1, 2, 3 до тех пор, пока частное не станет меньше 3.

5. Получившиеся остатки от деления записываем, начиная с последнего. То есть, в записи  $d_{3S}$  первым числом (если смотреть слева на право) будет самый последний (нижний) остаток.

*Пример 1.* Переведите десятичное число 83 в троичную уравновешенную систему счисления.


*Решение.* При делении 83 на 3, получаем остаток 2. Значит, лучше разделить на 3 не 83, а 84. Частное равно 28, а остаток от деления  $\bar{1}$ .

$$\begin{array}{r|l} 83 & \text{3S} \quad \bar{1} \\ \hline 28 & \end{array}$$

Легко догадаться, что в левом столбце записываются делимые, а в правом - остатки. Вертикальная черта с числом наверху символизирует деление или ту систему счисления, к которой мы переходим. В нашем случае мы переходили к троичной уравновешенной системе счисления, которую в дальнейшем будем обозначать с индексом 3S (от лат. "symmetrical" - симметричный).

Далее деление осуществляется по простому алгоритму. Не забываем в ответе записывать остатки в обратном порядке.

83	<sup>3S</sup>	$\bar{1}$
28		1
9		0
3		0
1		1




Ответ:  $1001\bar{1}_{3S}$ .

*Примечание.* Если десятичное число является отрицательным, то сперва нужно вычислить модуль данного числа, а затем осуществить расчет по алгоритму, описанному выше, и в ответе заменить числа на противоположные (то есть 1 заменить на  $\bar{1}$ , а  $\bar{1}$  заменить на 1).

*Пример 2.* Переведите десятичное число -131 в троичную уравновешенную систему счисления.

*Решение.* Модуль данного числа равен 131. Произведём расчёт по алгоритму, описанному выше, и запишем деление в два столбца:

131	<sup>3S</sup>	$\bar{1}$
44		$\bar{1}$
15		0
5		$\bar{1}$
2		$\bar{1}$
1		1



Число 131 в троичной уравновешенной системе счисления имеет вид -  $\bar{1}\bar{1}\bar{1}0\bar{1}\bar{1}$ . Следовательно,  $-131_{10} = \bar{1}\bar{1}1011_{3S}$ .

Ответ:  $\bar{1}\bar{1}1011_{3S}$ .



## Вопросы

1. Как перевести число из десятичной системы счисления в троичную уравновешенную систему счисления?

2. В чем отличие перевода отрицательного десятичного числа в ЗУСС от положительного?



## Задачи

№6. Переведите десятичное число в уравновешенную троичную систему счисления:

- |         |          |
|---------|----------|
| 1) 165; | 5) 1102; |
| 2) 584; | 6) 2250; |
| 3) 123; | 7) 3874; |
| 4) 957; | 8) 6542. |

№7. Переведите отрицательное десятичное число в уравновешенную троичную систему счисления:

- |          |           |
|----------|-----------|
| 1) -68;  | 5) -865;  |
| 2) -125; | 6) -991;  |
| 3) -385; | 7) -1025; |
| 4) -684; | 8) -3657. |

№8. Даны два числа:  $A=413_{10}$  и  $B=535_{10}$ . Какое из приведённых ниже чисел  $C$  в уравновешенной троичной системе счисления соответствует неравенству  $A < C < B$ ?

- 1)  $1\bar{1}0\bar{1}010_{3S}$ ;
- 2)  $1\bar{1}010\bar{1}0_{3S}$ ;
- 3)  $1\bar{1}0\bar{1}0\bar{1}0_{3S}$ ;
- 4)  $1\bar{1}0101\bar{1}0_{3S}$ .

№9. Даны два числа:  $A=963_{10}$  и  $B=1011_{10}$ . Какое из приведённых ниже чисел  $C$  в уравновешенной троичной системе счисления соответствует неравенству  $B < C < A$ ?

- 1)  $11010\overline{11}_{3S}$ ;
- 2)  $11\overline{1}0100_{3S}$ ;
- 3)  $111\overline{1111}_{3S}$ ;
- 4)  $110\overline{1111}_{3S}$ .

№10. Сколько положительных единиц в уравновешенной троичной записи числа  $2357_{10}$ ?

№11. Сколько отрицательных единиц в уравновешенной троичной записи числа  $3569_{10}$ ?

№12. Сколько значащих нулей в уравновешенной троичной записи числа  $2211_{10}$ ?

№13. Для каждого из приведённых ниже десятичных чисел построили уравновешенную троичную запись. Укажите десятичное число, уравновешенная троичная запись которого содержит три отрицательных единицы.

- 1) -156;
- 2) 156;
- 3) -461;
- 4) 461.

№14. Для каждого из приведённых ниже десятичных чисел построили уравновешенную троичную запись. Укажите десятичное число, уравновешенная троичная запись которого содержит четыре отрицательных единицы.

- 1)-581;
- 2)581;
- 3)613;
- 4)-613.

№15. В записи числа какой троичной системы (обычной или уравновешенной) цифр может быть меньше? Объ-

ясните вашу точку зрения.

### §3. Алгоритм перевода числа из троичной уравновешенной системы счисления в десятичную систему счисления

Алгоритм перевода из ЗУСС в десятичную систему счисления ничем не отличается от перевода любой другой системы счисления в десятичную.

#### *Алгоритм перевода $d_{3S}$ в $d_{10}$*

1. Для перевода троичного уравновешенного числа в десятичную систему счисления необходимо представить его в развернутом виде

$$d_i \cdot p^i + \dots + d_2 \cdot p^2 + d_1 \cdot p^1 + d_0 \cdot p^0.$$

Для этого пронумеруем разряды исходного числа справа налево, начиная с нуля. Так мы найдём  $i$ .

2. Запишем исходное число в развёрнутой записи, где  $i$  - наибольший номер,  $d$  - соответствующий коэффициент (1, 0 или  $\bar{1}$ ), а  $p$  всегда равно 3.

3. Преобразовав выражение, мы получим искомое десятичной число.

*Пример 1.* Переведите число  $11\bar{1}\bar{1}01_{3S}$  в десятичную систему счисления.

*Решение.* Пронумеруем разряды исходного троичного уравновешенного числа:

$$\begin{array}{cccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 1 \end{array}$$



$i=5$ , следовательно, наибольшая степень тройки равна 5. Запишем развернутую запись числа  $11\bar{1}\bar{1}01_{3S}$ .

$$11\bar{1}\bar{1}01_{3S} = 1 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4 + (-1) \cdot 3^3 + (-1) \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = \\ = 243 + 81 - 27 - 9 + 0 + 1 = 289.$$

Ответ: 289.



## Вопросы

1. Как перевести число из троичной уравновешенной системы счисления в десятичную систему счисления?



## Задачи

№16. Переведите из уравновешенной троичной системы счисления в десятичную.

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| 1) $10\bar{1}\bar{1}0_{3S}$ ;        | 5) $\bar{1}\bar{1}001\bar{1}_{3S}$ ;       |
| 2) $100\bar{1}01_{3S}$ ;             | 6) $\bar{1}\bar{1}10\bar{1}\bar{1}_{3S}$ ; |
| 3) $11\bar{1}\bar{1}0\bar{1}_{3S}$ ; | 7) $\bar{1}0\bar{1}10\bar{1}_{3S}$ ;       |
| 4) $10010\bar{1}_{3S}$ ;             | 8) $\bar{1}00011\bar{1}_{3S}$ .            |

№17 Даны два числа:  $A=111\bar{1}\bar{1}1_{3S}$  и  $B=11000\bar{1}_{3S}$ . Какое из приведённых ниже чисел  $C$  в десятичной системе счисления соответствует неравенству  $C < A < B$ ?

- 1) 340;
- 2) 348;
- 3) 356;
- 4) 361.

№18 Даны два числа:  $A=1\bar{1}0\bar{1}\bar{1}\bar{1}00_{3S}$  и  $C=1\bar{1}0\bar{1}\bar{1}000_{3S}$ . Какое из приведённых ниже чисел  $B$  в десятичной системе счисления соответствует неравенству  $C < B < A$ ?

- 1) 1344;

- 2) 1347;
- 3) 1374;
- 4) 1377.

№19 Какое неравенство будет верным для чисел  $A=2101_3$ ,  $B=81_{10}$ ,  $C=10\bar{1}01_{3S}$ ?

- 1)  $A < B < C$ ;
- 2)  $A < C < B$ ;
- 3)  $B < A < C$ ;
- 4)  $C < A < B$ .

№20 Какое неравенство будет верным для чисел  $A=153_{10}$ ,  $B=12011_3$ ,  $C=1\bar{1}0\bar{1}10_{3S}$ ?

- 1)  $A < B < C$ ;
- 2)  $C < B < A$ ;
- 3)  $B < A < C$ ;
- 4)  $C < A < B$ .

№21 Заполните таблицу, в каждой строке которой одно и то же число должно быть записано в разных системах счисления.

$d_{10}$	$d_3$	$d_{3S}$
86		
	100012	
		$\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$

№22 Заполните таблицу, в каждой строке которой одно и то же число должно быть записано в разных системах счисления.

$d_{10}$	$d_3$	$d_{3S}$
298		
	122121	
		$\bar{1}\bar{1}0\bar{1}\bar{1}\bar{1}$

№23 Сколько верных неравенств среди перечисленных:

$$110000_{3S} > 315_{10}; 1\bar{1}10101_{3S} > 211201_3; 764_{10} < 101\bar{1}101_{3S}?$$

№24 Сколько верных неравенств среди перечисленных:

$$110\bar{1}\bar{1}\bar{1}_{3S} < 1100020_3; -109_{10} > \bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}_{3S}; 111\bar{1}\bar{1}\bar{1}0_{3S} < 1101011_3?$$

№25 Какое из чисел  $\bar{1}0000001_{3S}$ ;  $101_3$  будет наибольшим? Нужно ли для нахождения наибольшего числа выполнять какие-либо вычисления? Обоснуйте свой ответ.

# Тест по главе 1

1. Число  $423_{10}$  в ЗУСС имеет вид:

- 1)  $1\bar{1}11\bar{1}00_{3S}$ ;
- 2)  $1\bar{1}\bar{1}1\bar{1}00_{3S}$ ;
- 3)  $1\bar{1}\bar{1}\bar{1}100_{3S}$ ;
- 4)  $11\bar{1}\bar{1}\bar{1}00_{3S}$ .

2. Число  $-217_{10}$  в ЗУСС имеет вид:

- 1)  $10\bar{1}\bar{1}01_{3S}$ ;
- 2)  $\bar{1}0110\bar{1}_{3S}$ ;
- 4)  $10\bar{1}001_{3S}$ ;
- 4)  $\bar{1}0100\bar{1}_{3S}$ .

3. Число  $1\bar{1}01000_{3S}$  в десятичной системе счисления имеет вид:

- 1) 513;
- 2) 495;
- 3) -513;
- 4) -495.

4. Число  $\bar{1}111010_{3S}$  в десятичной системе счисления имеет вид:

- 1) 375;
- 2) -375;
- 3) 348;
- 4) -348.

5. Даны 2 числа:  $A=711_{10}$  и  $C=704_{10}$ . Чтобы неравенство  $B < A < C$  оказалось верным,  $C$  должно равняться:

- 1)  $1000\bar{1}00_{3S}$ ;
- 2)  $100\bar{1}010_{3S}$ ;

3)  $100\bar{1}0\bar{1}1_{3S}$ ;

4)  $1000\bar{1}\bar{1}\bar{1}_{3S}$ .

6. Даны 2 числа:  $B = -369_{10}$  и  $C = -366_{10}$ . Чтобы неравенство  $A < B < C$  оказалось верным,  $A$  должно равняться:

1)  $\bar{1}11111\bar{1}_{3S}$ ;

2)  $\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}0_{3S}$ ;

3)  $\bar{1}11110\bar{1}_{3S}$ ;

4)  $\bar{1}111110_{3S}$ .

7. Для чисел  $A = 131_{10}$ ,  $B = 11221_3$ ,  $C = 1\bar{1}\bar{1}\bar{1}11_{3S}$  верным неравенством будет:

1)  $A < C < B$ ;

2)  $A < B < C$ ;

3)  $C < B < A$ ;

4)  $C < A < B$ .

8. Для чисел  $A = \bar{1}0\bar{1}\bar{1}10_{3S}$ ,  $B = \bar{1}0\bar{1}00\bar{1}_{3S}$ ,  $C = -274_{10}$  верным неравенством будет:

1)  $B > C > A$ ;

2)  $A > B > C$ ;

3)  $B > A > C$ ;

4)  $A > C > B$ .

9. Среди неравенств  $-514_{10} > \bar{1}10\bar{1}0\bar{1}0_{3S}$ ,  $110011_{3S} < 110001_3$ ,  $449_{10} < 121100_3$ ,  $-604_{10} > \bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}0_{3S}$  количество верных равно:

1) 1;

2) 2;

3) 3;

4) 4.

10. Числами, которых не хватает в приведенной ниже таблице, являются:

$d_{10}$	$d_3$	$d_{3S}$
505	200201	
628		1011111
	222122	1000101

- 1)  $1\bar{1}0\bar{1}\bar{1}01_{3S}$ , 212022, 719;
- 2)  $1\bar{1}01\bar{1}01_{3S}$ , 212021, 720;
- 3)  $1\bar{1}01\bar{1}01_{3S}$ , 212021, 719;
- 4)  $1\bar{1}0\bar{1}\bar{1}01_{3S}$ , 212022, 720.

## Глава 2. Арифметические операции в троичной уравновешенной системе счисления

### §4. Операции сложения и вычитания

Правила выполнения арифметических действий над троичными числами определяются арифметическими действиями над одноразрядными троичными числами и аналогичны во всех позиционных системах счисления.

Рассмотрим операции сложения и вычитания для отдельных пар цифр троичной уравновешенной системы счисления.

Таблица сложения уравновешенной троичной системы очевидна. Только при сложении  $1+1$  и  $\bar{1} + \bar{1}$  происходит перенос в старший разряд, и сумма равна  $1\bar{1}$  и  $\bar{1}1$  соответственно.

Таблица 1. Сложение в ЗУСС

+	$\bar{1}$	0	1
$\bar{1}$	$\bar{1}1$	$\bar{1}$	0
0	$\bar{1}$	0	1
1	0	1	$1\bar{1}$

Как и в десятичной системе счисления, **сложение** троичных чисел начинается с правых (младших) разрядов. Если результат сложения цифр младших значащих разрядов обоих слагаемых не помещается в этом разряде результата, то происходит перенос. Цифра, переносимая в соседний разряд слева, добавляется к его содержимому.

Такая операция последовательно выполняется над всеми разрядами слагаемых от младших до старших.

*Пример 1.* Найдите сумму  $1\bar{1}10\bar{1}\bar{1}0_{3S}$  и  $11\bar{1}\bar{1}001_{3S}$ .

*Решение.* Выполним сложение в столбик, используя Таблицу 1.

$$\begin{array}{r}
 \overset{1}{+} \begin{array}{r} \bar{1}\bar{1}10\bar{1}\bar{1}0 \\ 11\bar{1}\bar{1}001 \\ \hline 1\bar{1}001\bar{1}\bar{1}1 \end{array}
 \end{array}$$

Ответ:  $1\bar{1}001\bar{1}\bar{1}1_{3S}$ .

При выполнении операции **вычитания** всегда из большего по абсолютной величине вычитается меньшее и ставится соответствующий знак.

В отличие от таблицы сложения, где порядок слагаемых не важен (т. к. от перестановки мест слагаемых сумма не меняется), в таблице вычитания уменьшаемые расположены в первой строке, а вычитаемые в первом столбце.

При вычитании троичных уравновешенных чисел только в двух случаях происходит перенос в старший разряд.

Таблица 2. Вычитание в ЗУСС

-	$\bar{1}$	0	1
$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}\bar{1}$
0	$\bar{1}$	0	1
1	$\bar{1}\bar{1}$	$\bar{1}$	0

*Пример 2.* Найдите разность  $1\bar{1}\bar{1}0\bar{1}\bar{1}_{3S}$  и  $10\bar{1}001_{3S}$ .

*Решение.* Выполним вычитание в столбик, используя Таблицу 2.



$$\begin{array}{r}
 \overline{11} \\
 \overline{11\overline{10\overline{11}}} \\
 - \overline{10\overline{111}} \\
 \hline
 \overline{10\overline{1001}}
 \end{array}$$

Ответ:  $10\overline{1001}_{3S}$ .

Стоит отметить, что в предыдущих двух таблицах заключается ещё одно преимущество троичной уравновешенной системы счисления над другими системами счисления. Рассмотрим вычисление суммы в обычной троичной системе счисления.

Таблица 3. Сложение в троичной системе счисления

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

По таблице видно, что, в отличие от троичной уравновешенной системы счисления, перенос в старший разряд происходит три раза.

Сравним со сложением в двоичной системе счисления:

Таблица 4. Сложение в двоичной системе счисления

+	0	1
0	0	1
1	1	10

где из четырех пар слагаемых в одном происходит перенос в старший разряд. Сравним с *Таблицей 1*. В *Таблице 1* из девяти пар слагаемых только в двух случаях происходит перенос в старший разряд. Это означает, что при сложении в ЗУСС перенос в старший разряд проис-

ходит в  $2/9$  случаев, а в двоичной системе счисления в  $1/4$ . Так как  $1/4 > 2/9$ , то троичная система счисления с точки зрения переноса в старший разряд проще.

Очевидно, что в других системах счисления, где основание больше 2, случаев переноса в старший будет еще больше. В этом заключается еще одно преимущество троичной системы счисления.



## Вопросы

1. Как выполняется сложение в троичной уравновешенной системе счисления?
2. Как выполняется вычитание в троичной уравновешенной системе счисления?
3. В скольких случаях происходит перенос в старший разряд при сложении и вычитании в ЗУСС?
4. В чем заключается преимущество операции сложения в ЗУСС?



## Задачи

№26. Выполните арифметические операции над числами, которые записаны в уравновешенной троичной системе счисления:

- 1)  $110\bar{1} + 1\bar{1}0\bar{1}$ ;
- 2)  $11\bar{1}\bar{1}1 - 1\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ ;
- 3)  $1\bar{1}1000 + 1\bar{1}01$ ;
- 4)  $101\bar{1}\bar{1}\bar{1} - 110\bar{1}\bar{1}$ .

№28. Выполните арифметические операции над числами, которые записаны в уравновешенной троичной системе счисления:

- 1)  $1\bar{1}\bar{1}\bar{1}1\bar{1} + 1\bar{1}\bar{1}0100$ ;
- 2)  $1\bar{1}01000 - 1\bar{1}111\bar{1}1$ ;

- 3)  $11011\bar{1}0 + 111\bar{1}$ ;  
 4)  $1001\bar{1}\bar{1}\bar{1} - 101000\bar{1}$ .

№29. Вычислите в уравновешенной троичной системе сумму  $X$  и  $Y$ , если  $X=258_{10}$ ,  $Y=1\bar{1}\bar{1}101_{3S}$ .

№30. Вычислите в уравновешенной троичной системе сумму  $X$  и  $Y$ , если  $X=102121_3$ ,  $Y=\bar{1}1$ .

№31. Даны 4 числа, записанные в уравновешенной троичной системе счисления:  $1\bar{1}111\bar{1}$ ,  $10\bar{1}0\bar{1}\bar{1}$ ,  $10\bar{1}\bar{1}\bar{1}1$ ,  $10\bar{1}\bar{1}10$ . Сколько среди них чисел, больших, чем  $1\bar{1}000\bar{1}0_{3S} - 101011_{3S}$ ? В ответе укажите только количество чисел.

№32. Какое из приведённых выражений, записанных в уравновешенной троичной системе счисления, имеет наибольшее значение?

- 1)  $1\bar{1}0\bar{1}0 + 1\bar{1}0\bar{1}1$ ;  
 2)  $1\bar{1}\bar{1}\bar{1}11 - 11\bar{1}$ ;  
 3)  $1100\bar{1}0 - 10$ ;  
 4)  $1001+11$ .

№33. Запись числа  $N$  в уравновешенной системе счисления содержит четыре числа, второе из которых отрицательное. Запись этого числа в обычной троичной системе счисления состоит из трех чисел. Чему равно число  $N$ , если известно, что в десятичной системе счисления, оно заканчивается на 9?

№34. Запись числа  $N$  в уравновешенной системе счисления содержит пять чисел, среди которых только одно положительное. Запись этого числа в обычной троичной системе счисления заканчивается на 2. Чему равно число  $N$ ?

## §5. Операции умножения и деления

Операция **умножения** выполняется с использованием таблицы умножения по обычной схеме, применяемой в десятичной системе счисления с последовательным умножением множимого на очередную цифру множителя.

Важно отметить, что в троичной уравновешенной системе счисления, как и в двоичной, нет переносов в старший разряд. Это отличает её от традиционных систем счисления.

*Таблица 5. Умножение в ЗУСС*

×	$\bar{1}$	0	1
$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
0	0	0	0
1	$\bar{1}$	0	1

Вычисление произведения двух n-разрядных троичных чисел сводится к формированию частичных произведений по одному на каждую цифру множителя, с их последующим суммированием. Перед суммированием каждое частичное произведение должно быть сдвинуто на один разряд относительно предыдущего.

*Пример 1.* Найдите произведение  $10011_{3S}$  и  $11\bar{1}_{3S}$ .

*Решение.* Выполним умножение в столбик, используя Таблицу 5.

$$\begin{array}{r}
 \times 10011 \\
 \quad 11\bar{1} \\
 \hline
 + \quad \bar{1}0011 \\
 + \quad 10011 \\
 + \quad 10011 \\
 \hline
 110\bar{1}10\bar{1}
 \end{array}$$

*Ответ:*  $110\bar{1}10\bar{1}_{3S}$ .

Операция **деления** троичных уравновешенных чисел

выполняется подобно алгоритму выполнения деления в десятичной системе счисления, однако имеет свои нюансы. Поэтому данную операцию разберем более подробно.

### *Алгоритм деления в ЗУСС*

1. Сравниваем по разрядам делимое и делитель. Выделяем неполное делимое.
2. Написав в частном 1, вычитаем делитель из делимого.
3. Сравниваем остаток с делимым. Если остаток больше, то вычитаем из него делитель, предварительно записав ещё одну единицу в частном *снизу* от предыдущей. Повторяем данный пункт до тех пор, пока остаток не станет меньше делителя. Затем складываем в столбик получившийся ряд чисел.
4. Если остаток меньше делителя, то сносим цифру следующего разряда (если она есть) и получаем второе неполное делимое.
5. Выполняем пункты 2-4 до тех пор, пока в делимом не останется ни одной неснесенной цифры.

На первый взгляд данный алгоритм может показаться сложным, так как он имеет ряд отличий от деления в привычной десятичной системе.

Например, в десятичной системе счисления, получив остаток, больший делителя, мы бы сделали вывод о неправильно найденном частном, так как остаток должен быть строго меньше делителя.

Также в десятичной системе счисления в частном не приходится делать никакие другие операции, в отличие от алгоритма в троичной уравновешенной системе счисления.

Разберём каждый пункт алгоритма на примере.

*Пример 2.* Найдите частное от деления  $11110_{3S}$  на  $1\overline{11}_{3S}$ .

*Решение.* Выполним деление в столбик, сперва выделив неполное делимое.

$$\widehat{11110} \mid \overline{111}$$

Написав единицу под чертой в частном, выполняем вычитание.

$$\begin{array}{r} \widehat{11110} \mid \overline{111} \\ - \overline{111} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ \hline 10\overline{1} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \end{array}$$

В результате получается остаток  $10\overline{1}$ , который больше делителя  $1\overline{11}$ . Значит, из остатка нужно еще раз вычесть делитель, не забыв написать ещё одну единицу в частном. Единицу записываем **не** справа от частного, а **снизу** для удобства выполнения дальнейшего сложения.

$$\begin{array}{r} \widehat{11110} \mid \overline{111} \\ - \overline{111} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ \hline 10\overline{1} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ - \overline{111} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ \hline 10 \end{array} \begin{array}{l} + \overline{1} \\ + \overline{1} \end{array}$$

Теперь остаток равен 10.  $10 < 1\overline{11}$ , значит, сносим цифру следующего разряда из делимого, а в частном выполняем сложение.

$$\begin{array}{r} \widehat{11110} \mid \overline{111} \\ - \overline{111} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ \hline 10\overline{1} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ - \overline{111} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ \hline 101 \end{array} \begin{array}{l} + \overline{1} \\ + \overline{1} \\ + \overline{11} \end{array}$$

Уменьшаем 101 на  $1\overline{11}$  и приписываем ещё одну 1 в

частное, справа от получившейся суммы.

$$\begin{array}{r|l}
 \widehat{111}10 & \overline{111} \\
 \underline{111} & +1 \\
 \overline{101} & \overline{111} \\
 \underline{111} & \\
 \overline{101} & \\
 \underline{111} & \\
 \overline{111} & 
 \end{array}$$

Остаток равен делителю, поэтому отнимаем из остатка делитель и записываем еще единицу в частном под предыдущей.

$$\begin{array}{r|l}
 \widehat{111}10 & \overline{111} \\
 \underline{111} & +1 \\
 \overline{101} & \overline{111} \\
 \underline{111} & + \overline{111} \\
 \overline{101} & 1 \\
 \underline{111} & \\
 \overline{111} & \\
 \underline{111} & \\
 0 & 
 \end{array}$$

Остаток занулился. Значит, можно выполнить сложение в частном.

Цифра последнего разряда делимого равна 0, поэтому мы её просто дублируем в частном, справа от получившейся суммы.

$$\begin{array}{r}
 \widehat{111}10 \mid 111 \\
 \underline{111} \phantom{00} + 1 \\
 101 \phantom{00} + \overline{1} \\
 \underline{111} \phantom{00} + \overline{11}1 \\
 101 \phantom{00} + \phantom{\overline{11}}1 \\
 \underline{111} \phantom{00} \phantom{0} \\
 111 \\
 \underline{111} \\
 0
 \end{array}$$

Ответ:  $10\overline{1}0_{3S}$ .



## Вопросы

1. Как выполняется умножение в троичной уравновешенной системе счисления?
2. Опишите алгоритм деления в ЗУСС.
3. В чем особенности алгоритма деления троичных уравновешенных чисел?



## Задачи

№35. Выполните арифметические операции над числами, которые записаны в уравновешенной троичной системе счисления:

- 1)  $1\overline{1}\overline{1}1\overline{1} \cdot 10$ ;
- 2)  $1\overline{1}0\overline{1}1 : 1\overline{1}$ ;
- 3)  $10\overline{1}01 \cdot 1\overline{1}\overline{1}$ ;
- 4)  $11\overline{1}\overline{1}0 : 10$ .

№36. Выполните арифметические операции над чис-



лами, которые записаны в уравновешенной троичной системе счисления:

- 1)  $10010 \cdot 11\bar{1}$ ;
- 2)  $1\bar{1}\bar{1}1\bar{1}\bar{1} : 101$ ;
- 3)  $1100 \cdot 110$ ;
- 4)  $10\bar{1}100 : 1\bar{1}\bar{1}0$ .

№37. Найдите значение выражения:  $1000_{3S} + 1\bar{1}0\bar{1}0_{3S} : 10_{3S}$ .

№38. Найдите значение выражения:  $1100\bar{1} \cdot 11 - 110\bar{1}00 : 1\bar{1}\bar{1}0$ .

№39. Вычислите в уравновешенной троичной системе произведение X и Y, если  $X=13_{10}$ ,  $Y=11\bar{1}_{3S}$ .

№40. Найдите в уравновешенной троичной системе частное от деления X на Y, если  $X=258_{10}$ ,  $Y=1\bar{1}\bar{1}1_{3S}$ .

№41. Даны 4 числа, записанные в уравновешенной троичной системе счисления:  $1\bar{1}00$ ,  $1\bar{1}\bar{1}0$ ,  $10\bar{1}\bar{1}$ ,  $1\bar{1}1\bar{1}$ . Сколько среди них чисел, меньших, чем  $1\bar{1}01\bar{1}\bar{1}_{3S} : 10\bar{1}1_{3S}$ ?

- 1) 1;
- 2) 2;
- 3) 3;
- 4) 4.

№42. Какое из приведённых выражений, записанных в уравновешенной троичной системе счисления, имеет наибольшее значение?

- 1)  $1\bar{1}0\bar{1}0 + 1\bar{1}0\bar{1}1$ ;
- 2)  $1\bar{1}\bar{1}\bar{1}11 - 11\bar{1}$ ;
- 3)  $1100\bar{1}0 : 10$ ;
- 4)  $1001 \cdot 11$ .

№43. Какое из приведённых выражений, записанных в уравновешенной троичной системе счисления, имеет наименьшее значение?

1)  $\overline{1}0111\overline{1} + \overline{1}\overline{1}10\overline{1}$ ;

2)  $1\overline{1}10 - 11\overline{1}01$ ;

3)  $10000\overline{1} : \overline{1}1$ ;

4)  $101\overline{1} \cdot \overline{1}11$ .

## Тест по главе 2

1. Значение выражения  $1\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}_{3S} + 10\bar{1}11_{3S} : 11_{3S}$  равно:

- 1)  $1\bar{1}0\bar{1}\bar{1}_{3S}$ ;
- 2)  $1\bar{1}\bar{1}10\bar{1}_{3S}$ ;
- 3)  $1\bar{1}\bar{1}1\bar{1}_{3S}$ ;
- 4)  $11\bar{1}01\bar{1}_{3S}$ .

2. Значение выражения  $1\bar{1}\bar{1}11\bar{1}0_{3S} - 1\bar{1}\bar{1}0_{3S} \cdot 1110_{3S}$  равно:

- 1)  $110\bar{1}_{3S}$ ;
- 2)  $1\bar{1}\bar{1}\bar{1}_{3S}$ ;
- 4)  $1\bar{1}\bar{1}0_{3S}$ ;
- 4)  $11\bar{1}\bar{1}_{3S}$ .

3. Числа  $X=1\bar{1}\bar{1}11\bar{1}_{3S}$  и  $Y=663_{10}$  сложили. Их сумма равна:

- 1)  $1\bar{1}\bar{1}11\bar{1}_{3S}$ ;
- 2)  $1\bar{1}\bar{1}11\bar{1}_{3S}$ ;
- 3)  $1\bar{1}111\bar{1}_{3S}$ ;
- 4)  $1\bar{1}\bar{1}1\bar{1}1_{3S}$ .

4. Из числа  $X=314_{10}$  вычли  $Y=1\bar{1}\bar{1}0001_{3S}$ . Получившаяся разность равна:

- 1)  $1011\bar{1}_{3S}$ ;
- 2)  $\bar{1}0\bar{1}\bar{1}1_{3S}$ ;
- 3)  $\bar{1}01\bar{1}1_{3S}$ ;
- 4)  $10\bar{1}\bar{1}\bar{1}_{3S}$ .

5. Произведение  $X$  и  $Y$  равно  $1\bar{1}\bar{1}0\bar{1}110_{3S}$ . Известно, что  $X=75_{10}$ . Тогда  $Y$  равен:

- 1)  $1\bar{1}\bar{1}1_{3S}$ ;
- 2)  $1\bar{1}\bar{1}\bar{1}_{3S}$ ;
- 3)  $1\bar{1}11_{3S}$ ;
- 4)  $1\bar{1}1\bar{1}_{3S}$ .

6. Частное от деления X на Y равно  $1\bar{1}10_{3S}$ . Известно, что делитель  $Y=37_{10}$ . Тогда делимое X равно:

- 1)  $10\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}0_{3S}$ ;
- 2)  $10\bar{1}\bar{1}\bar{1}10_{3S}$ ;
- 3)  $10\bar{1}\bar{1}110_{3S}$ ;
- 4)  $101\bar{1}\bar{1}10_{3S}$ .

7. Среди перечисленных наибольшим является выражение:

- 1)  $1\bar{1}\bar{1}0110_{3S} - 101\bar{1}_{3S}$ ;
- 2)  $11\bar{1}011_{3S} + 11\bar{1}\bar{1}0_{3S}$ ;
- 3)  $1\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}_{3S} \cdot 100_{3S}$ ;
- 4)  $101\bar{1}0\bar{1}0_{3S} : 1\bar{1}_{3S}$ .

8. Среди перечисленных наименьшим является выражение:

- 1)  $\bar{1}111\bar{1}0_{3S} + 1\bar{1}0\bar{1}00_{3S}$ ;
- 2)  $\bar{1}110011_{3S} - \bar{1}11011_{3S}$ ;
- 3)  $1\bar{1}001 \cdot \bar{1}11_{3S}$ ;
- 4)  $1010100 : \bar{1}1_{3S}$ .

9. Корнем уравнения  $1\bar{1}\bar{1}\bar{1}10_{3S} \cdot x = 1\bar{1}10\bar{1}010_{3S}$

- 1)  $11_{10}$ ;
- 2)  $12_{10}$ ;
- 3)  $13_{10}$ ;
- 4)  $15_{10}$ .

10. Корнем уравнения  $10111100_{3S} - x = 10\bar{1}0001_{3S}$

- 1)  $197_{10}$ ;
- 2)  $198_{10}$ ;

3)  $199_{10}$ ;

4)  $200_{10}$ .

## Глава 3. Теория делимости в ЗУСС

### §6. Признак делимости на $3^n$

Традиционно в школе при делении положительного целого числа  $n$  на положительное целое число  $m$  с остатком считается, что возможными остатками могут быть  $0, 1, \dots, m-1$ , в зависимости от  $n$  и  $m$ .

Например,

при делении 12 на 3 частное равно 4, остаток равен 0,  
при делении 13 на 3 частное равно 4, остаток равен 1,  
при делении 14 на 3 частное равно 4, остаток равен 2,  
при делении 15 на 3 частное равно 5, остаток снова равен 0.

Для понимания троичной уравновешенной системы счисления удобнее полагать, что остатки от деления на 3 могут принимать значения  $-1, 0, +1$ .

То есть для тех же чисел

при делении 12 на 3 частное равно 4, остаток равен 0,  
при делении 13 на 3 частное равно 4, остаток равен 1,  
но при делении 14 на 3 будем считать, что частное равно 5, а остаток равен  $-1$ ,  
при делении 15 на 3 частное равно 5, остаток снова равен 0.

Как видим, из перечисленных четырёх случаев в трёх ситуациях получили то же, что и было в традиционной схеме, и только в одном случае (для числа 14) мы решили вычислять по другой схеме.

Можно объяснять это так: когда мы работаем с числом 14, то среди чисел, кратных 3, нам ближе идти не

вниз к 12, а вверх к 15. Правда, в этом случае у нас фактически получается не остаток, а недостаток, но мы и указываем его со знаком минус.

Это очень похоже на округление чисел. Например, при округлении до целого мы для числа 8.1 идем вниз к 8, а число 8.7 округляем вверх до 9.

Такая точка зрения упрощает и многие доказательства в теории делимости. В ходе выкладок мы в любой момент можем от высказывания "остаток от деления  $n$  на  $m$  равен  $-1$ " перейти к равносильному высказыванию "остаток от деления  $n$  на  $m$  равен  $m-1$  и наоборот. Это применимо не только к  $m = 3$ , но и к другим  $m$ .

Если в десятичной системе счисления можно рассматривать признаки делимости на цифры 2,3,4,5,6,7,8,9, то в троичной уравновешенной системе счисления признаки делимости на цифры  $-1$  или  $1$  неинтересны. Но в десятичной системе счисления можно рассматривать и признаки делимости на числа, записываемые более чем одной цифрой. Правда на практике рассматриваются только признаки делимости на 10 и на 11.

Все мы знаем признаки делимости чисел в десятичной системе счисления. Например, десятичное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра является четной (то есть число заканчивается на 0, 2, 4, 6, 8). Десятичное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр, из которых состоит число, делится на 3.

**Признак делимости** — это алгоритм, используя который можно сравнительно быстро определить, является ли рассматриваемое число кратным заранее заданному (т.е. делится ли на него без остатка).

В троичной уравновешенной системе счисления также можно рассматривать признаки деления на числа, записанные более чем одной цифрой, например, признак делимости  $11_{3S}$ . Однако для понимания, возможно, следует называть эти числа в десятичной системе счисления. При этом возникают полезные аналогии. Например, 4 - это число, следующее за основанием троичной уравновешенной системы счисления - числом 3. Это подсказывает, что признак делимости должен быть похож на признак делимости на 11 в десятичной системе счисления.

Очевидно, что основным признаком делимости в троичной системе является *признак делимости на 3*.

*Признак 1.* Троичное уравновешенное число делится на 3 тогда и только тогда, когда последняя цифра в его записи равна 0.

*Доказательство.* Запишем уравновешенное троичное число в виде:

$$x_n \dots x_2 x_1 x_0,$$

где  $x_n$  может быть равно 1, 0 или  $\bar{1}$ , а  $n$  равно степени тройки. Переведем данное число в десятичную систему счисления:

$$x_n \dots x_2 x_1 x_0 = 3^n \cdot x_n + \dots + 3^2 \cdot x_2 + 3^1 \cdot x_1 + 3^0 \cdot x_0.$$

Число  $a$  без остатка делится на  $b$ , если каждое слагаемое из суммы  $a$  делится на  $b$ . То есть число

$$x_n \dots x_2 x_1 x_0 = 3^n \cdot x_n + \dots + 3^2 \cdot x_2 + 3^1 \cdot x_1 + 3^0 \cdot x_0$$

делится на 3, если каждое слагаемое  $3^n \cdot x_n$

делится на 3.

Так как слагаемыми являются степени тройки (не зависимо от того, положительные слагаемые или отрицательные), то  $3^n \cdot x_n$  будет делиться на 3. Исключением является последнее слагаемое, так как коэффициент находится в нулевой степени и равен 1.



Отсюда следует, что число  $x_n \dots x_2 x_1 x_0$  делится на 3, если  $x_0 = 0$ . Что и требовалось доказать.

*Пример 1.* Проверить делимость чисел  $1\bar{1}0\bar{1}1_{3S}$  и  $\bar{1}\bar{1}0\bar{1}0_{3S}$  на 3.

*Решение.* Число  $1\bar{1}0\bar{1}1_{3S}$  заканчивается на 1, значит, оно не делится на 3. Проверка:  $1\bar{1}0\bar{1}1_{3S} = 3^4 \cdot 1 - 3^3 \cdot 1 + 3^2 \cdot 0 - 3^1 \cdot 1 + 3^0 \cdot 1 = 81 - 27 + 0 - 3 + 1 = 52$ .

Действительно, 52 на 3 без остатка не делится.

Число  $\bar{1}\bar{1}0\bar{1}0_{3S}$  заканчивается на 0, значит, оно делится на 3 без остатка. Проверка:  $\bar{1}\bar{1}0\bar{1}0_{3S} = 3^4 \cdot 1 + 3^3 \cdot 1 + 3^2 \cdot 0 + 3^1 \cdot 1 + 3^0 \cdot 0 = 81 - 27 + 0 - 3 + 0 = 111$

Действительно, -111 на делится на 3 без остатка.

По такому же принципу проверяется делимость на 9.

*Признак 2.* Тройчное уравновешенное число делится на 9 тогда и только тогда, когда две последних цифры в его записи равны 0.

*Доказательство.* Доказательство осуществляется по аналогии с доказательством к признаку делимости на 3.

Запишем уравновешенное тройчное число в виде:

$$x_n \dots x_2 x_1 x_0,$$

где  $x_n$  может быть равно 1, 0 или  $\bar{1}$ , а  $n$  равно степени тройки. Переведем данное число в десятичную систему счисления:

$$x_n \dots x_2 x_1 x_0 = 3^n \cdot x_n + \dots + 3^2 \cdot x_2 + 3^1 \cdot x_1 + 3^0 \cdot x_0.$$

Число  $a$  без остатка делится на  $b$ , если каждое слагаемое из суммы  $a$  делится на  $b$ . То есть число

$$x_n \dots x_2 x_1 x_0 = 3^n \cdot x_n + \dots + 3^2 \cdot x_2 + 3^1 \cdot x_1 + 3^0 \cdot x_0$$

делится на 9, если каждое слагаемое  $3^n \cdot x_n$  делится на 9.

Так как слагаемыми являются степени тройки (не зависимо от того, положительные слагаемые или отрицательные), то  $3^n \cdot x_n$  будет делиться на 9. Исключением

является предпоследнее и последнее слагаемое, которые равны 3 и 1 соответственно.

Отсюда следует, что число  $x_n \dots x_2 x_1 x_0$  делится на 9, если  $x_0=0$  и  $x_1=0$ . Что и требовалось доказать.

*Пример 2.* Проверить делимость чисел  $1001\bar{1}10_{3S}$ ,  $1011\bar{1}100_{3S}$  на 9.

*Решение.* Число  $1001\bar{1}10_{3S}$  заканчивается на один ноль, значит, оно не делится на 9. Проверка:  $1001\bar{1}10_{3S} = 3^6 \cdot 1 + 3^3 \cdot 1 - 3^2 \cdot 1 + 3^1 \cdot 1 = 729 + 27 - 9 + 3 = 750$ .

Действительно, 750 на 9 без остатка не делится.

Число  $1011\bar{1}100_{3S}$  заканчивается на два нуля, значит, оно делится на 9 без остатка. Проверка:  $1011\bar{1}100_{3S} = 3^7 \cdot 1 + 3^5 \cdot 1 + 3^4 \cdot 1 - 3^3 \cdot 1 - 3^2 \cdot 1 = 2187 + 243 + 81 - 27 - 9 = 2475$

Действительно,  $1011\bar{1}100_{3S}$  делится на 9 без остатка.

Не сложно понять принцип делимости на 27, 81 и т.д.

**Теорема 1.** Число, записанное в уравновешенной троичной системе счисления, делится на  $3^n$ , если оно заканчивается на  $n$  нулей.

Докажите данную теорему самостоятельно, основываясь на двух предыдущих доказательствах.



## Вопросы

1. Что называют признаком делимости?
2. Сформулируйте признаки делимости на 3 и на 9.
3. О чем гласит теорема "Признак делимости на  $3^n$ "?



## Задачи

№44. Сформулируйте признак делимости троичного уравновешенного числа на 27 и докажите его.

№45. Сформулируйте признак делимости троичного уравновешенного числа на 243 и докажите его.

№46. Проверьте делимость чисел на 3:  $1\bar{1}00_{3S}$ ;  $11\bar{1}01_{3S}$ ;  $\bar{1}0010_{3S}$ ;  $1\bar{1}\bar{1}0\bar{1}0_{3S}$ .

№47. Проверьте делимость чисел на 9:  $100\bar{1}_{3S}$ ;  $1\bar{1}\bar{1}00_{3S}$ ;  $1110\bar{1}_{3S}$ ;  $\bar{1}00100_{3S}$ .

№48. Используя теорему 1, определите делители чисел:  $1011\bar{1}00_{3S}$ ;  $1\bar{1}\bar{1}\bar{1}0_{3S}$ ;  $\bar{1}001\bar{1}00_{3S}$ ;  $11\bar{1}1000_{3S}$ .

№49. Используя теорему 1, определите делители чисел:  $110\bar{1}00_{3S}$ ;  $1\bar{1}01\bar{1}000_{3S}$ ;  $\bar{1}\bar{1}00100_{3S}$ ;  $\bar{1}\bar{1}010000_{3S}$ .

№50. Число, записанное в ЗУСС, делится на 3. Также известно, что сумма цифр равна 0. Минимум из скольких цифр состоит это число?

№51. Число, записанное в ЗУСС, делится на 9. Известно, что сумма цифр данного числа равна 2. Найдите минимальное число, подходящее под данное описание. Ответ запишите в ЗУСС.

№52. Число, записанное в ЗУСС, делится на 27. Известно, что количество цифр данного числа равно 6. Найдите минимальное положительное число, подходящее под данное описание. Ответ запишите в ЗУСС.

## §7. Признаки делимости на 2 и на 6

*Признак 3.* Число, записанное в уравновешенной троичной системе счисления, делится на 2 тогда и только тогда, когда сумма его цифр равна четному числу.

*Доказательство.* Запишем уравновешенное троичное число в виде:

$$d_i \dots d_2 d_1 d_0,$$

где  $d_i$  может быть равно 1, 0 или  $\bar{1}$ , а  $i$  равно степени тройки. Переведем данное число в десятичную систему счисления:

$$d_i \dots d_2 d_1 d_0 = 3^i \cdot d_i + \dots + 3^2 \cdot d_2 + 3^1 \cdot d_1 + 3^0 \cdot d_0.$$

Число делится на 2, если оно является четным. Таким образом,

$$3^i \cdot d_i + \dots + 3^2 \cdot d_2 + 3^1 \cdot d_1 + 3^0 \cdot d_0$$

разделится на 2, если сумма всех слагаемых является четной.

Четное число получается в двух случаях: при сложении двух нечетных или при сложении четного с четным. В троичной системе счисления среди слагаемых четного числа быть не может, значит, остается только первый вариант.

Отсюда следует, что

$$3^i \cdot d_i + \dots + 3^2 \cdot d_2 + 3^1 \cdot d_1 + 3^0 \cdot d_0$$

будет четным, если сумма слагаемых тоже равно четному числу. Что и требовалось доказать.

*Пример 1.* Проверить делимость чисел  $1\bar{1}011_{3S}$  и  $1\bar{1}100_{3S}$  на 2.

*Решение.* Сумма цифр в записи  $1\bar{1}011_{3S}$  равна 2 ( $1 - 1 + 0 + 1 + 1 = 2$ ). Число 2 – четное, следовательно,  $1\bar{1}011_{3S}$  делится на 2. Сделаем проверку:  $1\bar{1}011_{3S} = 3^4 \cdot 1 - 3^3 \cdot 1 + 3^1 \cdot 1 + 3^0 \cdot 1 = 81 - 27 + 3 + 1 = 58$ . Число 58 делится на 2.

Аналогично и с  $1\bar{1}100_{3S}$ . Сумма цифр в записи  $1\bar{1}100_{3S}$  равна 1 ( $1 - 1 + 1 + 0 + 0$ ). Число 1 является нечетным, поэтому  $1\bar{1}100_{3S}$  не делится на 2. Проверяем:  $1\bar{1}100_{3S} = 3^4 \cdot 1 - 3^3 \cdot 1 + 3^2 \cdot 1 = 81 - 27 + 9 = 63$ . Действительно, 63 не делится на 2.

*Признак 4.* Число, записанное в уравновешенной троичной системе счисления, *делится на 6* тогда и только тогда, когда оно заканчивается 0 и сумма его цифр равна четному числу.

Данная теорема обобщает в себе признаки делимости на 3 и на 2, что является очевидным, так как 6 делится и на 2, и на 3. Аналогичным образом можно сформулировать признаки делимости на 18, 54 и т.д.

*Пример 2.* Проверить делимость чисел  $11\bar{1}10_{3S}$  и  $1\bar{1}\bar{1}01\bar{1}_{3S}$  на 6.

*Решение.* Сумма цифр в записи  $1\bar{1}011_{3S}$  равно 4 ( $1+1-1+1=2$ ). Число 2 – четное, следовательно,  $11\bar{1}10_{3S}$  делится на 2. Также,  $11\bar{1}10_{3S}$  заканчивается нулем, значит, оно делится и на 3. Сделаем проверку:  $11\bar{1}10_{3S} = 3^4 \cdot 1 + 3^3 \cdot 1 - 3^2 \cdot 1 + 3^1 \cdot 1 = 81 + 27 - 9 + 3 + 1 = 102$ . Число 102 делится на 6.

Аналогично и с  $1\bar{1}\bar{1}01\bar{1}_{3S}$ . Сумма цифр в записи  $1\bar{1}\bar{1}01\bar{1}_{3S}$  равна -1 ( $1-1-1+0+1-1=-1$ ). Число -1 является нечетным, поэтому  $1\bar{1}\bar{1}01\bar{1}_{3S}$  не делится на 2. Также данное число не делится на 3, так как оно не заканчивается нулем. Отсюда следует, что  $1\bar{1}\bar{1}01\bar{1}_{3S}$  не делится на 6. Проверяем:  $1\bar{1}\bar{1}01\bar{1}_{3S} = 3^5 \cdot 1 - 3^4 \cdot 1 - 3^3 \cdot 1 + 3^1 \cdot 1 - 3^0 \cdot 1 = 243 - 81 - 27 + 3 - 1 = 137$ . Действительно, 137 не делится на 6.

1. О чем гласит признак 4?



## Вопросы

2. Сформулируйте признак делимости на 2 в десятичной системе счисления. В какой системе счисления проверить делимость на 2 проще: в ЗУСС или десятичной?

3. Сформулируйте признак делимости на 6.



## Задачи

№53. Сформулируйте признак делимости троичного уравновешенного числа на 18 и докажите его.

№54. Сформулируйте признак делимости троичного уравновешенного числа на 162 и докажите его.

№55. Проверьте делимость чисел на 2:  $111\bar{1}1_{3S}$ ;  $10\bar{1}101_{3S}$ ;  $111110\bar{1}_{3S}$ ;  $\bar{1}11\bar{1}001_{3S}$ .

№56. Проверьте делимость чисел на 6:  $1111110_{3S}$ ;  $1011\bar{1}1_{3S}$ ;  $1\bar{1}1110_{3S}$ ;  $1\bar{1}0100\bar{1}_{3S}$ .

№57. Используя теорему 1 и признаки 3, 4 определите делители чисел:  $11110_{3S}$ ;  $1\bar{1}1\bar{1}00_{3S}$ ;  $11\bar{1}10_{3S}$ ;  $10\bar{1}11\bar{1}_{3S}$ .

№58. Используя теорему 1 и признаки 3, 4 определите делители чисел:  $110\bar{1}11_{3S}$ ;  $111\bar{1}000_{3S}$ ;  $\bar{1}0\bar{1}110\bar{1}_{3S}$ ;  $10\bar{1}110\bar{1}_{3S}$ .

№59. Число, записанное в ЗУСС, делится на 6 и является 5-разрядным. Также известно, что сумма цифр равна 0. Найдите минимальное число, подходящее под данное описание. Ответ запишите в ЗУСС.

№60. Число, записанное в ЗУСС, делится на 18. Из-

вестно, что сумма цифр данного числа делится на 2. Найдите максимальное число, подходящее под данное описание. Ответ запишите в ЗУСС.

№61. Число, записанное в ЗУСС, делится на 54. Известно, что количество цифр данного числа равно 5. Найдите минимальное положительное число, подходящее под данное описание. Ответ запишите в ЗУСС.

### §8. Признаки делимости на 4 и на 8

*Признак 5.* Число, записанное в троичной уравновешенной систем счисления, делится на 4 тогда и только тогда, когда разность между суммой цифр, стоящих на четных позициях и суммой цифр, стоящих на нечетных позициях, делится на 4.

#### *Доказательство*

Так как  $3 = 4 - 1$ , можно считать, что остаток от деления 3 на 4 равен -1. Тогда остаток от деления  $3^n = (-1)^n$ , для четных степеней это +1, для нечетных степеней это -1.

Если число

$$d_i d_{i-1} \dots d_1 d_0$$

записано в троичной уравновешенной системе счисления, развернутая его запись будет

$$d_i 3^i + d_{i-1} 3^{i-1} + \dots + d_1 3^1 + d_0.$$

Остаток от деления этого числа на 4 будет равен

$$d_i (-1)^i + d_{i-1} (-1)^{i-1} + \dots + d_1 (-1)^1 + d_0.$$

Тогда сумма слагаемых с четными степенями будет равна  $d_0 + d_2 + d_4 + \dots$ , а сумма слагаемых с нечетными

степенями будет равна  $(-1) \cdot (d_1 + d_3 + d_5 + \dots)$ . Следовательно, разность сумм  $d_0 + d_2 + d_4 + \dots$  и  $d_1 + d_3 + d_5 + \dots$  при делении на 4 будет иметь тот же остаток, как и исходное число.

*Пример 1.* Проверить делимость числа  $1\bar{1}1010100111_{3S}$  на 4.

*Решение.* В числе  $1\bar{1}1010100111_{3S}$  сумма цифр на нечетных позициях равна  $1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 = 5$ , а сумма цифр на четных позициях равна  $\bar{1} + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 = 1$ , разность этих чисел  $5 - 1 = 4$ , конечно, делится на 4, значит и само число  $1\bar{1}1010100111_{3S}$  делится на 4. Для проверки переведем в десятичную систему счисления:  $1\bar{1}1010100111_{3S} = 140224_{10}$ .

Конечно, признак делимости на 4 в десятичной системе счисления оказался проще, но "для общего развития" интересно познакомиться и с указанным признаком.

*Признак 6.* Число  $d_n d_{n-1} \dots d_1 d_0$ , записанное в троичной уравновешенной системе счисления, делится на 8 тогда и только тогда, когда сумма его двузначных чисел  $S = \dots + d_5 d_4 + d_3 d_2 + d_1 d_0$  делится на 8.

*Примечание.* Здесь использовано нетрадиционное обозначение - троеточие «и так далее» записано не справа, как обычно, а слева. Это связано с тем, что мы записываем двузначные числа, формируя их справа, от младших разрядов исходного числа. Ситуация зависит от того, является ли  $n$  чётным или нет. В случае чётности  $n$  начальное слагаемое в сумме  $S$  будет число из одной цифры  $d_n$ , а в случае нечетности  $n$  сумма  $S$  начинается с дву-



значного числа  $d_n d_{n-1}$ .

### *Доказательство*

Так как  $9=8+1$ , остатки от деления на 8 всех чисел  $3^2, 3^4, 3^6, \dots$  будут равны 1.

Если число  $d_n d_{n-1} \dots d_1 d_0$  записано в троичной уравновешенной системе счисления, развернутая его запись будет  $d_n 3^n + d_{n-1} 3^{n-1} + \dots + d_1 3^1 + d_0 = (d_1 3^1 + d_0) + 3^2 \cdot (d_3 3^1 + d_2) + 3^4 \cdot (d_5 3^1 + d_4) + \dots$ . Остаток от деления этого числа на 8 будет такой же, как у числа  $S = d_1 3^1 + d_0 + (d_3 3^1 + d_2) + (d_5 3^1 + d_4) + \dots$ .

*Пример 2.* Проверить делимость чисел  $1\bar{1}\bar{1}01_{3S}$ ,  $11111111_{3S}$  на 8.

*Решение.* Для числа  $64_{10} = 1\bar{1}101_{3S}$  (цифры для облегчения подсчета записаны парами с разбивкой пробелами) сумма  $S = 1 + \bar{1}1 + 01 = 0$ , значит число делится на 8.

Аналогично и для числа  $3^8 - 1 = 11111111_{3S}$  сумма  $S = 11 + 11 + 11 + 11 = 1\bar{1}\bar{1}1$  (здесь все числа записаны в троичной уравновешенной системе счисления). Можно  $S$  перевести в десятичную систему счисления, получим 16 и убедиться в делимости на 8. Но можно для  $S$  повторить тот же прием и вычислить новое  $S = \bar{1}1 + 1\bar{1} = 0$  и делимость становится очевидной.

Признаки делимости, сводящие проверку делимости числа к проверке делимости меньшего числа, называются *рекуррентными*.



### **Вопросы**

1. О чем гласит признак 5?
2. Сформулируйте признак делимости на 4 в десятичной системе счисления. В какой системе счисления проверить делимость на 4 проще: в ЗУСС или десятичной?

3. Сформулируйте признак делимости на 8.  
4. Какие признаки делимости называются рекуррентными?

### ◆ Задачи

№62. Проверьте делимость чисел на 4:  $111\bar{1}1\bar{1}_{3S}$ ;  $10000\bar{1}0_{3S}$ ;  $1\bar{1}0\bar{1}00111_{3S}$ ;  $10\bar{1}\bar{1}1100_{3S}$ .

№63. Проверьте делимость чисел на 8:  $1001011_{3S}$ ;  $1\bar{1}10\bar{1}\bar{1}\bar{1}0_{3S}$ ;  $110111\bar{1}_{3S}$ ;  $10\bar{1}\bar{1}1100_{3S}$ .

№64. Используя теорему 1 и известные признаки делимости в ЗУСС определите делители чисел:  $1\bar{1}11\bar{1}0\bar{1}0_{3S}$ ;  $1\bar{1}110\bar{1}100_{3S}$ .

№65. Используя теорему 1 и известные признаки делимости в ЗУСС определите делители чисел:  $1\bar{1}0\bar{1}0\bar{1}000_{3S}$ ;  $110\bar{1}\bar{1}0000_{3S}$ .

№66. Число, записанное в ЗУСС, делится на 4 и состоит из 6 цифр. Найдите минимальное число, подходящее под данное описание.

№67. Число , записанное в ЗУСС, делится на 81 и на 4. Найдите минимальное число, подходящее под данное описание. Ответ запишите в десятичной системе счисления.

№65. Верно ли утверждение о троичном уравновешенном числе: "Если число заканчивается на два нуля, а разность между суммой цифр, стоящих на четных позициях и суммой цифр, стоящих на нечетных позициях, равна

нулю, то данное число делится на 36"? Обоснуйте свой ответ.

№65. Верно ли утверждение о троичном уравновешенном числе: "Если количество 1 и  $\bar{1}$  равно четному числу, а разность между суммой цифр, стоящих на четных позициях и суммой цифр, стоящих на нечетных позициях, равна нулю, то данное число делится на 8"? Обоснуйте свой ответ.

## Тест по главе 3

1. Среди перечисленных чисел на 3 без остатка делятся:

- 1)  $1\bar{1}0\bar{1}10_{3S}$ ;
- 2)  $1\bar{1}0101_{3S}$ ;
- 3)  $10001\bar{1}_{3S}$ ;
- 4)  $101100_{3S}$

2. Среди перечисленных чисел на 9 без остатка делятся:

- 1)  $1\bar{1}\bar{1}1000_{3S}$ ;
- 2)  $1\bar{1}\bar{1}\bar{1}000_{3S}$ ;
- 3)  $1\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}_{3S}$ ;
- 4)  $1\bar{1}01111_{3S}$

3. Среди перечисленных чисел на 2 без остатка делятся:

- 1)  $10\bar{1}110_{3S}$ ;
- 2)  $1\bar{1}10110_{3S}$ ;
- 3)  $100\bar{1}\bar{1}01_{3S}$ ;
- 4)  $1\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}0_{3S}$

4. Среди перечисленных чисел на 6 без остатка делятся:

- 1)  $10\bar{1}\bar{1}\bar{1}0_{3S}$ ;
- 2)  $1\bar{1}\bar{1}0011_{3S}$ ;
- 3)  $1\bar{1}01010_{3S}$ ;
- 4)  $10\bar{1}0\bar{1}\bar{1}_{3S}$

5. Число, отличное от 0 и записанное в ЗУСС, делится на 9. Сумма чисел, из которых оно состоит, равно 1.

Минимальное количество разрядов данного числа равно:

- 1) 1;
- 2) 2;
- 3) 3;
- 4) 4.

6. Число, отличное от 0 и записанное в ЗУСС, делится на 18. Минимальное количество разрядов данного числа равно:

- 1) 3;
- 2) 4;
- 3) 5;
- 4) 6.

7. Число, записанное в ЗУСС, делится на 54. Известно, что количество цифр данного числа равно 6. Минимальным положительным числом, подходящим под данное описание, является:

- 1)  $111000_{3S}$ ;
- 2)  $1\bar{1}\bar{1}000_{3S}$ ;
- 3)  $1\bar{1}0000_{3S}$ ;
- 4)  $110000_{3S}$ .

# Проектная деятельность

Данный раздел предназначен для тех, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, выражать свою точку зрения, выдвигать гипотезы и доказывать их, а также находить нестандартные и рациональные решения. В школьные годы научиться этому помогает проектная деятельность.

Школьный проект – это форма исследовательской работы, в процессе которой ученик (или группа учеников) самостоятельно находит информацию по теме работы, изучает ее, делает выводы и предоставляет отчетный материал. Отчетный материал может быть представлен в форме презентации, реферата или доклада.

*Основные рекомендации по организации проектной деятельности:*

1. При выборе темы необходимо учитывать её актуальность и степень изученности, а также наличие источников информации в литературе и интернет-ресурсах.
2. Работа начинается с составления плана, в котором отражаются основные этапы будущего проекта.
3. Определить основную цель проекта и задачи, с помощью которых она будет реализована.
4. Работа завершается подведением итогов исследования, делаются выводы, намечаются перспективы дальнейшего исследования темы.

Ниже приводится рекомендуемый список тем, которые могут быть выбраны для проектной деятельности.

1. Календарь на год, разработанный в троичной уравновешенной системе счисления.

2. Кодирование в троичный экономный код по алгоритму Хаффмана.

3. Эмулятор первой троичной советской МЦВМ «Сетунь».

4. Троичная счётная машина Томаса Фоулера.

5. Представление дробных чисел в ЗУСС и их округление.