Уравнения. Степенные. Иррациональные. Показательные. Логарифмические

Обобщение

Оглавление

Что такое уравнение?
дефицит
норма
профицит
Что такое уравнение?
Как решать уравнения?
Линейные уравнения
Квадратные уравнения
Дробно-рациональные уравнения
Свойства степени
Свойства степени
Свойства степени
Свойства корня
Свойства логарифма
Связь степени, корня, логарифма
Иррациональные уравнения
Иррациональные уравнения
Показательные уравнения
Показательные уравнения
Показательные уравнения
Логарифмические уравнения
Задание на вторую половину пары и ДЗ

Что такое уравнение?

профицит

норма

дефицит

Что такое уравнение?

Уравнение с одной переменной (уравнение с одной неизвестной) — равенство, содержащее переменную.

Корень уравнения — значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Решить уравнение — найти все его корни или доказать, что корней нет.

Как решать уравнения?

Правила решения уравнений

- Если любое слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом знак слагаемого, то корни уравнения не изменяются.
- Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то корни уравнения не изменяются.

Линейные уравнения

Линейное уравнение — целое уравнение вида $ax + b = 0$, где x — переменная, a и b — некоторые числа.

Решение линейных уравнений

- Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $x = -\frac{b}{a}$;
- Если $a \neq 0$, $b = 0$, то $x = 0$;
- Если $a = 0$, $b \neq 0$, то корней нет;
- Если $a = 0$, $b = 0$, то x — любое число.

Квадратные уравнения

Квадратное уравнение — уравнение вида: $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$		
Неполные квадратные уравнения		
• при $c = 0$, $b \neq 0$ $ax^2 + bx = 0$ $x(ax + b) = 0$ $x = 0$ или $x = -\frac{b}{a}$	• при $c = 0$, $b = 0$ $ax^2 = 0$ $x^2 = 0$ $x = 0$	• при $c \neq 0$, $b = 0$ $ax^2 + c = 0$ $x^2 = -\frac{c}{a}$; $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ если $-\frac{c}{a} < 0$, то корней нет

Вычисление дискриминанта D и корней квадратного уравнения

- $D = b^2 - 4ac$,
- $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
- Если b — чётное, то $D_1 = k^2 - ac$, $k = \dfrac{b}{2}$,

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

Теорема Виета

$ax^2 + bx + c = 0$ $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$	$x^2 + bx + c = 0$ $(a = 1)$ — приведённое квадратное уравнение $x_1 \cdot x_2 = c$ $x_1 + x_2 = -b$

- Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{c}{a}$.
- Если $a - b + c = 0$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{c}{a}$.

Решение неприведённого квадратного уравнения по теореме Виета

$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 + bm + ac = 0$

$D = b^2 - 4ac$,

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,

$m_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$, $x_{1,2} = \dfrac{m_{1,2}}{a}$,

находим $m_{1,2}$ по теореме Виета.

Пример. Решите уравнение: $3x^2 - 14x + 16 = 0$.

Решение.

1) $D = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 =$
$= 196 - 192 = 4 > 0 \quad \Rightarrow$ 2 корня.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{14 + \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{14 + 2}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{14 - \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{14 - 2}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

Ответ: $x_1 = 2\frac{2}{3}$, $x_2 = 2$.

2) $b = -14$ — чётное, $k = \dfrac{b}{2}$.

$D = k^2 - ac = (-7)^2 - 3 \cdot 16 = 49 - 48 = 1$.

$$x_1 = \frac{-k + \sqrt{D_1}}{a} = \frac{7 + 1}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

$$x_2 = \frac{-k - \sqrt{D_1}}{a} = \frac{7 - 1}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Ответ: $x_1 = 2\frac{2}{3}$, $x_2 = 2$.

3) Применяя теорему Виета, перепишем данное уравнение в виде $m^2 + bm + ac = 0$.

$m^2 - 14m + 3 \cdot 16 = 0$, $m^2 - 14m + 48 = 0$.

$x_1 = \dfrac{m_1}{3}$, $x_2 = \dfrac{m_2}{3}$, m_1 и m_2 находим подбором:

$m_1 \cdot m_2 = c$, $m_1 + m_2 = -b \to 8 \cdot 6 = 48$, $8 + 6 = 14$.

$x_1 = \dfrac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$, $x_2 = \dfrac{6}{3} = 2$. Теперь проверяем корни:

$$\frac{8}{3} \cdot 2 = \frac{16}{3} = \frac{c}{a}, \quad \frac{8}{3} + \frac{6}{3} = \frac{14}{3} = -\frac{b}{a}.$$

Ответ: $x_1 = 2\frac{2}{3}$, $x_2 = 2$.

Дробно-рациональные уравнения

Рациональные уравнения — уравнения, левая и правая части которых являются рациональными выражениями.

Алгоритм решения рациональных уравнений

Разделить левую и правую части уравнения на общий делитель, если таковой имеется.

↓

Разложить на множители многочлены в знаменателях, если они раскладываются.

↓

Домножить на наименьший общий знаменатель левую и правую части уравнения.

↓

Решить полученное целое уравнение.

↓

Проверить корни уравнения, не превращают ли они знаменатель первоначального уравнения в нуль. Если да, то исключить такие корни.

↓

Записать ответ.

1) $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2^{\backslash x-1}}{x-1} - 3^{\backslash x^2-2x+1} = 0 \mid (x-1)^2 \neq 0, x \neq 1.$

$1 + \underline{2x} - 2 - 3x^2 + \underline{6x} - 3 = 0,$

$3x^2 - 8x + 4 = 0.$

$x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = 2.$

Ответ: $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 2.$

Свойства степени

Степень с натуральным (N) показателем

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ раз}$; $a^1 = a$

Степень с целым (Z) показателем

$a^0 = 1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Свойства степени

Степень с рациональным (Q) показателем

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a>0,\ m\in Z,\ n\in N$$

Свойства степени

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^m \cdot b^m = (ab)^m$
- $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

Свойства корня

- $\sqrt[n]{a} = b, \; a = b^n$
- $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

Свойства логарифма

$a \neq 1$, $a>0$, $b>0$

- Определение логарифма?
- Основное логарифмическое тождество?
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$
- $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$
- Формула перехода к новому основанию?

Связь степени, корня, логарифма

- $a^b = c$ - **возведение в степень** (a – основание степени, b – показатель степени, c – значение степени)
- $\sqrt[b]{c} = a$ - **извлечение корня** (поиск исходного основания, b – индекс корня, c – подкоренное выражение, a – значение корня)
- $\log_a c = b$ – **логарифмирование** (поиск исходного показателя, a – основание логарифма, c – логарифмируемое число, b – значение логарифма)

Иррациональные уравнения

Иррациональные уравнения — уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня.

Основные типы иррациональных уравнений	
$\sqrt[n]{f(x)} = a$	• Если n — чётно, то при $a \geqslant 0$ — $f(x) = a^n$; при $a < 0$ — решений нет; • Если n — нечётно, то $f(x) = a^n$.
$\sqrt{f(x)} = g(x)$	$\begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$
$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$	• Если n — чётно, то $\begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$ • Если n — нечётно, то $f(x) = g(x)$.

Иррациональные уравнения

Примеры:

1) $\sqrt{20-x}=x.$

Решение.

$$\begin{cases}20-x=x^2,\\ x\geqslant 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2+x-20=0,\\ x\geqslant 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x=4,\\ x\geqslant 0;\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}x=-5,\\ x\geqslant 0.\end{cases}$$

Ответ: 4.

2) $\sqrt{10+x}=\sqrt{3-x}.$

Решение.

$$\begin{cases}10+x=3-x,\\ 3-x\geqslant 0;\end{cases}\quad \begin{cases}2x=-7,\\ x\leqslant 3;\end{cases}\quad \begin{cases}x=-3{,}5,\\ x\leqslant 3.\end{cases}$$

Ответ: –3,5.

Показательные уравнения

Показательные уравнения — уравнения, в которых переменная входит только в показатели степени при постоянных основаниях.

Простейшее показательное уравнение

$a^x = b,\ a > 0,\ a \neq 1.$

- Если $b > 0$, то $x = \log_a b$.
- Если $b \leqslant 0$, то решений нет.

Примеры:

1) $2^x = 7,\ x = \log_2 7$;

2) $3^x = -4,\ -4 < 0$, решений нет.

Уравнение $a^{p(x)} = a^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1$

Решение: $p(x) = g(x)$.

Пример. $4^{x-15} = \frac{1}{2}$; $2^{2(x-15)} = \frac{1}{2}$; $2^{2x-30} = 2^{-1}$; $2x - 30 = -1$;

$2x = 29,\ x = 14{,}5$.

Показательные уравнения

Уравнение $a^{p(x)} = b^{p(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$

Решение: $\frac{a^{p(x)}}{b^{p(x)}} = 1$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{p(x)} = \left(\frac{a}{b}\right)^{0}$; $p(x) = 0$.

Пример. $4^{4-x} = 0{,}4 \cdot 10^{4-x}$.

Решение: $\left(\frac{4}{10}\right)^{4-x} = 0{,}4$; $0{,}4^{4-x} = 0{,}4$; $4 - x = 1$; $x = 3$.

Ответ: 3.

Показательные уравнения

Методы решения показательных уравнений

• **Замена переменной**

Пример. $4^{x+1} - 4 \cdot 2^x - 3 = 0$.

Решение.

$4 \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x - 3 = 0$; $4 \cdot (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 3 = 0$.

Замена $2^x = t$. $4t^2 - 4t - 3 = 0$; $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{3}{2}$;

$2^x = -\frac{1}{2}$ — нет решений; $2^x = \frac{3}{2}$; $x = \log_2 \frac{3}{2}$;

$x = \log_2 3 - 1$.

Ответ: $\log_2 3 - 1$.

• **Однородные уравнения**

Пример. $9^x - 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 4^x = 0$.

Решение.

$(3^x)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 3^x - 3 \cdot (2^x)^2 = 0 \,|\, : (2^x)^2$;

$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 3 = 0$. Замена $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$; $t^2 - 2t - 3 = 0$; $t_1 = -1$,

$t_2 = 3$; $\left(\frac{3}{2}\right)^x = -1$ — решений нет; $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 3$,

$x = \log_{1,5} 3$.

Ответ: $\log_{1,5} 3$.

Логарифмические уравнения

Логарифмические уравнения — уравнения, в которых переменная находится под знаком логарифма или в основании логарифма.

Простейшее логарифмическое уравнение

$$\log_a x = b,$$

$$a > 0,\ a \neq 1,\ x = a^b.$$

Пример. $\log_3 (5 - x) = 5$.

Решение. $5 - x = 3^5$; $x = 5 - 243$; $x = -238$.

Ответ: -238.

Уравнение

$$\log_a p(x) = \log_a g(x),$$

$$\begin{cases} p(x) = g(x), \\ p(x) > 0. \end{cases}$$ (примечание, или $g(x) > 0$, что удобнее)

Пр. $\log_3 (x^2 - 2) = \log_3 (x + 4)$.

Решение.

$= x + 4$, $x + 4 > 0$; $\begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ x > -4; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -2, \\ x > -4; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = 3, \\ x > -4. \end{cases}$

Ответ: -2; 3.

Замена переменной

Пример. $2\log_9^2 x - 3\log_9 x + 1 = 0$.

Решение.

Замена: $\log_9 x = t$, $2t^2 - 3t + 1 = 0$; $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}$;

$\log_9 x = 1$ или $\log_9 x = \frac{1}{2}$; $x = 9$ или $x = 9^{\frac{1}{2}}$, $x = 3$.

Ответ: 3; 9.

Задание на вторую половину пары и ДЗ

1. Посмотреть видео:

- https://youtu.be/yNn6VQkj3CI

2. Выполнить задания (см. файл в WhatsApp)
3. Решения сфотографировать и прислать на почту gvk5791@mail.ru не позднее 21.00
4. Ответы на задания вписать в Яндекс-форму по ссылке https://forms.yandex.ru/cloud/6177033e3a9b05f78891c9d4/ (Будьте, пожалуйста, внимательны, не перепутайте)
5. Ликвидировать «долги».

ИЛИ

1. Изучить файл **2.Уравнения.Теория**
2. Изучить файл **Образцы решений**
3. **Найти логическую ошибку** – несостыковку (в теории написано одно, а образцах решений – другое)
4. Прислать на почту gvk5791@mail.ru не позднее 21.00 письмо с описанием этой ошибки (В чем именно она заключается?)