

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4

Тема: «Решение показательных уравнений и неравенств»

Цель: научиться применять свойства показательной функции для решения показательных уравнений и неравенств, закрепить знания и умения по применению методов решения показательных уравнений и неравенств для решения практических задач.

Основные теоретические положения

Определение. Уравнение вида $a^x = b$, где $a > 0, a \neq 1$, называется *показательным*.

Если $b > 0$, то уравнение имеет единственный корень, если $b \leq 0$, то корней нет.

Способы решения показательных уравнений.

1. Приравнивание показателей.

Суть метода:

1. Уединить слагаемое, содержащее переменную;
2. Привести степени к одному основанию;
3. Приравнять показатели;
4. Решить полученное уравнение;
5. Записать ответ.

Пример:

$$3^x - 27 = 0.$$

$$3^x = 27;$$

$$3^x = 3^3;$$

$$x = 3.$$

Ответ: $x = 3$.

2. Вынесение общего множителя за скобки.

Примечание: выносим за скобки множитель с меньшим показателем.

Пример:

$$3^x - 3^{x+3} = -78.$$

$$3^x (1 - 3^3) = -78;$$

$$3^x (1 - 27) = -78;$$

$$3^x (-26) = -78;$$

$$3^x = 3;$$

$$x = 1.$$

Ответ: $x = 1$

3. Введение новой переменной

Как правило, уравнения, решаемые этим способом, сводятся к квадратным.

Пример: $4^{2x} - 5 \cdot 4^x + 4 = 0$.

Пусть $4^x = a$ тогда уравнение можно записать в виде:

$$a^2 - 5a + 4 = 0;$$

$$D = 25 - 16 = 9;$$

$$a_1 = \frac{5+3}{2} = 4;$$

$$a_2 = \frac{5-3}{2} = 1.$$

Сделаем обратную замену:

$$4^x = 4 \text{ или } 4^x = 1;$$

$$x = 1 \text{ или } x = 0$$

Ответ: $x = 1$ или $x = 0$

4. Использование однородности

Определение Показательные уравнения вида $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ называются однородными.

Суть метода: Так как показательная функция не может принимать значение, равное нулю, и обе части уравнения можно делить на одно и то же не равное нулю число, разделим обе части уравнения, например, на $b^{f(x)}$.

Пример: $2^x = 3^x$

Разделим обе части уравнения на $3^x \neq 0$:

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{3^x}{3^x};$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1;$$

$$x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

Определение. Показательным неравенством называется неравенство, в котором переменная содержится в показателе степени.

Решение простейших показательных неравенств.

Простейшими считаются показательные неравенства вида: $a^x < a^y$, $a^x > a^y$. ($a^x \leq a^y$, $a^x \geq a^y$).

Так же, как и при решении простейших показательных уравнений, одинаковые основания степеней опускают, но **знак** нового неравенства **сохраняют, если** функция $y = a^x$ является возрастающей ($a > 1$); **если** же показательная функция $y = a^x$ убывает ($0 < a < 1$), то **знак** нового неравенства **меняют на противоположный**:

$a^x < a^y \rightarrow x < y$, если $a > 1$; знак сохранен, так как функция возрастает;

$a^x < a^y \rightarrow x > y$, если $0 < a < 1$; функция убывает – знак поменялся;

$a^x > a^y \rightarrow x > y$, если $a > 1$; знак сохранен, так как функция возрастает

$a^x > a^y \rightarrow x < y$, если $0 < a < 1$; функция убывает – знак поменялся.

Примеры.

Решить неравенство:

$$1) 4^{5-2x} < 0,25.$$

Представим правую часть в виде: $0,25 = (2^5/100) = (1/4) = 4^{-1}$;

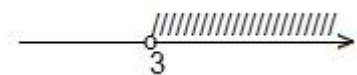
$4^{5-2x} < 4^{-1}$; функция $y = 4^x$ с основанием $4 > 1$ **возрастает на \mathbf{R}** , поэтому, опуская основания степеней, знак неравенства сохраним:

$$5-2x < -1;$$

$$- 2x < -1-5;$$

$- 2x < -6$ $|-(-2)$ при делении обеих частей неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняют на противоположный:

$$x > 3.$$



Ответ: $(3; +\infty)$.

$$2) 0,4^{2x+1} \geq 0,16.$$

Представим число 0,16 в виде степени числа 0,4. Получаем:

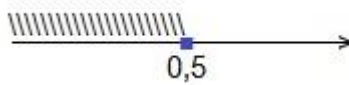
$0,4^{2x+1} \geq 0,4^2$; основание степеней – число **0,4** — удовлетворяет условию: $0 < 0,4 < 1$; поэтому, опускаем основания степеней, а знак неравенства меняем на противоположный:

$$2x+1 \leq 2;$$

$$2x \leq 2-1;$$

$$2x \leq 1 \quad |:2$$

$$x \leq 0,5.$$



Ответ: $(-\infty; 0,5]$.

ХОД РАБОТЫ

1 вариант

Решите уравнения

1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-3x} = 25$

2) $4^x + 2^x - 20 = 0$

3) $7^{x+1} + 3 \cdot 7^x = 2^{x+5} + 3 \cdot 2^x$

4) $4 \cdot 5^{2x} + 5 \cdot 4^{2x} = 9 \cdot 20^x$

5) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+3} = (0,5)^{2y+1} \\ 5^{y-4} = (\sqrt{5})^{x+1} \end{cases}$$

Решите неравенства

6) $\left(\frac{3}{4}\right)^x > 1\frac{1}{3}$

7) $(\sqrt{5})^{x-6} < \frac{1}{5}$

8) $\left(\frac{2}{13}\right)^{x^2-1} \geq 1$

9) $4^x \cdot 2^{x^2+1} > 16.$

2 вариант

Решите уравнения

1) $(0,1)^{2x-3} = 10$

2) $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$

3) $3^{x+3} + 3^x = 5 \cdot 2^{x+4} - 17.$

4) $3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} = 5 \cdot 6^x$

5) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24 \\ 2^y \cdot 3^x = 54 \end{cases}$$

Решите неравенства

6) $\left(\frac{6}{5}\right)^x > \frac{5}{6}$

7) $(\sqrt[3]{3})^{x+6} > \frac{1}{9}$

8) $\left(1\frac{2}{7}\right)^{x^2-4} \leq 1$

9) $3^{x+2} - 3^x \leq 24.$

Сделайте вывод по проделанной работе

Контрольные вопросы

1. От чего зависит возрастание или убывание показательной функции?
2. Дайте определение показательного неравенства.
3. Какие условия должны выполняться при решении показательных неравенств?