

Лекция «Десятичные и натуральные логарифмы»

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме

- 1) Понятие десятичного логарифма
- 2) Понятие десятичного логарифма
- 3) Формула перехода к новому основанию логарифма

Глоссарий по теме

Десятичный логарифм числа – логарифм по основанию 10.

Пишут $\lg \lg b$ вместо $\log_{10} b$.

Натуральный логарифм числа – логарифм этого числа по основанию e .

Пишут $\ln \ln b$ вместо $\log_e b$.

Число e – иррациональное число ($e \approx 2,7$).

Формула перехода к новому основанию: $b = \frac{b}{a}$.

Дополнительные формулы:

$$b = \frac{1}{a}$$

$$b \cdot a = 1$$

$$b = \frac{\lg \lg b}{\lg \lg a}$$

$$b = \frac{\ln \ln b}{\ln \ln a}$$

Открытые электронные:

<http://fipi.ru/>

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Благодаря научному и техническому прогрессу, чтобы вычислить значения логарифмов, уже редко пользуются таблицами, на помощь приходит инженерный микрокалькулятор. И в том и другом случае вычисляются только десятичные или натуральные логарифмы.

Десятичный логарифм числа – это логарифм по основанию 10 и пишут $\lg \lg b$ вместо $\log_{10} b$.

$$\lg \lg 5 \approx 0,70; \lg \lg 7 \approx 0,85; \lg \lg 1 = 0; \lg \lg 10 = 1; \lg \lg 1000 = 3.$$

Натуральный логарифм числа – это логарифм этого числа по основанию e , где e – иррациональное число ($e \approx 2,7$) и пишут $\ln \ln b$ вместо $\log_e b$.

$$\ln \ln 2 \approx 0,69; \ln \ln 9 \approx 2,20; \ln \ln e = 1; \ln \ln 1 = 0.$$

Остается вопрос, как находить значения логарифмов по другим основаниям?

Для этого вспомним основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$.

Прологарифмируем обе части по основанию c (т. е. вычислим логарифм по основанию c левой и правой части равенства.): $a^{\log_a b} = b$.

Применим свойство логарифма степени ($\log_a b^r = r \cdot \log_a b$): $a = b$.

Разделим обе части на $\log_c a \neq 0$: $b = \frac{b}{a}$. Мы вывели формулу перехода к новому основанию.

$$b = \frac{b}{a}$$

На заметку: $b = \frac{1}{a}$ и $b \cdot a = 1$.

По формуле перехода к новому основанию приведем b к десятичным и натуральным логарифмам.

Формула перехода к десятичным логарифмам:

$$b = \frac{\lg \lg b}{\lg \lg a}$$

Формула перехода к натуральным логарифмам:

$$b = \frac{\ln \ln b}{\ln \ln a}$$

Пример 1. Вычислить 80 . (Понадобится инженерный микрокалькулятор)

$$1. \quad 80 = \frac{\lg \lg 80}{\lg \lg 3} \approx 3,9886927 \approx 3,99$$

$$2. \quad 80 = \frac{\ln \ln 80}{\ln \ln 3} \approx 3,9886928 \approx 3,99$$

Ответ: 3,99.

Пример 2. Решить уравнение:

$$\frac{(4x)}{3} - 2 = 0.$$

1. Перейдем к одному основанию 5: $2 = \frac{2}{3}$

$$\frac{(4x)}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

2. Одинаковый знаменатель $3 \neq 0$.

$$\frac{(4x) - 2}{3} = 0.$$

3. Применим свойство логарифма частного: $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$

$$\frac{(2x)}{3} = 0.$$

4. Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, знаменатель не равен нулю.

$$(2x) = 0.$$

5. Воспользуемся определением логарифма.

$$2x = 5^0.$$

6. Вычислим значение x .

$$2x = 1.$$

$$x = 0,5.$$

Ответ: 0,5

Задача 1.

Вычислить $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.

1. перейдем к основанию 3 по формуле $b = \frac{b}{a}$

2. $4 \cdot 5 = 1$, т. к. $b \cdot a = 1$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \dots$$

1. $3 = 1; 4 = 2^2$.

$$\dots = 2 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

Задача 2.

Вычислить $100^{0,5+\lg \lg \sqrt{5}}$.

1. Используем свойство степеней $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$.

2. Заменим $100 = 10^2$.

$$100^{0,5+\lg \lg \sqrt{5}} = 100^{0,5} \cdot 100^{\lg \lg \sqrt{5}} = (10^2)^{0,5} \cdot 10^{2 \lg \lg \sqrt{5}} = \\ = 10^{2 \cdot 0,5} \cdot (10^{\lg \lg \sqrt{5}})^2 = \dots$$

$$1. \text{ Применим основное логарифмическое тождество } a^{\log_a b} = b \\ \dots = 10^1 \cdot (\sqrt{5})^2 = 10 \cdot 5 = 50.$$

Ответ: 50.

Задача 3.

Вычислить

$$43 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6.$$

1. Перейдем к одному основанию, например, 2 по формуле $b^{\frac{b}{a}} = \frac{b}{a}$

$$43 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 = \\ = 4 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} = \\ = 4 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{7}{6} = \\ = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Ответ: $\frac{4}{3}$

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

№1. Найдите значение выражения

$$-10^{64} + 10 \cdot 100^{\frac{1}{2} \lg \lg 9 - \lg \lg 3}$$

$$\text{Решение: } -10^{64} + 10 \cdot 100^{\frac{1}{2} \lg \lg 9 - \lg \lg 3} = -10^{\frac{\lg \lg 64}{\lg \lg 1000}} + 10 \cdot \frac{100^{\frac{1}{2} \lg \lg 9}}{100^{\lg \lg 3}} = \\ = -10^{\frac{\lg \lg 64}{3}} + 10 \cdot \frac{10^{2 \cdot \frac{1}{2} \lg \lg 9}}{10^{2 \lg \lg 3}} = -(10^{\lg \lg 64})^{\frac{1}{3}} + 10 \cdot \frac{10^{\lg \lg 9}}{(10^{\lg \lg 3})^2} = \\ = -64^{\frac{1}{3}} + 10 \cdot \frac{9}{3^2} = -(4^3)^{\frac{1}{3}} + 10 = 6$$

Ответ: 6

№2. Найдите значение выражения $\frac{3 \lg \lg 4 + \lg \lg 0,5}{\lg \lg 9 - \lg \lg 18}$.

$$\text{Решение: } \frac{3 \lg \lg 4 + \lg \lg 0,5}{\lg \lg 9 - \lg \lg 18} = \frac{\lg \lg 4^3 + \lg \lg 0,5}{\lg \lg \frac{9}{18}} = \frac{\lg \lg (64 \cdot 0,5)}{\lg \lg \frac{1}{2}} = \frac{\lg \lg 32}{\lg \lg \frac{1}{2}} = \\ = \frac{\lg \lg 2^5}{\lg \lg 2^{-1}} = \frac{5 \lg \lg 2}{2} = -5$$

Ответ: -5