

2. ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

2.1. Основные понятия

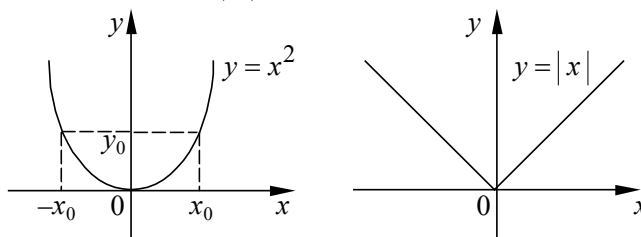
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Переменная величина y называется **функцией** переменной величины x , если каждому численному значению x из множества X соответствует единственное определенное значение y из множества Y : $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$. Переменная величина x называется **независимой переменной** или **аргументом**. Множество X называется **областью определения** функции (**ООФ**) или **областью допустимых значений аргумента (ОДЗ)**. Множество Y изменения функции называется **областью значений** функции (**ОЗФ**).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости xOy , координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$. **Нули функции** $y = f(x)$ — точки $x \in X$, при которых функция обращается в ноль, т.е. корни уравнения $f(x) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f(x)$ с областью определения X называется **четной**, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(x) = f(-x)$.

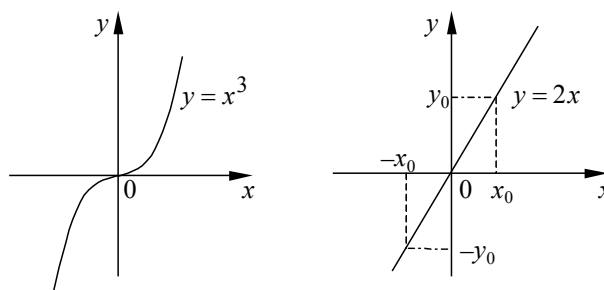
Из определения четной функции следует, что ее график симметричен относительно оси ординат.

Например, функции $y = x^2$, $y = |x|$ являются четными, их графики имеют вид:



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f(x)$ с областью определения X называется **нечетной**, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(x) = -f(-x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Например, функции $y = x^3$ и $y = 2x$ являются нечетными, их графики имеют вид:



Функция, в которой переменные x и y поменялись своими ролями, называется **обратной** по отношению к первоначальной функции. В свою очередь первоначальная функция является обратной к полученной.

Свойство графиков взаимно обратных функций: один получается из другого зеркальным отражением относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, т.е. линии $y = x$.

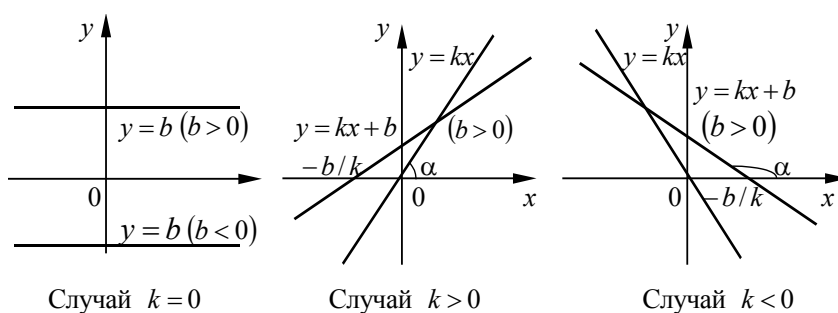
Множество значений обратной функции $y = f^{-1}(x)$ совпадает с областью определения функции $y = f(x)$, а область определения обратной функции $y = f^{-1}(x)$ совпадает со множеством значений функции $y = f(x)$.

2.2. Линейная функция

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа, называется **линейной функцией**.

1. Область определения — $x \in (-\infty, +\infty)$.
2. Множество значений: при $k \neq 0$ $y \in (-\infty, +\infty)$, при $k = 0$ $y = b$.
3. Четность, нечетность. При $k = 0$ функция четная, при $b = 0$ функция нечетная.
4. Периодичность. При $k = 0$ функция периодическая с любым положительным периодом. При $k \neq 0$ функция неперiodическая.
5. Точки пересечения с осями: $\left(-\frac{b}{k}, 0\right)$ и $(0, b)$.
6. Промежутки знакопостоянства. При $k = 0$ функция сохраняет знак коэффициента b ; функция положительна при $k > 0$, если $x > -\frac{b}{k}$, и при $k < 0$, если $x < -\frac{b}{k}$.
7. Промежутки монотонности и экстремумы. Функция возрастает при всех x , если $k > 0$, и убывает, если $k < 0$.
8. Графиком функции $y = kx + b$ является прямая линия. Коэффициент k в уравнении прямой $y = kx + b$ называется угловым коэффициентом прямой. Используя, например, геометрический смысл производной $y' = \operatorname{tg} \alpha$, легко получаем в нашем случае $y' = k = \operatorname{tg} \alpha$, т.е. $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол между прямой и положительным направлением оси Ox .

Варианты графиков:

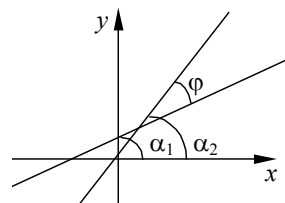


Угол между двумя прямыми

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, \quad k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{|\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1|}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|k_2 - k_1|}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$



Условие перпендикулярности прямых: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

2.3. Квадратичная функция

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция, задаваемая формулой $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), называется **квадратичной**.

1. Область определения — $x \in (-\infty, +\infty)$.

2. Область значений. Выполним преобразование

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{D}{4a} \right), \text{ где } D = b^2 - 4ac \text{ — дискриминант.} \end{aligned}$$

Так как $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$, то при $a > 0$ $y \in \left(-\frac{D}{4a}, +\infty \right)$, а при $a < 0$ $y \in \left(-\infty, -\frac{D}{4a} \right)$.

3. При $b = 0$ функция четная.

4. Функция непериодическая.

5. Точки пересечения с осями координат:

$$(x_1, 0), (x_2, 0), \text{ где } x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \text{ если } D > 0;$$

$\left(-\frac{b}{2a}, 0 \right)$, если $D = 0$; если $D < 0$, точек пересечения нет.

Точка пересечения с осью Oy : $(0, c)$.

6. Для нахождения промежутков монотонности и экстремумов найдем производную и критические точки:

$$y' = (ax^2 + bx + c)' = 2ax + b; \quad 2ax + b = 0 \text{ при } x = -\frac{b}{2a}.$$

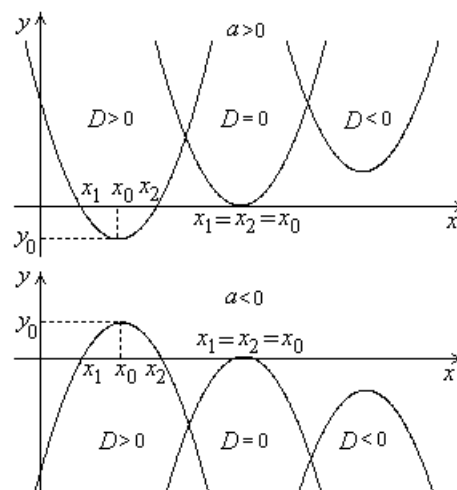
Определим знаки y' в промежутках $\left(-\infty, -\frac{b}{2a} \right)$ и $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty \right)$.

Результаты исследования представим в таблице

x	a	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right)$	$-\frac{b}{2a}$	$\left(-\frac{b}{2a}; +\infty \right)$
Знак или значение y'	$\swarrow a > 0$	—	$\nearrow 0$	+
Поведение y			min	
Знак или значение y'	$\swarrow a < 0$	+	$\nearrow 0$	—
Поведение y			max	

Значения функции в точке экстремума $y\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{D}{4a}$.

7. Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$. Она получается из графика функции $y = ax^2$ путем сдвига вдоль оси Ox на $-\frac{b}{2a}$ единиц (вправо, если $-\frac{b}{2a} > 0$, и влево, если $-\frac{b}{2a} < 0$) и последующего сдвига вдоль оси Oy на $-\frac{D}{4a}$ единиц (вверх, если $-\frac{D}{4a} > 0$, и вниз, если $-\frac{D}{4a} < 0$). Парабола имеет ось симметрии, ею является прямая $x = -\frac{b}{2a}$.



Варианты графиков представлены на рисунках.

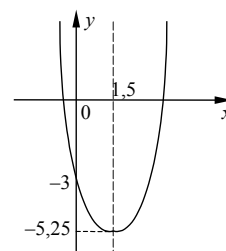
В пункте 2 показано, что квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ всегда можно привести к виду $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ путем выделения полного квадрата. Точка с координатами (x_0, y_0) есть вершина параболы.

ПРИМЕР. Постройте график функции $y = x^2 - 3x - 3$.

Выделим полный квадрат

$$y = x^2 - 3x - 3 = \underbrace{x^2 - 3x}_{x^2 - 3x + 2.25 - 2.25} - 3 =$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{3 \cdot 4}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} = (x - 1,5)^2 - 5,25.$$



Следовательно, $A(1,5; -5,25)$ – вершина параболы. Найдем точку пересечения параболы с осью ординат. Если $x = 0$, то $y = -3$: точка $(0, -3)$ – точка пересечения с осью Oy . Ветви параболы направлены вверх, так как $a = 1 > 0$, ее график симметричен относительно прямой $x = 1,5$.

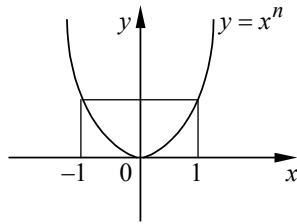
2.4. Степенные функции $y = x^\alpha$

$$y = x^n \quad (n \in N)$$

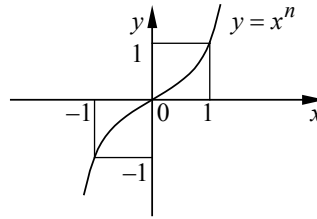
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция вида $y = x^n$, $n \in N$, называется **степенной функцией с натуральным показателем**.

1. Область определения функции

(n – четное)



(n – нечетное)



$$D(y) \in (0, +\infty).$$

$$D(y) \in (-\infty, +\infty)$$

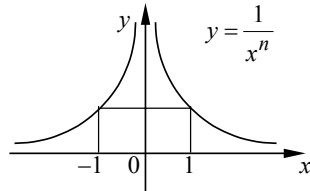
2. Функция является четной при четном n и нечетной при нечетном n .

3. Если n нечетно, то функция $y = x^n$ возрастает при $x \in (-\infty, +\infty)$; если n четно, то функция $y = x^n$ возрастает при $x \in [0, +\infty)$ и убывает при $x \in (-\infty, 0]$.

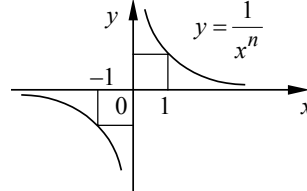
4. Функция непрерывна на $(-\infty, +\infty)$.

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(n – четное)



(n – нечетное)



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция вида $y = x^{-n}$ называется **степенной функцией с целым отрицательным показателем**.

1. Область определения функции – $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2. Функция является четной при четном n и нечетной при нечетном n .

3. Функция убывает при $x > 0$; при $x < 0$ функция убывает, если n нечетное, и возрастает, если n четное.

4. Функция непрерывна на $(-\infty, 0)$ и на $(0, +\infty)$; $x = 0$ – точка разрыва функции.

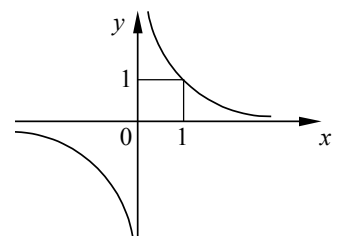
Обратной пропорциональностью называется функция, заданная формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$.

1). Область определения $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2). Область значений $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. График не проходит через начало координат.

3). $y = \frac{k}{x}$ – нечетная функция (поскольку $f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$). График этой функции симметричен относительно начала координат.

4). Если $k > 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на промежутке $(0, +\infty)$ и на промежутке $(-\infty, 0)$. Если $k < 0$,



то функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает на промежутке $(-\infty, 0)$ и на промежутке $(0, +\infty)$.

5). Точек пересечения с осями координат не существует.

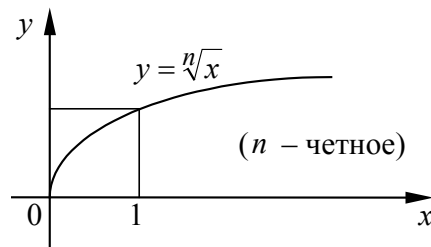
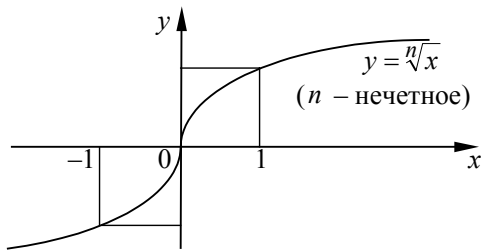
6). При $k > 0$ $y > 0$ на $(0, +\infty)$, $y < 0$ на $(-\infty, 0)$.

При $k < 0$ $y > 0$ на $(-\infty, 0)$, $y < 0$ на $(0, +\infty)$.

7). Функция неперiodическая.

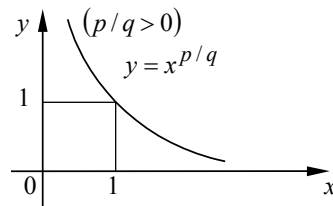
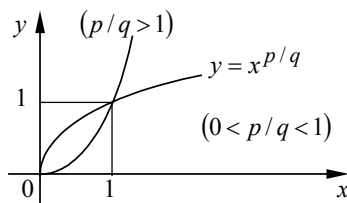
8). Если $k < 0$, то ветви графика расположены в II и IV координатных четвертях. Графиком обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$ является гипербола.

$$y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \quad (n \in \mathbb{N})$$



Функция $y = \sqrt[n]{x}$ является обратной к функции $y = x^n$. Отразив график функции $y = x^n$ симметрично относительно прямой $y = x$, получим график функции $y = \sqrt[n]{x}$.

$$y = x^{p/q} \quad (p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0)$$



2.5. Дробно-линейная функция

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c, d — постоянные, $c \neq 0$, $ad \neq bc$, называется **дробно-линейной**.

1. Область определения функции $x \in (-\infty, -d/c) \cup (-d/c, +\infty)$.

2. Для построения графика преобразуем функцию, выделив в ее выражении целую часть следующим образом.

Преобразуем тождественно числитель, чтобы выделить в нем слагаемое, содержащее знаменатель

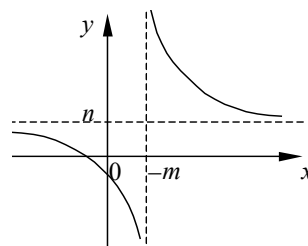
$$ax + b = \frac{a}{c}(cx + d) - \frac{ad}{c} + b;$$

поделив это выражение почленно на $(cx + d)$, получим

$$y = \frac{a}{c} - \frac{\frac{ad}{c} - b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}},$$

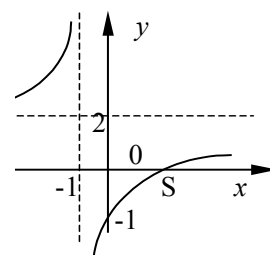
таким образом, обозначая $\frac{a}{c} = n$, $\frac{d}{c} = m$, $k = \frac{bc - ad}{c^2}$, видим, что $y = \frac{ax + b}{cx + d} = n + \frac{k}{x + m}$, где n — целая часть исходного выражения.

График дробно-линейной функции получается сдвигом графика гиперболы $y = \frac{k}{x}$ на m единиц вдоль оси Ox и на n единиц вдоль оси Oy . Прямые $y = n$ и $x = m$ являются асимптотами гиперболы.

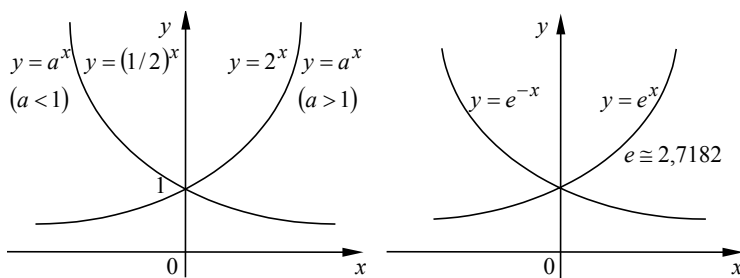


ПРИМЕР. Постройте график функции $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$.

Запишем эту функцию так: $y = 2 - \frac{3}{x + 1}$. Графиком функции будет гипербола, центр которой находится в точке $(-1, 2)$, асимптоты — $x = -1$, $y = 2$.



2.6. Показательная функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция вида $y = a^x$, где a — некоторое положительное число, не равное единице ($a > 0$, $a \neq 1$), называется **показательной**.

1. Область определения функции $x \in (-\infty, +\infty)$.
2. Множество значений функции $y \in (0, +\infty)$.
3. При $x = 0$ значение функции $y = 1$.
4. При $a > 1$ функция возрастает на всей числовой оси; если $x > 0$, то $y = a^x > 1$; если $x < 0$, то $0 < a^x < 1$.
5. При $0 < a < 1$ функция убывает на всей числовой оси; если $x > 0$, то $0 < a^x < 1$; если $x < 0$, то $a^x > 1$.

2.7. Логарифмы и их свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Логарифмом числа b по основанию a , где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести основание a , чтобы получить число b .

x — логарифм ($x = \log_a b$) числа $b > 0$ по основанию $a > 0$ ($a \neq 1$), если $a^x = b$.

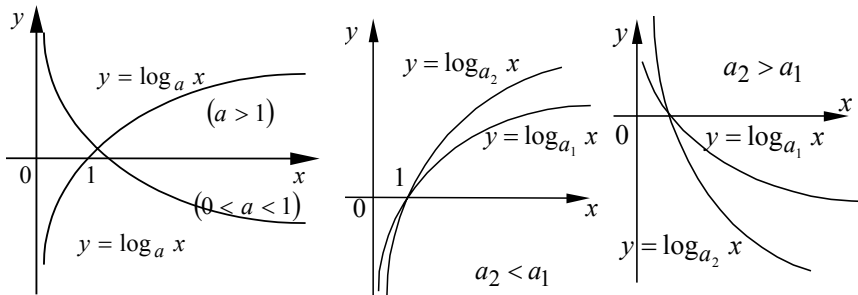
$$\boxed{a^{\log_a b} = b}.$$

1. $\log_a 1 = 0$. 2. $\log_a a = 1$. 3. $\log_a bc = \log_a |b| + \log_a |c|$ ($bc > 0$).
4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|$ ($bc > 0$). 5. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$.
6. $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$. 7. $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$. 8. $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$.
9. $\log_a b = \log_{a^n} b^n$. 10. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. 11. $\log_a b = \log_c b \cdot \log_a c$.
12. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$. 13. $\log_{10} b = \lg b$. 14. $\log_e b = \ln b$.

2.8. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция, обратная показательной функции, называется логарифмической: $y = \log_a x$.

1. Область определения функции $x \in (0, +\infty)$.
2. Множество значений функции $y \in (-\infty, +\infty)$.
3. При $x = 1$ $y = \log_a x = 0$.
4. При $a > 1$ функция возрастает; если $0 < x < 1$, то $\log_a x < 0$, если $x > 1$, то $\log_a x > 0$.
5. При $0 < a < 1$ функция убывает; если $0 < x < 1$, то $\log_a x > 0$, если $x > 1$, то $\log_a x < 0$.

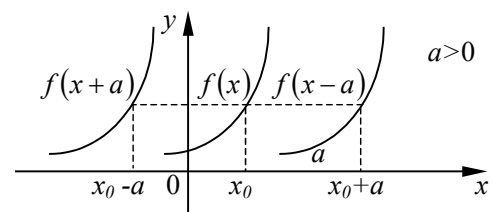


2.9. Геометрические преобразования графиков функций

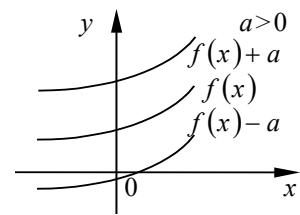
Если известен график функции $y = f(x)$, то с помощью некоторых преобразований можно построить графики более сложных функций.

1. График функции $f(x \pm a)$ получается параллельным переносом графика $f(x)$ вдоль оси Ox на $\pm a$.

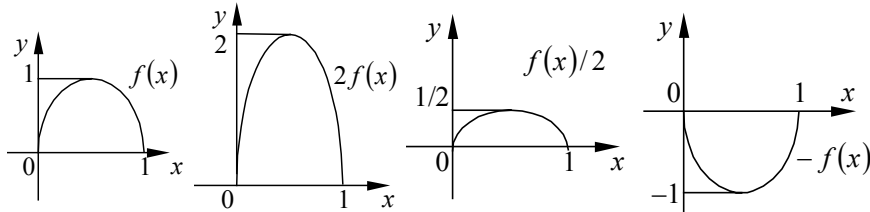
Значение функции $f(x - a)$ при $x = x_0 + a$ совпадает со значением $f(x)$ при $x = x_0$.



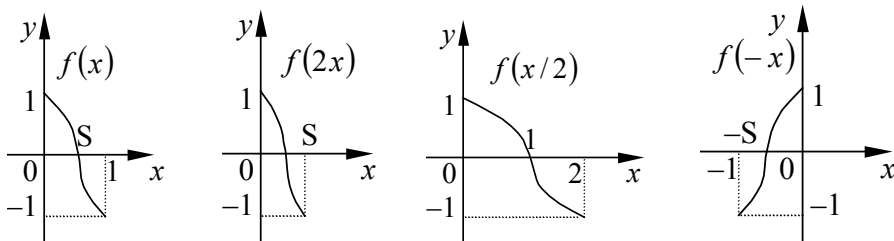
2. График функции $f(x) \pm a$ получается параллельным переносом графика функции $f(x)$ вдоль оси Oy на $\pm a$.



3. График функции $k \cdot f(x)$ получается растяжением графика $f(x)$ вдоль оси Oy в k ($k > 0$) раз при $k > 1$ и сжатием вдоль этой оси в $1/k$ раз при $0 < k < 1$; если $k < 0$, то к этому преобразованию добавляется зеркальное отражение относительно оси Ox .



4. График функции $f(kx)$ получается сжатием графика $f(x)$ вдоль оси Ox в k ($k > 0$) раз при $k > 1$ и растяжением вдоль этой же оси в k раз при $0 < k < 1$; если $k < 0$, то к этому преобразованию добавляется зеркальное отражение относительно оси Oy .



5. График функции $|f(x)|$ получается из графика функции $f(x)$ следующим преобразованием: часть графика, лежащая выше оси Ox , остается на месте; часть графика, лежащая ниже оси Ox , зеркально отражается относительно оси Ox .

6. График функции $f(|x|)$ получается из графика $f(x)$ следующим преобразованием: при $x \geq 0$ график не изменяется; при $x < 0$ график заменяется на зеркальное отражение относительно оси Oy части графика, соответствующей $x \geq 0$.

