

**Реферат на тему:**  
**“Применение свойств функций для решения  
уравнений и неравенств”.**

Буров Владислав Владимирович,  
ученик 11 класса МОУ “СОШ с. Новотулка”

Абдурахманова Светлана Николаевна,  
учитель математики

## Введение.

Путь к появлению понятия функции заложили в 17 веке французские ученые Франсуа Виет и Рене Декарт; они разработали единую буквенную математическую символику, которая вскоре получила всеобщее признание. Введено было единое обозначение: неизвестных - последними буквами латинского алфавита -  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , известных - начальными буквами того же алфавита -  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ... и т.д. Под каждой буквой стало возможным понимать не только конкретные данные, но и многие другие; в математику пришла идея изменения. Тем самым появилась возможность записывать общие формулы. Кроме того, у Декарта и Ферма (1601-1665) в геометрических работах появляется отчетливое представление переменной величины и прямоугольной системы координат. В своей «Геометрии» в 1637 году Декарт дает понятие функции, как изменение ординаты точки в зависимости от изменения ее абсциссы; он систематически рассматривал лишь те кривые, которые можно точно представить с помощью уравнений, притом преимущественно алгебраических. Постепенно понятие функции стало отождествляться, таким образом, с понятием аналитического выражения - формулы. В 1671 году Ньютон под функцией стал понимать переменную величину, которая изменяется с течением времени (называл в «флюентой»). В «Геометрии» Декарта и работах Ферма, Ньютона и Лейбница понятие функции носило, по существу, интуитивный характер и было связано либо с геометрическими, либо с механическими представлениями: ординаты точек кривых - функция от абсцисс ( $x$ ); путь и скорость - функция от времени ( $t$ ) и т.п. А теперь перейдем непосредственно к понятию функции, используемое в наше время, и поговорим о её свойствах.

## Функция и её свойства.

**Функция** — это одно из важнейших математических понятий. Функция - зависимость переменной  $y$  от переменной  $x$ , если каждому значению  $x$  соответствует единственное значение  $y$ . Переменную  $x$  называют независимой переменной или аргументом. Переменную  $y$  называют зависимой переменной. Все значения независимой переменной (переменной  $x$ ) образуют область определения функции. Все значения,

которые принимает зависимая переменная (переменная  $y$ ), образуют область значений функции.

**Графиком функции** называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты - соответствующим значениям функции, то есть по оси абсцисс откладываются значения переменной  $x$ , а по оси ординат откладываются значения переменной  $y$ . Для построения графика функции необходимо знать свойства функции.

### **1) Область определения функции и область значений функции.**

Область определения функции — это множество всех допустимых действительных значений аргумента  $x$  (переменной  $x$ ), при которых функция  $y = f(x)$  определена.

Область значений функции — это множество всех действительных значений  $y$ , которые принимает функция.

### **2) Нули функции.**

Нуль функции – такое значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

### **3) Промежутки знакопостоянства функции.**

Промежутки знакопостоянства функции – такие множества значений аргумента, на которых значения функции только положительны или только отрицательны.

### **4) Монотонность функции.**

Возрастающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Убывающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

### **5) Четность (нечетность) функции.**

Четная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого  $x$  из области определения выполняется равенство  $f(-x) = f(x)$ . График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечетная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого  $x$  из области определения справедливо равенство  $f(-x) = -f(x)$ . График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

#### **6) Ограниченная и неограниченная функции.**

Функция называется ограниченной, если существует такое положительное число  $M$ , что  $|f(x)| \leq M$  для всех значений  $x$ . Если такого числа не существует, то функция - неограниченная.

#### **7) Периодичность функции.**

Функция  $f(x)$  - периодическая, если существует такое отличное от нуля число  $T$ , что для любого  $x$  из области определения функции имеет место:  $f(x+T) = f(x)$ . Такое наименьшее число называется периодом функции. Все тригонометрические функции являются периодическими.

### **Применение свойств функций при решении уравнений и неравенств.**

**1.** Использование области определения функции. Если при рассмотрении уравнения (неравенства) выясняется, что обе его части определены на множестве  $M$ , состоящем из одного или нескольких чисел, то нет необходимости проводить какие-либо преобразования уравнения или неравенства. Достаточно проверить, является или нет каждое из этих чисел решением данного уравнения (неравенства).

Если множество  $M$ , на котором определены обе части уравнения (неравенства), окажется пустым множеством, то в этом случае уравнение (неравенство) решений не имеет [2], [31].

Пример 1. Решить уравнение  $\sqrt{3-x} = \log_5(x-3)$

ОДЗ этого уравнения состоит из всех  $x$ , одновременно удовлетворяющих

условиям  $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}$ . Это значит, что ОДЗ есть пустое множество. Этим решение уравнения и завершается, т. к. установлено, что ни одно число не может являться решением, т.е. уравнение не имеет корней.

Ответ: решений нет.

При решении неравенств иногда можно не находить ОДЗ, а решать неравенство переходом к равносильной ему системе неравенств, в которой либо одно из неравенств не имеет решений, либо знание его решения помогает решить систему неравенств.

Пример 2. Решить неравенство  $\sqrt{\sin x} < \sqrt{1 - |x| + \sin x}$

Нахождение ОДЗ неравенства есть трудная задача, поэтому перейдем к

равносильной ему системе неравенств 
$$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 1 - |x| + \sin x \geq 0 \\ \sin x < 1 - |x| + \sin x \end{cases}$$

Третье неравенство имеет решение  $-1 < x < 1$ . Первое и второе неравенство справедливо лишь для  $x$  из промежутка  $0 \leq x < 1$ . Поэтому этот промежуток является множеством решений системы.

Ответ:  $0 \leq x < 1$ .

**2.** Использование монотонности функций при решении уравнений и неравенств. Это свойство при решении уравнений и неравенств используется чаще всего. Решение уравнений и неравенств с применением монотонности функций основывается на следующих утверждениях [21], [31]:

**2.1.** Пусть  $f(x)$  – непрерывная и строго монотонная функция на некотором промежутке. Тогда уравнение вида  $f(x)=c$ , где  $c$  – данная константа, может иметь не более одного решения на этом промежутке.

**2.2.** Пусть  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывные на некотором промежутке функции. Тогда если  $f(x)$  монотонно возрастает, а  $\varphi(x)$  убывает, то уравнение  $f(x)=\varphi(x)$  имеет не более одного решения на этом промежутке.

**2.3.** Пусть функция  $f(x)$  возрастает на своей области определения. Тогда для решения неравенства  $f(x)>c$  достаточно решить уравнение  $f(x)=c$ . Если  $x_0$  – корень, то решениями неравенства будут значения  $x > x_0$ , принадлежащие области определения  $f(x)$ .

Рассмотрим на примерах, как используются эти утверждения.

Пример 3. Решить неравенство  $\sqrt{3+x} \geq 3-x$ . Существует стандартный прием решения: возведение в квадрат (при условии  $3-x \geq 0$ ). Мы рассмотрим решение данного неравенства с использованием свойства монотонности. Функция, расположенная в левой части неравенства, монотонно возрастает, в правой части - убывает. Из этого следует, что

уравнение  $\sqrt{3+x} = 3-x$  имеет не более одного решения, причем если  $x_0$  – решение этого уравнения, то при  $-3 \leq x \leq x_0$  будет  $\sqrt{3+x} < 3-x$ , а решением данного неравенства будет  $x \geq x_0$ . Значение  $x_0$  легко подбирается:  $x_0 = 1$ .

Ответ:  $x \geq 1$ .

Пример 4. Решить уравнение  $3^x + 4^x = 7^x$

Данное уравнение имеет очевидное решение  $x = 1$ . Докажем, что других

решений нет. Поделим обе части на  $7^x$ , получим  $\left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x = 1$ . Левая часть представляет собой монотонно убывающую функцию. Правая часть функция постоянная. Следовательно, каждое свое значение она принимает один раз, то есть данное уравнение имеет единственное решение.

Ответ:  $x = 1$ .

3. Уравнения вида  $h(f(x)) = h(g(x))$ . При решении уравнений данного вида используются следующие утверждения [2], [5], [31]:

1) пусть область существования функции  $h(u)$  есть промежуток  $M$  и пусть эта функция непрерывна и строго монотонна на этом промежутке.

Тогда уравнение  $h(f(x)) = h(g(x))$  будет равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \in M \\ g(x) \in M \end{cases};$$

2) если множество  $M$  совпадает с  $\mathbb{R}$ , то уравнения  $h(f(x)) = h(g(x))$  и  $f(x) = g(x)$  равносильны;

В школе чаще пользуются не этой теоремой, а ее следствиями:

3) уравнение  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$  равносильно системе  $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$  (При условии, что  $a > 0$  и  $a \neq 1$ );

4) для любого натурального числа  $2m$  уравнение  $\sqrt[2m]{f(x)} = \sqrt[2m]{g(x)}$  равносильно системе  $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ .

Заметим, что в этих двух системах любое из неравенств можно опустить.

Пример 5. Решить уравнение  $\lg(x^2 - 4) = \lg(6x + 4)$

Данное уравнение равносильно системе 
$$\begin{cases} x^2 - 4 = 6x + 4 \\ 6x + 4 > 0 \end{cases}$$
. Уравнение имеет два корня  $x_1 = 3 + \sqrt{17}$ ;  $x_2 = 3 - \sqrt{17}$ . Неравенству удовлетворяет только первый корень. Следовательно система, а, значит, и равносильное ей уравнение имеют единственное решение.

Ответ:  $x = 3 + \sqrt{17}$ .

**4.** Использование понятия области изменения функции. При изучении уравнений в школе обращается внимание учащихся на нахождении области допустимых значений неизвестного. Однако в стороне остаются такие вопросы: если область допустимых значений неизвестного непустое множество, то всегда ли существует решение, какие необходимые условия его существования? Если существует решение, то нельзя ли сузить границы корней?

Дать ответы на эти вопросы можно, если использовать понятие области изменения функции (или область значений).

Пусть дано уравнение  $f(x) = \varphi(x)$ , где  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  - элементарные функции, определенные на множествах  $X_1$  и  $X_2$ . Тогда областью допустимых значений  $x$  для уравнения будет множество, состоящее из тех значений  $x$ , которые принадлежат обоим множествам, то есть  $A = X_1 \cap X_2$ . Если множество  $A$  пустое ( $A = \emptyset$ ), то уравнение решений не имеет. Поэтому рассмотрим случай, когда  $A \neq \emptyset$ .

Обозначим области изменения этих функций соответственно через  $Y_1$  и  $Y_2$ . Если  $x_1$  является решением уравнения, то будет выполняться числовое равенство  $f(x_1) = \varphi(x_1)$ , где  $f(x_1)$  - значение функции  $f(x)$  при  $x = x_1$ , а  $\varphi(x_1)$  значение функции  $\varphi(x)$  при  $x = x_1$ .

Значит, если уравнение имеет решение, то области значений функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  имеют общие элементы ( $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ ). Если же таких общих элементов множества  $Y_1$  и  $Y_2$  не содержат, то уравнение решений не имеет. Из того, что  $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ , еще не следует существование решения, ибо это есть только необходимое, а не достаточное условие. Эти рассуждения полезно подкрепить графиками [41].

Пусть дано неравенство  $f(x) \leq \varphi(x)$ , где  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  – элементарные функции, определенные на множествах  $X_1$  и  $X_2$ , причем  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ . Обозначим области изменения этих функций соответственно через  $Y_1$  и  $Y_2$ . Если промежуток  $[x_1; x_2]$  является решением неравенства, то для любого  $x$  из этого промежутка будет выполняться числовое неравенство  $f(a) \leq \varphi(a)$ , где  $f(a)$  – значение функции  $f(x)$  при  $x=a$ , а  $\varphi(a)$  значение функции  $\varphi(x)$  при  $x=a$ . Значит, если неравенство имеет решение, то области значений функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  имеют общие элементы ( $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ ). Если же таких общих элементов множества  $Y_1$  и  $Y_2$  не содержат, то уравнение решений не имеет.

$$2 \cos(3x^2 - x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}.$$

Пример 6. Решить уравнение

ОДЗ – множество действительных чисел. Область изменения функции  $f(x) = 2 \cos(3x^2 - x)$  – множество  $Y_1 = [-2; 2]$ , область изменения функции  $\varphi(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$  – множество  $Y_2 = [2; \infty]$ . Тогда  $Y_1 \cap Y_2 = [-2; 2] \cap [2; \infty] = \{2\}$ .

Следовательно, если уравнение имеет решения, то ими могут быть только те значения  $x$ , при которых обе функции одновременно принимают значение, равное 2. Функция  $\varphi(x)$  принимает это значение только один раз, при  $x=0$ . Нетрудно убедиться, что  $f(0)=2$ .

Ответ:  $x=0$ .

**5.** Использование свойств четности или нечетности и периодичности функций. Знания учащихся о свойствах четных и нечетных функций, о периодических функциях становятся более глубокими и осознанными, если систематически использовать эти свойства при решении уравнений и неравенств. Кроме того, применение свойств четности или нечетности, периодичности функций способствует рационализации самих решений.

Пусть имеем уравнение или неравенство  $F(x)=0$ ,  $F(x)>0$  ( $F(x)<0$ ), где  $F(x)$  – четная или нечетная функция. Область определения такой функции симметрична относительно нуля (необходимое условие).

Для любых двух симметричных значений аргумента из области определения четная функция принимает равные числовые значения, а нечетная – равные по абсолютной величине, но противоположного знака значения.



## **Вывод.**

Использование свойств функций очень важно для решения многих неравенств, ведь зная эти свойства и умея их правильно применять, в некоторых случаях можно решить задачу, не прибегая к каким-либо большим преобразованиям, которыми не всегда удобно пользоваться. Таким образом, можно сделать вывод, что, используя свойства функций, можно избежать огромных преобразований, а значит, этот способ решения наиболее рационален.

## **Список литературы:**

1. <http://www.ref.by/refs/49/25558/1.html>
2. [https://www.webmath.ru/poleznoe/svoistva\\_funcsii.php](https://www.webmath.ru/poleznoe/svoistva_funcsii.php)
3. <https://www.kazedu.kz/referat/128258/5>