

Министерство образования и науки РБ
Муниципальное образование «Закаменский район»
МКУ «Закаменское районное управление образования»
Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа №5 г. Закаменск»
Районная научно-практическая конференция «Шаг в будущее»
Секция «Геометрия»

Универсальная формула Симпсона

Выполнила: Михайлова Екатерина,
ученица 11«Б» класса

Руководитель: Раднаева Гармасу Бадмаевна,
учитель математики

МАОУ «СОШ №5 г.Закаменск»

г. Закаменск,

2021 г.

Рецензия на исследовательскую работу
ученицы 11 «Б» класса МАОУ «СОШ №5 г.Закаменск»
Михайловой Екатерины.

Для работы была выбрана тема «Универсальная формула Симпсона». Тема рецензируемой работы достаточно актуальна, т.к учащиеся на протяжении всех лет учебы на уроках алгебры, геометрии, физики, химии сталкиваются с огромным количеством различных формул. В данной исследовательской работе показано, как вычислить объемы тел и площади плоских фигур с помощью одной формулы, которая не встречается в школьном курсе математики.

Исследовательская работа структурно выстроена правильно, логична, четко сформулированы цель и задачи, присутствуют моменты исследования научного характера и заключение по работе. Ученицей исследован материал выходящий за рамки школьной программы. Содержание отвечает выбранной теме, которая раскрыта достаточно.

Исследовательская работа четко структурирована, грамотно изложена, прослеживается логическая связь между частями работы, отличается завершённостью. Автором использованы общенаучные термины.

Данную работу можно использовать в качестве дидактического материала для подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня.

В работе ученица проявила исследовательские качества, самостоятельность в изучении большого объема специализированной источников информации, компьютерную грамотность в оформлении и создании презентации к защите.

Рецензент: руководитель МО учителей математики

МАОУ «СОШ №5 г.Закаменск»

Никитенко Анна Александровна



Содержание.

Введение.....	3
Глава 1. Краткие характеристики свойств геометрических тел.	
1.1. Формулы для вычисления площади фигур.....	4
1.2. Свойства объемов тел	6
1.3 Формулы для вычисления объемов геометрических тел	6
1.4.Формула Симпсона.....	8
Глава 2. Применение формул при решении геометрических задач.	
2.1.Формула Симпсона для вычисления площади плоских фигур.....	8
2.2. Формула Симпсона для вычисления объемов пространственных тел.....	9
2.3. Практическое применение универсальной формулы.....	10
Заключение.....	11
Список литературы.....	12
Приложение.....	13

Введение

Подготовка к ЕГЭ по математике не может обойтись без изучения геометрии. Задачи на расчет площади и объема фигур, нахождение углов и длин сторон встречаются и в первой, и во второй части.

Площадь — величина, которая есть у плоских фигур. Ее можно посчитать для квадрата, прямоугольника, параллелограмма, треугольника, ромба, трапеции, круга.

Объем присущ трехмерным объектам, таким как куб, шар, параллелепипед, призма, пирамида, конус. Объемные тела условно делят на многогранники (состоят из нескольких многоугольников) и поверхности вращения (есть условная линия, вдоль которой вращается плоская фигура). На вычисление объема это не влияет.

В связи с многообразием геометрических фигур тел существует огромное количество формул для нахождения площадей и объёма (на каждую фигуру и каждое тело приходится своя формула). Рассматривая формулы по геометрии, можно убедиться, что огромное количество формул связано с площадями и объемами фигур. Таких формул более двенадцати по площадям плоских фигур и более десяти по объемам пространственных тел.

Существует ли такая универсальная формула для нахождения площади и объёма геометрических фигур и тел?

Актуальность данной темы не только среди учащихся, но и среди взрослых, т.к. школьная программа со временем забывается, и мало кому известно о том, что существует такая формула, которая объединила в себе все другие многочисленные и тяжело запоминающие формулы для нахождения площади фигур и объёма тел. В школьной программе данная тема не рассматривается. В работе представлены использование универсальной формулы для вычисления площади фигур и объема тел, разобраны конкретные примеры. Данная работа будет полезна учителям старших классов для подготовки к ЕГЭ.

Объект: геометрические задачи и способы решения.

Предмет исследования – решение геометрических задач с помощью универсальной формулы Симпсона.

Цель работы:

1. Повысить уровень математической культуры;
2. Развить в себе навыки исследовательской деятельности в области математики;
3. Научиться решать стереометрические задачи с помощью универсальной формулы Симпсона;

4. Применять эти методы решения к задачам из повседневной жизни человека, а также к задачам, предлагаемым в олимпиадных заданиях.

Задачи:

1. Изучить учебную и справочную литературу;
2. Исследовать методы решения геометрических задач, используя универсальную формулу Симпсона;
3. Научиться решать задачи из повседневной жизни, олимпиадных заданий, из материалов ЕГЭ применив изученные ранее методы.

Практическая значимость: Результаты данной работы могут иметь применение в школьной практике, а именно использоваться на занятиях по геометрии и алгебре, при подготовке и сдаче ЕГЭ.

Методы исследования: анализ, синтез, сравнение, противопоставление, ранжирование, прогнозирование, наблюдение.

Гипотеза: В XVIII веке английский математик Томас Симпсон вывел формулу для нахождения некоторых площадей плоских фигур и объемов пространственных тел через вычисление площадей нижнего, верхнего и среднего основания.

Я предполагаю, что данная универсальная формула позволит заменить все формулы и позволит легко их запомнить.

Глава 1. Краткие характеристики свойств геометрических тел

Школьный курс геометрии делится на планиметрию и стереометрию.

Планиметрия - раздел геометрии, изучающий фигуры на плоскости.

Стереометрия - раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве. Объёмные геометрические тела делятся на многогранники и тела вращения.

Многогранник – поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело.

Тела вращения – геометрические тела, полученные путём вращения вокруг своей оси. Тела вращения: цилиндр, конус, шар.

Многогранники бывают выпуклые и невыпуклые. Выпуклые многогранники - расположены по одну сторону от плоскости каждой грани. Невыпуклые многогранники – расположены по обе стороны от плоскости хотя бы одной грани.

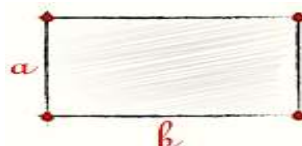
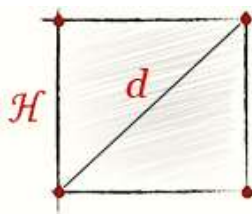
1.2. Формулы для вычисления площади фигур

Площадь — это одна из наиболее важных и неотъемлемых характеристик любой замкнутой геометрической фигуры, показывающая её размер. Она может измеряться в различных единицах: квадратных миллиметрах, сантиметрах, дециметрах, метрах и так далее. В геометрии разработаны формулы площадей.

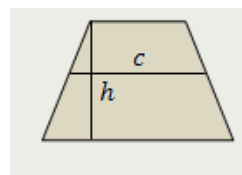
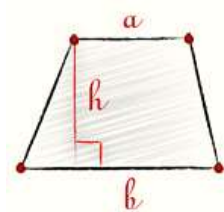
Квадратом называется параллелограмм с прямыми углами и равными сторонами. Площадь квадрата равна квадрату длины его стороны. Или половине квадрата диагонали.

$$S = H^2, S = \frac{d^2}{2}$$

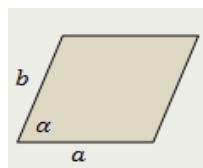
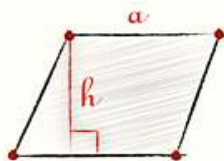
Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы равны. Площадь прямоугольника равна произведению его сторон. $S = a \cdot b$



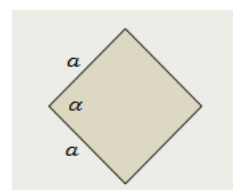
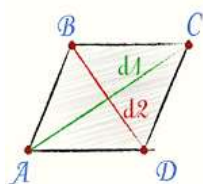
Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны. Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту. $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Площадь трапеции равна произведению её средней линии на высоту. $S = c \cdot h$



Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту. $S = a \cdot h$. Площадь параллелограмма равна произведению двух соседних его сторон на синус угла между ними. $S = ab \cdot \sin \alpha$



Ромбом называется параллелограмм с равными сторонами. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ Площадь ромба равна произведению квадрата его стороны на синус одного из его углов. $S = a^2 \sin \alpha$



Окружность есть геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки. Площадь круга равна произведению полуокружности на радиус.



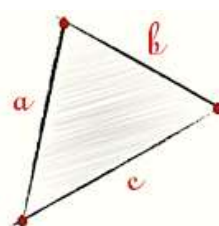
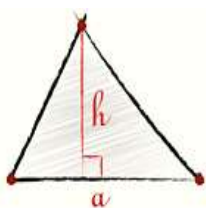
$$S = \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi d^2$$

Треугольник образуется соединением отрезками трех точек, не лежащих на одной прямой. При этом точки называются вершинами треугольника, а отрезки - его сторонами. Площадь треугольника равна

произведению половины основания треугольника на его высоту. $S = \frac{1}{2} a \cdot h$

Площадь треугольника по формуле Герона равна корню из произведения разностей полупериметра треугольника (p) и каждой из его сторон.

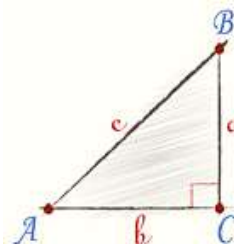
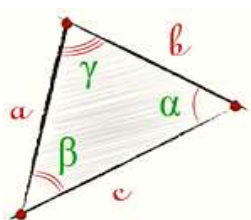
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$



Если известно две стороны треугольника и угол между ними, то площадь данного треугольника вычисляется, как половина произведения этих сторон, умноженная на синус угла между ними.

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Если один из углов прямой, то треугольник - прямоугольный. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов треугольника. $S = \frac{1}{2} ab$



1.2. Свойства объемов тел

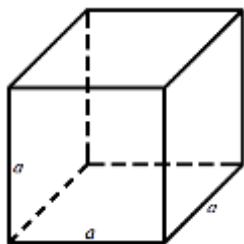
Любое тело можно разбить на более простые части. Объем равен сумме объемов его отдельных частей. Равновеликие тела имеют равные объемы. Единицей объема считают объем куба с ребром единичной длины.

1.3. Формулы для вычисления объемов геометрических тел

Все эти формулы объединяет один математический принцип: произведение высоты фигуры на площадь ее основания ($V=S \cdot h$, где V - объем, S - площадь основания, h – высота фигуры). Вследствие того, что основания у таких фигур представляют собой различные

плоские фигуры: квадрат, ромб, треугольник, круг и т.д., тогда и общая формула объема видоизменяется, из-за разных формул площадей основания.

Куб – правильный многогранник, каждая грань которого представляет собой квадрат.

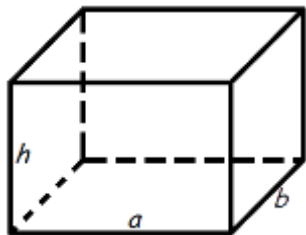


Объем куба равен кубу длины его грани.

Формула объема куба: $V = a^3$

V - объем куба, a - длина грани куба.

Параллелепипед – призма, основанием которой служит параллелограмм, или (равносильно) многогранник, у которого шесть граней и каждая из них – параллелограмм.

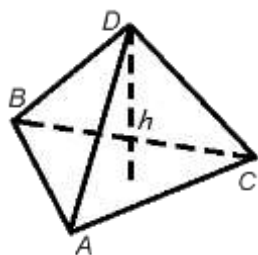


Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его длины, ширины и высоты.

Формула объема прямоугольного параллелепипеда: $V = a \cdot b \cdot h$

V - объем прямоугольного параллелепипеда, a - длина, b - ширина, h - высота.

Пирамида – многогранник, одна из граней которого (называемая основанием)— произвольный многоугольник, а остальные грани (называемые боковыми гранями)— треугольники, имеющие общую вершину.

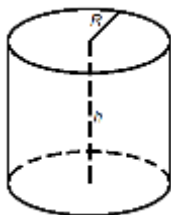


Объем пирамиды равен трети от произведения площади ее основания на высоту.

Формула объема пирамиды: $V = \frac{1}{3} S_0 \cdot h$

V - объем пирамиды, S_0 - площадь основания пирамиды, h - длина высоты пирамиды.

Цилиндр– геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, пересекающими её под прямым углом.



Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

Формулы объема цилиндра: $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$, $V = S_0 \cdot h$

V - объем цилиндра, S_0 - площадь основания цилиндра, R - радиус цилиндра, h - высота цилиндра, $\pi = 3,14$.

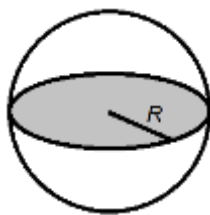
Конус - тело, полученное объединением всех лучей, исходящих из одной точки (вершины конуса) и проходящих через плоскую поверхность.



Объем конуса равен трети от произведения площади его основания на высоту. **Формула объема конуса:** $V = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot h$

V - объем конуса, S_0 - площадь основания конуса, R - радиус основания конуса, h - высота конуса, $\pi = 3,14$.

Шар – геометрическое тело; совокупность всех точек пространства, находящихся от центра на расстоянии, не больше заданного.



Объем шара равен четверем третьим от его радиуса в кубе помноженного на число пи.

Формула объема шара: $V = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$

V- объем шара, R- радиус шара, $\pi = 3,14$.

1.4.Формула Симпсона

Томас Симпсон(20 августа 1710 – 14 мая 1761) – английский математик. В 1746 году Симпсон избран в члены Лондонского королевского общества, а ранее – в члены основанного в 1717 году в Лондоне Математического общества. В 1758 избран иностранным членом Шведской королевской академии наук. Назначенный профессором в Королевскую военную академию в Вулидже, Симпсон составил учебники по элементарной математике. В особых отделах геометрии рассматриваются задачи о наибольших и наименьших величинах, решаемые с помощью элементарной геометрии, правильные многогранники, измерение поверхностей, объёмы тел и, наконец, смешанные задачи.

Замечательная формула существует; более того: она пригодна не только для вычисления объема цилиндра, полного конуса и усеченного конуса, но также и для всякого рода призм, пирамид полных и усеченных и даже для шара, а так же для вычисления площадей плоских фигур. Вот эта формула, известная в математике под названием формулы Симпсона:

$V = \frac{h}{6} (S_1 + 4S_2 + S_3)$, где h-высота тела, S_1 -площадь нижнего основания, S_2 - площадь среднего сечения, S_3 - площадь верхнего основания.

$S = \frac{h}{6} (b_1 + 4b_2 + b_3)$, где h-высота фигуры, b_1 -длина нижнего основания, b_2 - длина средней линии фигуры, b_3 - длина верхнего основания.

Глава 2. Применение формул при решении геометрических задач.

2.1.Формула Симпсона для вычисления площади плоских фигур.

Пример 1. (ЕГЭ-2021) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите ее площадь.

Дано: ABCD

$a=6, b=3, h=3$

Найти: S-?

Решение:

1 способ: по формуле площади трапеции $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$

$$S = \frac{3+6}{2} \cdot 2 = 13,5$$

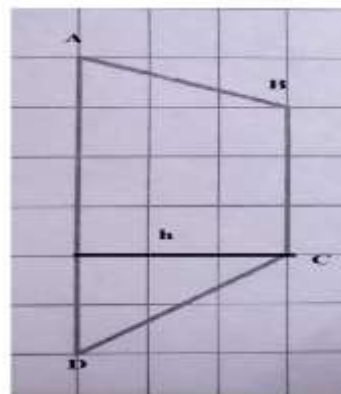
Ответ: 13,5

2 способ: по формуле Симпсона $S = \frac{h}{6} (b_1 + 4b_2 + b_3)$

$$b_1 = 6, b_3 = 3, b_2 = \frac{b_1 + b_3}{2} = \frac{6 + 3}{2} = 4,5$$

$$S = \frac{3}{6} (6 + 4 \cdot 4,5 + 3) = 13,5$$

Ответ: 13,5



2.2. Формула Симпсона для вычисления объемов пространственных тел.

Пример 2.(ЕГЭ-2021) В прямоугольном параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 9, BC = 8, AA_1 = 6$. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1 .

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - прямоугольный параллелепипед
 $AB = 9, BC = 8, AA_1 = 6$.

Найти: V_{ABCB_1}

Решение:

1 способ: формула Симпсона $V = \frac{h}{6} (S_1 + 4S_2 + S_3)$

Сначала найдем $S_{\triangle ABC}$ по формуле Симпсона

$$S = \frac{h}{6} (b_1 + 4b_2 + b_3)$$

Рассмотрим $\triangle ABC$ - прямоугольный

$$AB = 9, BC = 8$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 9^2 + 8^2 = 145 \rightarrow AC = \sqrt{145}$$

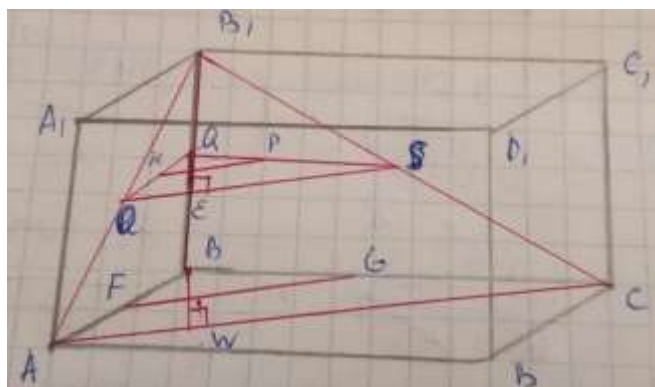
Проведем высоту BW

$$h = \frac{ab}{c} \rightarrow h = \frac{9 \cdot 8}{\sqrt{145}} = \frac{72}{\sqrt{145}}$$

проведем в $\triangle ABC$ среднюю линию FG

$$FG = \frac{\sqrt{145}}{2}, b_3 = 0$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{72}{\sqrt{145} \cdot 6} \left(\sqrt{145} + 4 \cdot \frac{\sqrt{145}}{2} + 0 \right) = 36$$



В $\triangle BB_1C, \triangle AB_1C, \triangle AB_1Q$ проведем средние линии: $OQ = \frac{9}{2}, QS = 4, OS = \frac{\sqrt{145}}{2}$

Рассмотрим $\triangle OQS$: РН-средняя линия, $PH = \frac{\sqrt{145}}{4}$

QE-высота, $QE = \frac{4,5 \cdot 4}{\frac{\sqrt{145}}{2}} = \frac{36}{\sqrt{145}}$

Теперь мы можем найти $S_{\triangle OQS}$: $S = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_2 + b_3)$

$$S = \frac{36}{\sqrt{145} \cdot 6} \cdot \left(\frac{\sqrt{145}}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{145}}{4} + 0 \right) = 9$$

Высота пирамиды $BB_1 = AA_1 = 6$

→ найдем объем пирамиды $ABCB_1$: $V = \frac{h}{6}(S_1 + 4S_2 + S_3)$

$$V = \frac{6}{6} \cdot (36 + 4 \cdot 9 + 0) = 72$$

Ответ: 72

2 способ: $V = \frac{1}{3} S_{\Delta} h$

$h = BB_1 = AA_1 = 6$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 = 36$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 6 = 72$$

Ответ: 72

2.3. Практическое применение универсальной формулы

Объем ствола дерева

При строительстве, а также разного рода житейских вопросах иногда бывает необходимо определить объем ствола дерева, вычислить, сколько в нем кубических метров древесины, взвесить его. Оказывается, эта задача не так проста, как кажется; точного решения не существует, а довольствуются лишь приближенной оценкой. Даже для срубленного и очищенного от сучьев ствола дерева, задача разрешается далеко не просто. Объем ствола дерева более или менее близок либо к объему усеченного конуса, либо – для ствола дерева с вершинным концом – к объему полного конуса, либо, наконец, – для коротких бревен – к объему цилиндра. Но нельзя ли для расчета взять такую формулу объема, которая годилась бы сразу для всех трех названных тел?

Расчёт объема и массы ствола берёзы

Воспользуемся формулой Симпсона. Для этого понадобятся четыре измерения – длина ствола и площади трех оснований дерева: нижнего сруба, верхнего и среднего сечения. Если измерить бечевкой окружность ствола и разделить ее длину на число 2π , получим

радиус. Высота березы(h) - 10 метров, а окружность ствола (L) на высоте груди и в основании ствола оказалась равной 1,2 м. $R = \frac{L}{2\pi}$,

$$R = \frac{1,2}{2 \cdot 3,14} = 0,192$$

$$S = \pi \cdot R^2, S = 3,14 \cdot 0,192^2 = 0,113 \text{ м}^2$$

объем ствола по формуле Симпсона $V = \frac{h}{6} (S_1 + 4S_2 + S_3)$

$$V = \frac{10}{6} (0,113 + 4 \cdot 0,113 + 0) = 0,94 \text{ м}^3$$

Можно оценить и массу дерева на корню. Принимая, что 1 куб. метр свежей березовой древесины весит в среднем 670 кг, находим, что $m = 0,974 \cdot 670 = 630 \text{ кг}$.

Ответ: $V=0,94 \text{ м}^3$; $m = 630 \text{ кг}$.



Заключение

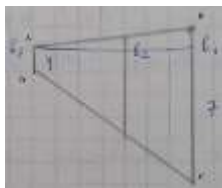
При выборе темы работы меня в первую очередь заинтересовала актуальность темы вычисление площадей плоских фигур и объемов геометрических тел, так как в профильном уровне ЕГЭ по математике встречаются данные типы задач. В начале работы я ставила перед собой цель овладеть знаниями для решения геометрических задач, которые необходимы как в жизни, так и в учебе. В ходе работы по данной теме я рассмотрела вычисления площадей плоских фигур и на их основе начала решать задачи на нахождение объемов геометрических тел. Выполняя данную работу, я сталкивалась с некоторыми трудностями, которые мы решали вместе с учителем по математике. В результате проб и ошибок, я приобрела знания и умения в решении стереометрических задач. Теперь, завершив данную работу, я могу сказать, что смогу справиться с задачами, которые встречаются на ЕГЭ профильный уровень.

Список литературы.

1. Л.С. Атанасян и др. Геометрия 10-11 . Учебник для общеобразовательных учреждений,- М., «Просвещение», 2019.
2. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты:36 вариантов/под ред. И.В.Яценко. - М.: Издательство: Национальное образование»,2021.(ЕГЭ.ФИПИ-школе).
3. Геометрические фигуры. geometricheskie.narod.ru
4. https://vuzlit.ru/940376/vyvod_formuly_simpsona
5. https://studopedia.ru/6_126004_formula-simpsona.html
6. <https://studfiles.net/preview/5433881/page:10/>
7. <https://ru.wikipedia.org/wiki>
8. <https://math-ege.sdamgia.ru>
9. CD-ROM. Большая энциклопедия Кирилла и Мефодия, 2002.
10. .Я.И.Перельман. Занимательная алгебра. Занимательная геометрия. - М., «АСТ»,1999

Приложение

Задача №1. (ЕГЭ-2021) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите ее площадь.



Дано: ABCD-трапеция

Найти: S-?

Решение:

1 способ: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$

По рисунку находим: $a = 7, b = 1, h = 7$

$$S = \frac{7+1}{2} \cdot 7 = 4 \cdot 7 = 28$$

Ответ: 28

2 способ: по формуле Симпсона $S = \frac{h}{6} (b_1 + 4b_2 + b_3)$

$$b_1 = 7, b_2 = 4, b_3 = 1, h = 7$$

$$S = \frac{7}{6} (7 + 4 \cdot 4 + 1) = 28$$

Ответ: 28

Задача №2. (ЕГЭ-2021) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $SA = \sqrt{21}$. На ребрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причем $AM = 4, SK:KB = 1:3$. Найдите объем пирамиды $BCKM$.

Дано: SABC-правильная треугольная пирамида

$$AB = 6, SA = \sqrt{21}, AM = 4, SK:KB = 1:3.$$

Найти: объем пирамиды $BCKM$

Решение: 1 способ - по формуле Симпсона

1) Рассмотрим $\triangle BCM$: $\angle B = 60^\circ$, $BM = 2$, $BC = 6$, $MC = ?$

Применяя теорему косинусов, найдем MC :

$$MC^2 = BC^2 + MB^2 - 2 \cdot BC \cdot MB \cdot \cos B$$

$$MC^2 = 36 + 4 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 28 \rightarrow MC = 2\sqrt{7}$$

2) Проведем высоту MD в треугольнике ABC и найдем ее длину, применяя теорему Пифагора. Пусть $BD = x, CD = 6 - x$

$$MD^2 = MB^2 - BD^2, MD^2 = MC^2 - CD^2 \rightarrow MB^2 - BD^2 = MC^2 - CD^2$$

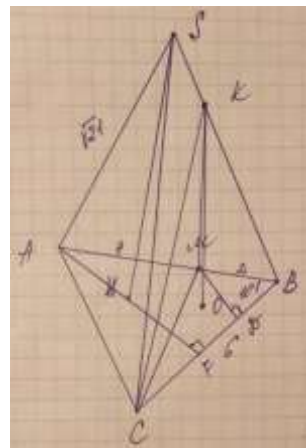
$$4 - x^2 = 28 - (6 - x)^2 \rightarrow x = 1$$

$$\rightarrow MD^2 = 4 - 1 = 3 \rightarrow MD = \sqrt{3}$$

По формуле Симпсона найдем площадь $\triangle BCM$: $S = \frac{h}{6} (b_1 + 4b_2 + b_3)$

$$S_{BCM} = \frac{\sqrt{3}}{6} (6 + 4 \cdot 3 + 0) = 3\sqrt{3}$$

3) Вычислим объем пирамиды $BCKM$ по формуле Симпсона: $V = \frac{h}{6} (S_1 + 4S_2 + S_3)$.



Для этого находим длину высоты (КО) пирамиды ВСКМ, $KO = \frac{3}{4}SH$ (высота пирамиды $SABC$), т. к. $SK:KB = 1:3$

Проведем высоту $AF \triangle ABC$: $AF = \frac{\sqrt{3}}{2}BC \rightarrow AF = 3\sqrt{3}$.

Высоту пирамиды $SABC$ находим из прямоугольного треугольника AHS : $SH=3$.

Площадь сечения пирамиды вычислим, применив признак подобия треугольников:

$$\frac{S_{\text{всм}}}{S_{\text{ср.сеч.пир}}} = k^2, \text{ где } k - \text{коэффициент подобия}$$

$$\rightarrow V = \frac{9}{4 \cdot 6} = \left(3\sqrt{3} + 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} + 0 \right) = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

Ответ: $V = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

2 способ: по формуле нахождения объема пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h$

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}ah_1, \text{ где } h_1 - \text{высота основания пирамиды } BCM$$

$$h_1 = MD = \sqrt{3} \text{ (следует из 1 способа)}$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$h = \frac{9}{4} \rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

Ответ: $V = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

Задача №3 (РЕШУ ЕГЭ-2021)

В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA=SB=13, SC = 3\sqrt{17}$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC . Эта высота равна 12.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите объём пирамиды $SABC$.

Дано: $SABC$ -пирамида,

$$SA=SB=13, SC = 3\sqrt{17}$$

CM -медиана треугольника ABC

SH – высота пирамиды, $SH = 12$

а) Доказать: $\triangle ABC$ - равнобедренный.

б) Найти: объём пирамиды $SABC$

Решение: 1 способ- по формуле нахождения объема пирамиды

а) Пусть SH — высота пирамиды $SABC$. Треугольник ASB равнобедренный, поэтому прямые AB и SM перпендикулярны. Прямая AB перпендикулярна плоскости SMC ,

поскольку она перпендикулярна прямым SM и SH . Значит, CM является не только медианой, но и высотой треугольника ABC , то есть треугольник ABC равнобедренный.

б) В пирамиде $SABC$:

$$MH = CH = \sqrt{SC^2 - SH^2} = 3,$$

$$AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = 5,$$

$$BM = AM = \sqrt{AH^2 - MH^2} = 4.$$

$$\text{Значит, объём пирамиды } V = \frac{1}{3} SH \cdot \frac{AB \cdot CM}{2} = 96.$$

Ответ: б) 96.

2 способ- по формуле Симпсона

$$S = \frac{6}{6} \cdot (8 + 4 \cdot 4 + 0) = 24$$

$$S_2 = \frac{1}{4} S_1 = \frac{24}{4} = 6$$

$$\rightarrow V = \frac{12}{6} \cdot (24 + 4 \cdot 6 + 0) = 2 \cdot 48 = 96$$

Ответ: б) 96.

