

Методическая разработка к теме "Геометрические неравенства в углублённом курсе планиметрии 8 класса"

Автор – Заикина Анастасия Максимовна, учитель математики
ГБОУ лицея №393 Кировского района Санкт-Петербурга

В 8 классе в теме «Многоугольники» после изучения понятия ломаной нужно ввести неравенство: «Сумма звеньев ломаной больше отрезка, соединяющего начало первого звена с концом последнего». Доказательство этого факта опирается на неравенство треугольника, поэтому перед решением задачи стоит его вспомнить вместе с учениками. В качестве задачи на закрепление можно решить: «Существуют ли на плоскости такие точки A, B, C, D , для которых выполняется неравенство $AB + BC + CD < AD$?»

Решение: Если никакие три точки не лежат на одной прямой, то по неравенству ломаной $AB + BC + CD > AD$. Если же нам неизвестно, как располагаются точки, то воспользуемся неравенством треугольника:

$$AB + BC \geq AC;$$

$$AC + CD \geq AD;$$

$\Rightarrow AB + BC + CD \geq AD$. Значит ответ на вопрос – нет, не существует. ■

После введения понятия ломаной вводится понятие многоугольника и, соответственно, четырехугольника и пятиугольника. И в данных темах предлагается ввести следующие задачи. «Четырехугольник и пятиугольник»:

Задача 1: Докажите, что в выпуклом четырехугольнике со сторонами a, b, c, d и диагоналями e и f : $e < p$, $f < p$, где p – полупериметр четырехугольника.

Решение: По неравенству треугольника:

$$\begin{cases} e < a+b \\ e < c+d \end{cases} \Rightarrow 2e < a + b + c + d = p \Rightarrow e < p.$$

Аналогично доказывается для f . ■

Задача 2: Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого четырехугольника больше полупериметра, но меньше периметра этого четырехугольника. При этом если четырехугольник невыпуклый, то второе неравенство тоже имеет место быть, но первое неравенство может не выполняться.

Решение. 1) Рассмотрим выпуклый четырехугольник ABCD, диагонали которого пересекаются в точке O. Согласно неравенству треугольника:

$$OA + OB > AB;$$

$$OB + OC > BC;$$

$$OC + OD > CD;$$

$$OD + OA > DA.$$

Сложив эти неравенства (с учетом того, что $OA + OC = AC$, $OB + OD = BD$), получим: $2(AC + BD) > AB + BC + CD + DA$. Откуда:

$AC + BD > \frac{P}{2}$, где $P = AB + BC + CD + DA$ – периметр четырехугольника.

2) Для доказательства воспользуемся неравенством треугольника:

$$AC < AB + BC;$$

$$AC < AD + DC.$$

Складывая, получаем $2AC < P$, или $AC < \frac{P}{2}$. Аналогично $BD < \frac{P}{2}$.

Поэтому

$$AC + BD < P. \blacksquare$$

Задача 3: Докажите, что сумма двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника меньше суммы двух его диагоналей.

Решение: Рассмотрим четырехугольник $ABCD$. O – точка пересечения диагоналей. Из неравенства треугольника получим:

$$AB < AO + BO;$$

$$DC < DO + OC.$$

$$\Rightarrow AB + DC < AO + BO + DO + OC \Rightarrow AB + DC < AC + BD. \blacksquare$$

Задача 4: В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC равна стороне AD . Докажите, что BC меньше BD .

Решение: Треугольник ACD – равнобедренный, значит, по свойству $\angle ACD = \angle ADC$. При этом $\angle BCD > \angle ACD$. Значит, $\angle BCD > \angle ADC$, который, в свою очередь, больше $\angle ADB$. Значит, в треугольнике BCD наибольшая сторона – BD , т.к. она лежит против наибольшего угла. Значит, $BC < BD$. \blacksquare

Задача 5: Отрезок BM – медиана треугольника ABC , и $\angle AMB > \angle BMC$. Докажите, что $AB > BC$, и $\angle ABM < \angle CBM$.

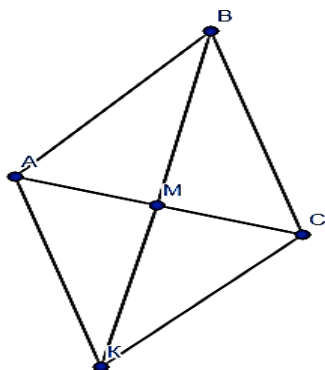


Рис. 22

Решение: Построим на продолжении луча BM точку K такую, что $BM = MK$. Тогда рассмотрим четырехугольник $ABKC$. В нем диагонали BK и CA пересекаются в точке пересечения делятся пополам, значит,

данный четырехугольник – параллелограмм. В нем $\angle AMB > \angle BMC$, значит, в параллелограмме $BA > BC$.

Теперь рассмотрим треугольник ВКС: в нем, т.к. АВСК – параллелограмм, $CK = AB$, $\angle MKC = \angle MBA$. Теперь рассмотрим треугольник КСА: $KC = AB > BC = AK$, значит, по теореме о соотношении между углами и сторонами треугольника $\angle MBC > \angle CKM = \angle MBA$. ■

Задача 6: Докажите, что расстояние от одной из вершин выпуклого четырехугольника до не содержащей ее диагонали не превосходит половины этой диагонали.

Решение: Пускай у нас есть четырехугольник ABCD. Тогда AC и BD – диагонали. Пусть O – точка их пересечения. Пусть $AC \leq BD$. Опустим из вершин A и C перпендикуляры на BD (AK и CM соответственно). Тогда $AK \leq AO$, $CM \leq CO$, т.к. наклонная всегда больше перпендикуляра, исходящего из той же точки. Тогда $AK + CM \leq AC \leq BD$. Значит, либо $CM \leq \frac{BD}{2}$, либо $AK \leq \frac{BD}{2}$. ■

Задача 7: Дан выпуклый четырехугольник ABCD. Периметр ABD меньше периметра ACD. Докажите, что $AB < AC$.

Решение: Т.к. периметр треугольника ABD меньше периметра треугольника ACD, а AD – общая сторона у них, то $AB + BD < AC + CD$. При этом сумма диагоналей больше суммы двух противоположных сторон, значит, $AB + CD < AC + BD$. Сложим два полученных неравенства и получим: $2AB < 2AC \Rightarrow AB < AC$. ■

Задача 8: Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки M

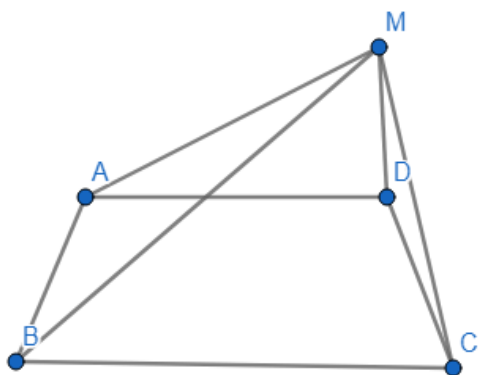


Рис. 23

плоскости до трех вершин равнобедренной трапеции больше расстояния от этой точки до четвертой вершины (Рис. 23).

Решение 1: Соединим точку М с вершинами трапеции ABCD. Рассмотрим неравенства треугольника относительно треугольников AMB и MCB:

$$AM + MB \geq AB; MC + DC \geq MD.$$

Сложим данные неравенства, при этом заметив, что хотя бы одно из них будет строгим: $AM + MB + MC + DC > AB + MD$. Т.к. $AB = DC$, то преобразуя неравенство получим: $AM + MB + MC > MD$. Аналогично рассматриваются ситуации для любой вершины. ■

Решение 2: Т.к. трапеция равнобедренная, то ее диагонали AC и BD равны между собой. Значит, используя неравенство треугольника, $AM + BM + CM \geq BM + AC = BM + BD$. При этом по неравенству треугольника $BM + BD \geq DM$. Заметим, что хотя бы одно из неравенств будет строгим, значит, $AM + BM + CM > DM$. ■

Задача 9: Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин четырехугольника минимальна.

Решение: Рассмотрим четырехугольник ABCD. Точку пересечения его диагоналей назовем О. Также рассмотрим точку К, отличную от О, лежащую внутри ABCD. Тогда:

$$AK + KC \geq AC = AO + OC;$$

$$BK + KD \geq BD = BO + OD.$$

Причем хотя бы одно неравенство строгое, т.к. О не совпадает с К, а значит, не принадлежит двум диагоналям одновременно. Значит,

расстояние до некоторой точки К всегда будет больше, чем до О. Значит, О – искомая. ■

Задача 10: Внутри выпуклого четырехугольника, сумма длин диагоналей которого равна N , расположен выпуклый четырехугольник, сумма длин диагоналей которого равна M . Докажите, что $M < 2N$.

Решение: Пусть P – периметр внешнего выпуклого четырехугольника $ABCD$. Тогда сумма его диагоналей меньше P , но больше $P/2$.

$$AC < AB + CB;$$

$$AC < AD + CD.$$

Сложим: $AC < \frac{(AB+CB+AD+CD)}{2} = \frac{P}{2}$. Аналогично $BD < \frac{P}{2}$. Значит,

$N < P$. При этом мы знаем, что $AB + CD < AC + BD$ и $BC + AD < AC + BD$, значит, $P < 2N$. При этом $M < P_1$, где P_1 – периметр внутреннего четырехугольника. При этом $P_1 < P$. Значит, $M < P_1 < P < 2N$. ■

Задача 11: Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого пятиугольника $ABCDE$ больше периметра, но меньше удвоенного периметра.

Решение: Для сторон и диагоналей запишем следующие неравенства:

$$AB + BC > AC; BC + CD > BD; CD + DE > CE;$$

$DE + EA > DA; EA + AB > EB$. Сложим их и получим, что сумма длин диагоналей

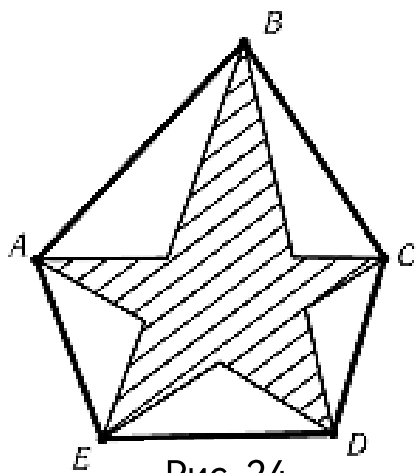


Рис. 24

пятиугольника меньше удвоенного периметра. При этом заметим, что сумма длин диагоналей больше периметра так называемой «звезды», который, в свою очередь, больше периметра пятиугольника (Рис.24). Значит, сумма длин диагоналей выпуклого пятиугольника ABCDE больше периметра. ■

Задача 12: Доказать, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри выпуклого пятиугольника, до его вершин больше полусуммы длин диагоналей этого пятиугольника.

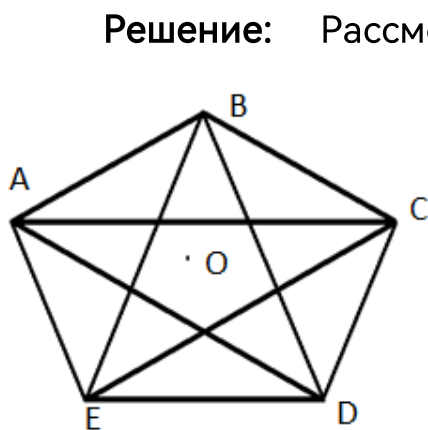


Рис.

Решение: Рассмотрим произвольную точку O внутри пятиугольника. Соединим точку O с вершинами многоугольника; получим тем самым отрезки OA, OB, ..., OE. Проведем в пятиугольнике все диагонали. Тогда по неравенству треугольника: $OA + OC \geq AC$, $OA + OD \geq AD$, $OE + OC \geq EC$, $OB + OE \geq EB$, $OB + OD \geq BD$. При этом заметим, что равенство достигается в неравенствах только в том случае, если точка O будет принадлежать рассматриваемой диагонали. Но точка O не может принадлежать всем диагоналям сразу, т.к. они не пересекаются в одной точке. Следовательно, в некоторых неравенствах будет строгий знак. Значит, сложив неравенства, мы получим:

$$OA + OC + OA + OD + OE + OC + OB + OE + OB + OD \geq AC + AD + EC + EB + BD$$

$$2(OA + OC + OD + OE + OB) \geq AC + AD + EC + EB + BD$$

$$OA + OC + OD + OE + OB \geq \frac{AC + AD + EC + EB + BD}{2}. \blacksquare$$

От доказательств неравенств в четырехугольнике и

пятиугольнике школьник переходит к неравенствам в многоугольниках, т.е. доказывает обобщенные факты для любого многоугольника, в частности для четырехугольника и пятиугольника:

Задача 1: Докажите, что любой выпуклый n -угольник при $n \geq 5$ имеет не более 3 не тупых углов.

Решение: Если таких углов больше трёх, то внешние углы, смежные с ними, – не острые, а это противоречит тому, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника (взятых по одному при каждой вершине) равна 360° . ■

Задача 2: Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого равны?

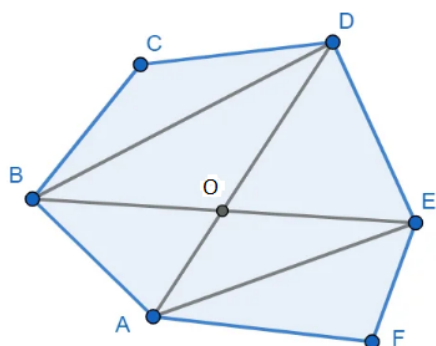


Рис. 26

Решение: Можно проверить, что четырехугольник и пятиугольник нам подходят. Докажем, что больше 5 сторон быть не может.

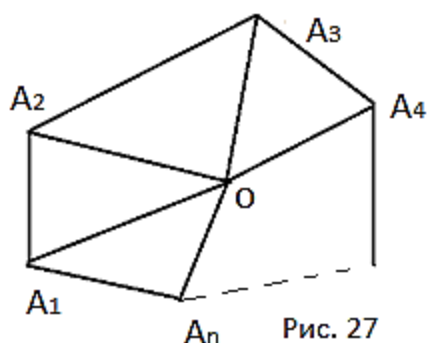
Рассмотрим шестиугольник ABCDEF. Рассмотрим его диагонали BD, DA, BE, AE. Они должны быть равны. Но при этом в четырехугольнике BDEA должно выполняться неравенство $BD + AE < BE + DA$, которое, очевидно, не выполняется в виду предыдущего замечания. Значит, не существует шестиугольника с равными диагоналями. Так же можно доказать для других многоугольников. Значит, могут быть только четырехугольник и пятиугольник, подходящие под наше условие. ■

Задача 3: Докажите, что длина любой диагонали выпуклого многоугольника меньше половины его периметра.

Решение: Рассмотрим диагональ d нашего многоугольника. Диагональ d многоугольника рассекает его на два многоугольника, стороной которых она является. Сумма длин сторон первого многоугольника, отличных от d , больше d , так как если вершины ломаной не лежат на одной прямой, то длина ломаной больше отрезка, соединяющего ее концы. Сумма длин сторон второго многоугольника, отличных от d , аналогично больше d . Следовательно, сумма всех сторон исходного многоугольника больше $2d$. Что означает, что d меньше полупериметра исходного многоугольника. ■

Задача 4: Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри выпуклого многоугольника, до его вершин больше $\frac{P}{2}$ этого многоугольника.

Решение: Рассмотрим многоугольник A_1, \dots, A_n и точку O , лежащую внутри него (не принадлежащую сторонам). Соединим



точку O с вершинами многоугольника; получим тем самым отрезки OA_1, OA_2, \dots, OA_n . По неравенству треугольника:

$$OA_1 + OA_2 > A_1A_2;$$

$$OA_2 + OA_3 > A_2A_3;$$

...

$$OA_n + OA_1 > A_nA_1.$$

Сложим все получившиеся неравенства. Получим:

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1 < OA_1 + OA_2 + OA_2 + OA_3 + \dots + OA_n + OA_1$$

$$P < 2(OA_1 + OA_2 + OA_3 + \dots + OA_n)$$

$$\frac{P}{2} < OA_1 + OA_2 + OA_3 + \dots + OA_n. \blacksquare$$

Задача 5: Докажите, что при переходе от невыпуклого многоугольника к его выпуклой оболочке периметр уменьшается.

Решение: Когда мы переходим от невыпуклого многоугольника к его выпуклой оболочке, то мы заменяем несколько звеньев ломаной на отрезок, соединяющий начало и конец данной ломаной. Т.к. длина ломаной больше длины отрезка, соединяющего ее начало и конец, очевидно, что периметр выпуклого многоугольника будет меньше. ■

Задача 6: Внутри выпуклого многоугольника лежит другой выпуклый многоугольник. Докажите, что периметр внешнего многоугольника больше, чем периметр внутреннего.

Решение 1: Проведем из каждой вершины внутреннего многоугольника во внешнюю сторону по два перпендикулярных

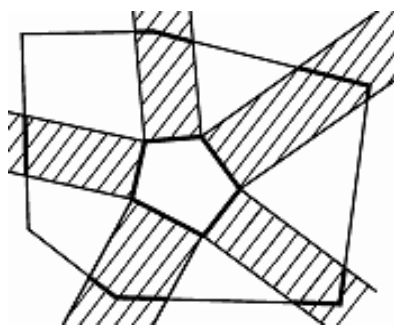


Рис. 28

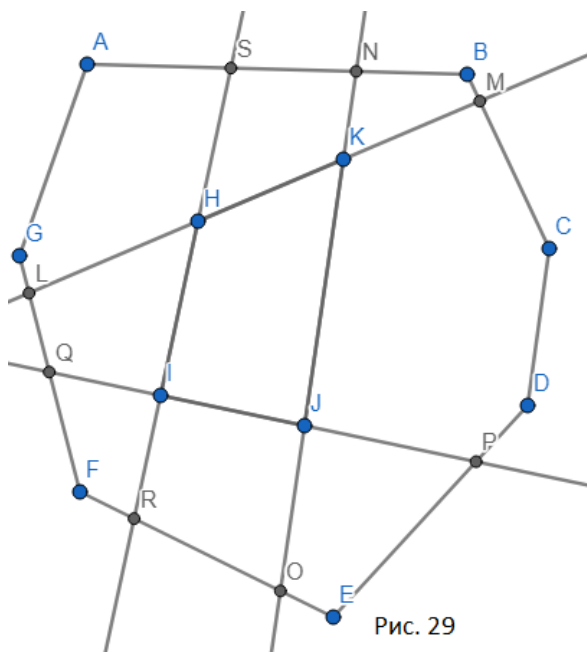
луча относительно каждой из сторон, выходящей из этой вершины. Тогда каждая сторона многоугольника будет заключена в так называемую «полосу», как показано на Рис. 28. Данные «полосы» пересекутся со сторонами внешнего многоугольника и отсекут от него некоторую часть периметра.

Тогда периметр внутреннего многоугольника не превосходит данной части периметра внешнего многоугольника, а сам периметр внешнего многоугольника больше его части. ■

Решение 2: Рассмотрим внешний многоугольник ABCDEF и

внутренний многоугольник НКJI. Проведем прямую через точки Н и К. Она пересечет внешний многоугольник в двух точках. Назовем их L и M. Тогда по «неравенству ломаной»:

$$LG + GA + AB + BM > LM.$$



При этом $LM > HK$. Значит:

$$LG + GA + AB + BM > HK.$$

При этом:

$$MC + CD + DE + EF + FL > LM, \quad \text{т.е.}$$

$$MC + CD + DE + EF + FL > HK.$$

Сложив два неравенства, получим, что полупериметр ABCDEF больше HK. Аналогично полупериметр ABCDEF больше KJ, JI, IH. Значит,

очевидно, периметр внутреннего многоугольника меньше периметра внешнего. ■

Задача 7: Точка O лежит внутри выпуклого n-угольника $A_1A_2...A_n$ периметром P. Докажите неравенство $OA_1 + OA_2 < P - A_1A_2$.

Решение: Если точка O лежит внутри, то OA_1A_2 является внутренним для $A_1A_2...A_n$, значит, периметр $A_1A_2...A_n$ больше периметра OA_1A_2 . При этом данные многоугольники имеют общую сторону, значит, если вычесть ее сторону, то ничего не изменится. ■

Задача 8: Середина каждой стороны выпуклого многоугольника соединена отрезками с серединами двух смежных с нею сторон. Докажите, что периметр получившегося многоугольника не меньше полупериметра исходного

Решение: а) Если стороны 3 (Рис. 30). В треугольнике средняя

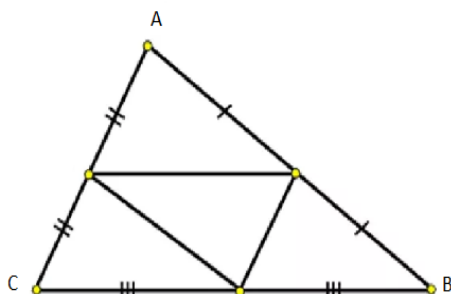


Рис.

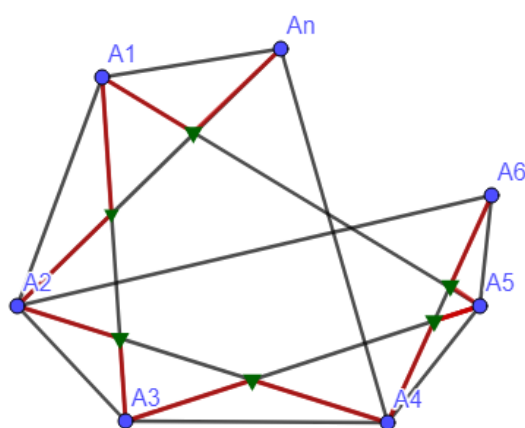


Рис. 31

линия равна половине основания. Значит, сумма средних линий равна полупериметру треугольника. б) Если в многоугольнике больше трех сторон (n сторон). Проведем, начиная с A_1 , диагонали в многоугольнике через одну вершину, как показано на Рис. 31.

Каждая из этих проведенных диагоналей вдвое больше отрезка, параллельного ей и соединяющего середины двух соседних сторон многоугольника. Значит, нам можно доказать, что сумма данных

диагоналей больше периметра многоугольника. Для этого рассмотрим выделенные на рисунке части диагоналей. Они в сумме (используем неравенство треугольника) больше периметра многоугольника. Значит, сумма диагоналей, содержащих их, больше периметра многоугольника. Разделив обе стороны неравенства на два, получим искомое утверждение. ■

Следующей темой 8 класса, в которой было бы целесообразно ввести задачи на геометрические неравенства, является тема «Осевая и центральная симметрия». Стоит заметить заранее, что использование симметрии будет задействовано также при решении задач в дальнейших темах, поэтому здесь школьнику необходимо дать решить разные типы заданий.

Задача 1: Точки M и N расположены по одну сторону от прямой l . Постройте на прямой l такую точку K , чтобы сумма $MK +$

NK была наименьшей.

Решение: Построим $N_1 = S_{l(N)}$. Соединим M и N_1 . Точку пересечения MN_1 с прямой l назовем K. Тогда по построению KN равна KN_1 . Длина MN_1 – наименьшее расстояние между точками M и N_1 , т.к. это прямая. Тогда $MK + KN = MK + KN_1 = MN_1$. ■

Заметим, что перед прошлой задачей можно дать вспомогательную: найти такую же точку K, но с условием, что A и B лежат по разные стороны от прямой l.

Задача 2: В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$ – прямой) проведена биссектриса BE. Какой из отрезков больше: AE или CE?

Решение: применим симметрию относительно BE. Луч AB перейдет в луч BC. Т.к. сторона $AB > BC$, точка A перейдет в такую точку A_1 на луче BC что $A_1B > BC$. Тогда в треугольнике ECA_1 : $A_1E > EC$, т.к. лежит против большего угла $\Rightarrow EA = EA_1 > EC$. ■

Задача 3: В выпуклом четырехугольнике ABCD углы A и B равны, а сторона AD меньше BC. Докажите, что угол D больше угла C.

Решение: Рассмотрим четырехугольник ABCD. Построим симметрию относительно серединного перпендикуляра стороны AB.

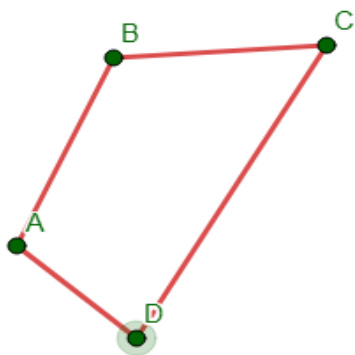


Рис. 32

Прямая AD перейдет в прямую BC и наоборот, т.к. $\angle A = \angle B$. Образом точки D при симметрии будет точка D_1 лежащая между B и C. Образом точки C будет такая C_1 , что D принадлежит AC_1 . Тогда $\angle ADC$ переходит в $\angle BD_1C_1$. $\angle ADC = \angle BD_1C_1$, т.к. при симметрии сохраняется градусная мера угла. Пусть CD и D_1C_1 пересекаются в точке

М. Тогда $\angle BD_1C_1$ является внешним для треугольника MCD_1 , значит, он больше $\angle C$. ■

Следующей, и одной из самых важных тем на введение и использование геометрических неравенств, является тема «Площадь». Тема примечательна тем, что помимо введения задач здесь, впервые за долгое время, появляются теоремы на геометрические неравенства. При знакомстве с данной темой школьник знакомится с понятием площадь и узнает, как вычисляется площадь треугольника и известных ему четырехугольников. Здесь уже сразу учащийся может доказать важное неравенство курса: «Площадь треугольника не превосходит половины произведения длин двух его любых сторон».

Решение: $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah$, где h – высота треугольника. Мы знаем, что любая наклонная больше перпендикуляра, проведенного из той же точки у той же прямой. Значит, высота треугольника не превосходит длины каждой из двух оставшихся сторон треугольника. Назовем эти стороны b и c . Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah \leq \frac{1}{2}ab$ и $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah \leq \frac{1}{2}ac$. ■

Стоит заметить, что в 9 классе данное неравенство ученик сможет доказать иначе, намного легче, но в данный момент это единственное доказательство данного факта, доступное школьнику. Данное математическое утверждение является одним из основных в данном курсе.

Задача 2: Внутри треугольника ABC взята точка M (Рис. 33). Нужно доказать, что $4S \leq AM \cdot BC + BM \cdot AC + CM \cdot AB$, где S – площадь

ABC.

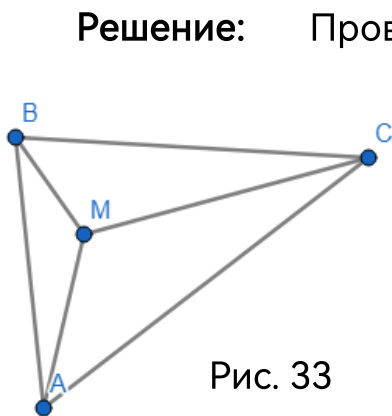


Рис. 33

Решение: Проведем прямую AM. Также опустим перпендикуляры BB_1 и CC_1 на прямую AM из точек B и C соответственно. Тогда S_{BMA}

$$= \frac{1}{2} AM \cdot BB_1, \text{ при этом } S_{CMA} = \frac{1}{2} AM \cdot CC_1.$$

$$\text{Тогда } 2S_{BMA} + 2S_{CMA} = AM \cdot BB_1 + AM \cdot CC_1 = AM \cdot (BB_1 + CC_1) \leq AM \cdot BC.$$

Аналогично: $2S_{BMC} + 2S_{BMA} \leq BM \cdot AC$ и $2S_{BMC} + 2S_{BMA} \leq CM \cdot AB$.

Сложив неравенства, получим $4S \leq AM \cdot BC + BM \cdot AC + CM \cdot AB$. ■

Задача 3: Сумма длин двух сторон треугольника равна p . Найдите наибольшее возможное значение его площади.

Решение: Пусть $a + b = p$. По ранее доказанному следует, что S_{ABC} не превосходит половины произведения длин двух его любых сторон. Значит, $S \leq ab$. Т.к. $a + b = p$, то ab принимает наибольшее значение при $a = b = \frac{p}{2}$. Значит, наибольшее значение площади $\frac{p^2}{4}$. ■

Задача 4: Через данную точку O проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшей площади.

Решение: Назовем рассматриваемый угол – $\angle ABC$. Рассмотрим угол $A_1B_1C_1$ – угол, симметричный $\angle ABC$ относительно

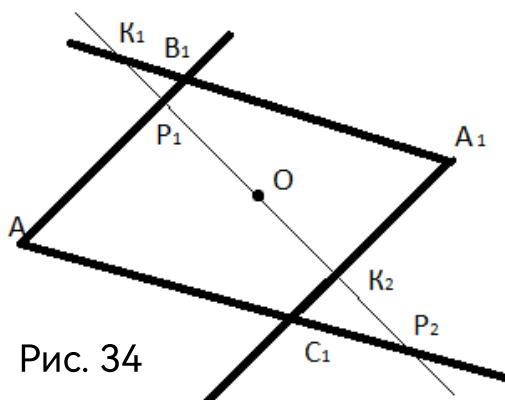


Рис. 34

точки O . Обозначим точки пересечения сторон углов B_1 и C_1 (Рис. 34). Проведем через точку O прямую, отсекающую от $\angle ABC$ некоторый треугольник. Назовем

точки пересечения этой прямой со сторонами AB и AC точками P_1 и P_2 соответственно.

Назовем точки пересечения этой прямой со сторонами A_1B_1 и A_1C_1 – K_1 и K_2 соответственно.

$$S_{AP_1P_2} = S_{AK_1K_2};$$

$$2S_{AP_1P_2} = S_{A_1B_1AC_1} + S_{B_1P_1K_1} + S_{C_1P_2K_2}.$$

Площадь $S_{AP_1P_2}$ будет наименьшей, если P_1 и B_1 , P_2 и C_1 совпадут. ■

Перед решением следующей задачи необходимо вспомнить с школьниками, что называют средним геометрическим и средним арифметическим из курса алгебры, а также неравенство о среднем геометрическом и среднем арифметическом. Важно отметить, что данное неравенство будет использоваться ими еще много раз, так что его стоит запомнить. Здесь же можно доказать с учащимися данное неравенство геометрическим способом.

Теорема: Среднее арифметическое любых двух неотрицательных чисел a и b не меньше их среднего геометрического, т.е. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Решение: Работать с корнем крайне неудобно, поэтому запишем наши числа a и b в виде: $a = c^2$, $b = d^2$. Мы имеем право так

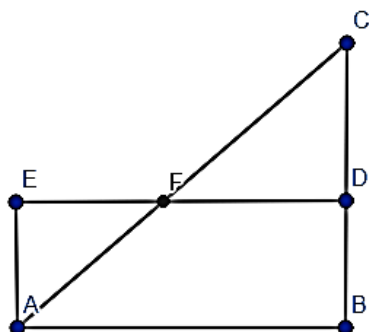


Рис.

сделать, ведь работаем с неотрицательными числами. Тогда запишем наше неравенство в новом виде: $\frac{a+b}{2} = \frac{c^2+d^2}{2} \geq c \cdot d$, где c и d – неотрицательные действительные числа.

Для определенности доказательства, не умоляя общности, будем считать, что $c \geq d$. Построим прямоугольный треугольник ABC с прямым $\angle B$ так, что $AB = BC = c$. Тогда площадь этого треугольника равна $\frac{c^2}{2}$ (Рис. 35).

Через точку A проведем прямую перпендикулярную AB. Она будет параллельна CB. На данной прямой отметим точку E такую, что $EA = d$ (точка E лежит в одной полуплоскости с точкой C относительно AB). Через точку E проведем прямую параллельную AB. Она пересечет AC и CB в точках F и D соответственно. Тогда $\angle E = 90^\circ$.

$\angle EFA = \angle CFD$ (вертикальные), $\angle CAB = \angle CFD$ (соответственные углы при параллельные прямых ED и AB и секущей CA), $\angle FCD = \angle EAF$ (как накрест лежащие углы при параллельные прямых EA и CB и секущей CA). При этом $\angle CAB = \angle FCD$, как углы при основании равнобедренного треугольника. Значит, угол $\angle EAF = \angle EFA = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$. Значит, $EA = EF = d$. Тогда площадь треугольника EFA равна $\frac{d^2}{2}$. И площадь двух рассмотренных ранее треугольников в сумме равна $\frac{c^2+d^2}{2}$.

Рассмотрим прямоугольник AEDB. Его площадь равна $c \cdot d$. При этом, т.к. $c \geq d$, то площадь прямоугольника не больше, чем $\frac{c^2+d^2}{2}$.

$$\text{Значит, } \frac{c^2+d^2}{2} \geq c \cdot d \blacksquare$$

Стоит заметить, что данное утверждение можно решить

намного быстрее с помощью координат, но данную тему школьники будут изучать лишь в 9 классе. Доказательство будет аналогично, но учащимся не придется доказывать, что треугольник EAF равнобедренный, т.к. это будет очевидно из координат. Будет целесообразным ввести эту теорему в следующем году еще раз, чтобы учащиеся сравнили два решения, выбрали наиболее оптимальное.

Задача 5: Внутри выпуклого четырёхугольника ABCD площади S взята точка O , причём $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 2S$. Докажите, что тогда ABCD – квадрат и O – его центр.

Решение: $2S_{AOB} \leq AO \cdot OB$. А это, в свою очередь, не больше $\frac{AO^2 + BO^2}{2}$. При этом равенство достигается, только если $\angle AOB = 90^\circ$ и $AO = BO$. Аналогично $2S_{COB} \leq \frac{CO^2 + BO^2}{2}$, $2S_{COD} \leq \frac{CO^2 + DO^2}{2}$ и $2S_{AOD} \leq \frac{AO^2 + DO^2}{2}$. Если сложить эти неравенства, то получим:

$$2S = 2(S_{AOB} + S_{COB} + S_{COD} + S_{AOD}) \leq AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2;$$

причём равенство возможно, как было сказано выше, только если

$$AO = BO = CO = DO \text{ и } \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 90^\circ,$$

т. е. ABCD — квадрат и точка O — его центр. ■

Задача 6: Докажите, что из всех четырехугольников с данной стороной и данным периметром наибольшую площадь имеет трапеция с тремя равными сторонами (или квадрат, если данная сторона в 4 раза меньше данного периметра).

Решение: Пусть ABCD – четырехугольник с данной стороной AD

и данным периметром, имеющий наибольшую площадь. Это четырехугольник выпуклый. Докажем, что $AB = BC = CD$ и $\angle B = \angle C$. Сначала докажем равенство сторон. Допустим, например, что $AB \neq BC$. На диагонали AC построим такой равнобедренный треугольник ACB_1 , что у него $AB_1 = CB_1$ и $AB_1 + B_1C = AB + BC$ (B_1 лежит в той же полуплоскости относительно AC , что и B). Этот треугольник имеет то же основание AC и тот же периметр, что и треугольник ABC . Значит, его площадь больше чем S_{ABC} (именно из-за равенства сторон).

Рассмотрим теперь четырехугольник AB_1CD с той же стороной AD и тем же периметром, что и у $ABCD$. Его площадь, очевидно, будет больше, чем S_{ABCD} . Но это противоречит условию, что $ABCD$ – четырехугольник с данной стороной AD и данным периметром, имеющий наибольшую площадь. Значит, наше предположение было неверным и среди сторон AB , BC и CD рассматриваемого четырехугольника не может быть двух неравных.

Значит, если четырехугольник с данной стороной и данным периметром имеет наибольшую площадь, то три другие стороны этого четырехугольника равны друг другу.

Перейдем теперь к доказательству равенства углов B и C , учитывая тот факт, что $AB = BC = CD$. Предположим, что $\angle B \neq \angle C$. Продолжим стороны AB и CD до пересечения в точке E (если прямые AB и CD пересекаются). Рассмотрим отрезок B_1C_1 , симметричный отрезку BC относительно биссектрисы l угла AED . Если же прямые AB и CD параллельны, то возьмем в качестве l параллельную им прямую, проходящую через середину отрезка BC .

Треугольники BC_1F и B_1CF равны ($FC_1 = FC$, так как эти отрезки

симметричны относительно прямой l ; аналогично $FB_1 = FB$; углы при вершине F равны, как вертикальные). Следовательно, $BC_1 = B_1C$, $BC = B_1C_1$ и $S_{BC_1F} = S_{B_1CF}$.

Рассмотрим четырехугольник AC_1B_1D . Он имеет ту же сторону AD , что и четырехугольник $ABCD$. Его периметр равен:

$$AD + (AB + BC_1) + (CD - B_1C) + B_1C_1 = AD + AB + CD + BC,$$

т.е. равен периметру четырехугольника $ABCD$. Его площадь, очевидно, также равна площади S_{ABCD} , и, следовательно, он также имеет наибольшую площадь. Но мы должны заметить, что его стороны AC_1 , B_1C_1 и B_1D уже не равны друг другу, что противоречит ранее доказанному. Следовательно, наше предположение ошибочно и $\angle B = \angle C$ (в этом случае два рассмотренных четырехугольника, очевидно, совпадают).

Из доказанных равенств $AB = BC = CD$ и $\angle B = \angle C$ следует, что $\triangle ABC = \triangle BCD$, а значит, высоты этих треугольников, проведенные из вершин A и D , также равны. Поэтому $ABCD$ – трапеция с тремя равными сторонами либо квадрат, если $AB = BC = CD = DA$. ■

Данная задача является важной в этой теме, а факт, выводящийся в ней, будет использоваться в дальнейших доказательствах, поэтому важным будет проработать решение с учениками полностью. Поэтому целесообразным было бы решать задачу по частям, рассматривая поочередно равенство сторон и углов. При этом лучше дать подсказку, напомнив детям, чтобы они воспользовались при решении симметрией, а также прошлыми изученными фактами. А перед решением следующей задачи стоит вновь вспомнить с учащимися неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Теорема 1: Из всех треугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет правильный треугольник.

Решение: $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c – стороны треугольника, p – полупериметр. Т.е. $2p = a + b + c$.

Оценим с помощью неравенства о среднем арифметическом и геометрическом:

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} = \frac{p}{3}$$

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Значит:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{p\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

Данное неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $(p-a) = (p-b) = (p-c)$, т.е. $a = b = c$. ■

Теорема 2: Из всех n -угольников ($n \geq 4$) с данным периметром наибольшую площадь имеет правильный n -угольник.

Решение: Рассмотрим для начала четырехугольник $ABCD$. Предположим, то он имеет наибольшую площадь при данном периметре P . Докажем, что этот четырехугольник – квадрат. Если предположить, что $ABCD$ не квадрат, то он является трапецией с тремя равными сторонами по предыдущей задаче.

Рассмотрим случай, когда равны стороны AB, BC и CD . При этом AB не равно AD . Тогда из всех четырехугольников с данной стороной AB и периметром P наибольшую площадь имеет такая

трапеция $ABKT$, что $KT = BK = AT$. Трапеция $ABCD$ таковой не является, значит, ее площадь меньше. Но это противоречит нашему условию, что $ABCD$ имеет наибольшую площадь при заданном периметре. Значит, предположение неверно, следовательно, $ABCD$ – квадрат.

Теперь предположим, что $n > 4$. Тогда рассмотрим многоугольник, имеющий наибольшую площадь при данном периметре. Предположим, что его три соседние стороны не равны между собой (стороны, лежащие между 4 последовательно идущими вершинами). Тогда мы можем заменить четырехугольник с вершинами в данных точках на равнобедренную трапецию, имеющую такой же периметр, но обладающую большей площадью. Но тогда у нового многоугольника площадь будет больше, чем у изначально рассматриваемого. А это противоречит условию, что мы рассматривали многоугольник с наибольшей площадью. Значит, наше предположение неверно, то есть любые три соседние стороны многоугольника равны между собой. И, соответственно, по прошлой теореме, углы многоугольника тоже равны между собой. Значит, он является правильным. ■

Задача 7: Угол большой прямоугольной комнаты требуется оградить двумя небольшими одинаковыми ширмами. Как следует расположить ширмы, чтобы отгороженная площадь была наибольшей?

Решение: Построим фигуру, которая будет симметрична ширмам относительно вершины угла, а также относительно стен. Тогда получится восьмиугольник. Очевидно, что его периметр будет в 8 раз больше длины одной ширмы, а площадь будет в 4 раза больше искомой. Мы знаем, что наибольшую площадь из

многоугольников данного периметра имеет именно правильный многоугольник, значит, наш восьмиугольник должен быть правильным, чтобы отгороженная площадь тоже была наибольшей. Значит, в таком случае ширмы будут симметричны относительно биссектрисы угла комнаты, а угол между ними будет 135 градусов. ■

Следующей темой, в которой можно рассматривать геометрические неравенства, является тема «Описанная и вписанная окружность». В ней школьник вспоминает понятие окружности, радиуса и диаметра окружности, а также факты, известные ему об окружности с 7 класса; кроме того ученик узнает определение касательной к окружности в точке, описанной и вписанной окружности. Также вводится понятие фигуры, вписанной в окружность, даются свойства и признаки вписанных фигур.

Задача 1: В любом треугольнике радиус описанной окружности не меньше удвоенного радиуса вписанной окружности, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда треугольник равносторонний.

$$\text{Решение: } R = \frac{abc}{4S}; S = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Пускай $a = x + y$, $b = x + z$, $c = y + z$; Тогда $p = x + y + z$.

$$\frac{R}{r} = \frac{abc}{4S} : \frac{S}{p} = \frac{abcp}{4S^2} = \frac{abc}{4(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{4xyz} \geq \frac{8xyz}{4xyz} = 2$$

Равенство достигается только если $x = y = z$, т.е. $a = b = c$. ■

Перед решением следующих задач рекомендуется вспомнить вместе с учениками, как меняется градусная мера угла, опирающегося на диаметр окружности, в зависимости от того, где находится вершина этого угла. Детям нужно будет рассмотреть три

варианта: когда вершина угла лежит внутри круга, принадлежит окружности и лежит вне круга. На основе этого можно предложить детям придумать дополнительные построения в некоторых следующих задачах:

Задача 2: Два противоположных угла выпуклого четырехугольника — тупые. Докажите, что диагональ, соединяющая вершины этих углов, меньше другой диагонали.

Решение: Пусть у нас четырехугольник ABCD. Пусть тупые углы CBA и CDA. Построим на AC, как на диаметре, окружность. Т.к. углы CBA и CDA – тупые, то точки B и D лежат внутри окружности. Значит, $AC > BD$. ■

Задача 3: Пусть AA_1 — медиана треугольника ABC. $\angle A$ – острый тогда и только тогда, когда $AA_1 > BC/2$.

Решение: Построим окружность на BC, как на диаметре. Тогда ее центр совпадет с A_1 . Если $\angle A$ – острый, то он лежит вне данной окружности, т.е. AA_1 больше радиуса данной окружности. Радиус окружности равен $\frac{BC}{2}$. Значит, $AA_1 > \frac{BC}{2}$. Если $AA_1 > \frac{BC}{2}$, то $\angle A$ лежит вне окружности, построенной на BC, как на диаметре. Значит, $\angle A$ – острый. ■

Задача 4: Биссектриса $\angle A$ треугольника ABC пересекает описанную около треугольника окружность в точке D. Докажите, что $AB + AC \leq 2AD$.

Решение: Рассмотрим полученный четырехугольник ABCD. Он является вписанным в окружность, значит, по теореме Птолемея:

$$AB \cdot CD + AC \cdot BD = AD \cdot BC.$$

Т.к. AD – биссектриса, то $BD = CD$. По неравенству треугольника:

$$BC \leq BD + CD = 2BD \text{ и } BC \leq BD + CD = 2CD.$$

$$\text{Значит: } AB \cdot CD + AC \cdot BD \geq AB \cdot \frac{BC}{2} + AC \cdot \frac{BC}{2}.$$

То есть:

$$AB \cdot \frac{BC}{2} + AC \cdot \frac{BC}{2} \leq AD \cdot BC$$

$$AB \cdot \frac{BC}{2} + AC \cdot \frac{BC}{2} \leq AD \cdot BC$$

$$AB + AC \leq 2AD. \blacksquare$$

Задача 5: Докажите, что среди всех треугольников с данными стороной a и высотой h , опущенной на эту сторону, наибольшую величину противолежащего угла имеет равнобедренный треугольник.

Решение: Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) с основанием $BC = a$ и высотой $AM = h$. Центр окружности, описанной около этого треугольника, лежит на прямой AM . Проведём в точке A касательную к этой окружности. Если A_1 — любая точка этой касательной, отличная от A , то высота треугольника BA_1C , опущенная на BC , также равна h .

Поскольку точка A_1 лежит вне проведенной окружности, то отрезок BA_1 пересекает эту окружность. Пусть K — отличная от B точка пересечения. Тогда $\angle BAC = \angle BKC > \angle BA_1C$ (как внешний угол). Равенство достигается, когда диагонали взаимно перпендикулярны. ■

Перед решением следующих задач учащимся стоит напомнить,

что медиана не превышает полусуммы двух прилежащих к ней сторон.

Задача 6: Даны n точек A_1, \dots, A_n и окружность радиуса 1.

Докажите, что на окружности можно выбрать точку M так, что $MA_1 + \dots + MA_n \geq n$.

Решение: рассмотрим окружность радиуса 1. Отметим на ней две диаметрально противоположные точки M_1 и M_2 . Рассмотрим

некую точку A_k и треугольник $M_1M_2A_k$, где k принимает значения от 1 до n (Рис. 36). В нем, применяя неравенство треугольника:

$$M_1M_2 \leq M_2A_k + M_1A_k.$$

Т.к. окружность радиуса 1, а M_1M_2 – диаметр, то $2 \leq M_2A_k + M_1A_k$.

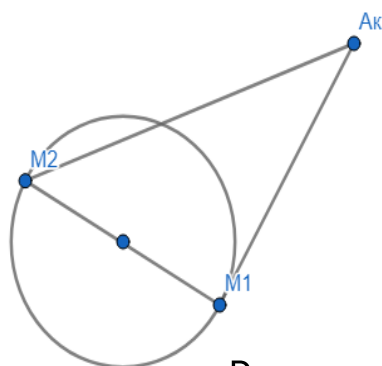


Рис.

Если рассмотреть такие неравенства для каждой из точек A_1, \dots, A_n и сложить их, то получим:

$$2n \leq (M_1A_1 + \dots + M_1A_n) + (M_2A_1 + \dots + M_2A_n).$$

Отсюда следует, что либо $M_1A_1 + \dots + M_1A_n \geq n$, и тогда $M = M_1$, либо $M_2A_1 + \dots + M_2A_n \geq n$, и тогда $M = M_2$. ■

Задача 7: Точки A_1, \dots, A_n не лежат на одной прямой. Пусть две разные точки P и Q : $A_1P + \dots + A_nP = A_1Q + \dots + A_nQ = S$. Докажите, что тогда $A_1K + \dots + A_nK < S$ для некоторой точки K .

Решение: Рассмотрим отрезок PQ . Точкой K отметим его середину. Тогда из ранее доказанного для любого треугольника

A_iPQ , где i принимает значения от 1 до n : $A_iK \leq \frac{AP+QA_i}{2}$. Сложив такие неравенства для каждой точки между собой, получим $A_1K + \dots + A_nK \leq S$. При этом, т.к. точки не лежат на одной прямой по условию, они не могут все лежать на PQ . Значит, хотя бы одно неравенство строгое. Значит, точка K найдена. ■

Задача 8: На столе лежит 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.

Решение: Назовем центр стола точкой O . O_i – центр одних из часов (i принимает значения от 1 до 50). Рассмотрим на часах диаметрально противоположные точки A_i и B_i . Тогда O_i будет являться серединой A_iB_i . Значит, $OO_i \leq \frac{OA_i+OB_i}{2}$ для любого i . Хотя бы для одних из часов A_i и B_i не лежат на прямой OO_i , значит, неравенство в определенный момент станет строгим. Значит, если мы сложим все такие неравенства, то у нас получится, что:

$$\text{либо } OO_1 + \dots + OO_n < OA_1 + \dots + OA_n,$$

$$\text{либо } OO_1 + \dots + OO_n < OB_1 + \dots + OB_n \quad \blacksquare$$

Задача 9: Через данную точку O проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшего периметра.

Решение: Построим вписанную в угол окружность, проходящую через O (выберем наибольшую окружность). Пусть она касается угла в точках B и C . Проведем касательную к окружности в этой точке O . Она пересекает стороны угла в точках X и Y . Рассмотрим

любую другую прямую, проходящую через точку O . Пусть она пересекает угол в точках X_1 и Y_1 .

Построим вневписанную окружность для треугольника AX_1Y_1 . Пусть она касается прямой AB в точке B_1 . Тогда $AB_1 > AB$.

$$P_{AXY} = 2AB < 2AB_1 = PAX_1Y_1. \blacksquare$$

Заключительной темой данного класса, в которой целесообразно рассматривать задачи на геометрические неравенства, является тема «Векторы». Задачи, предложенные ниже, вводятся после изучения правила сложения и вычитания векторов. В данной теме с помощью неравенства треугольника доказываются два свойства векторов:

Задача 1: Докажите, что для векторов x и y $|x+y| \leq |x| + |y|$, $|x-y| \leq |x| + |y|$.

Решение: Вектор $x+y$ является результатом сложения векторов x и y . Длина вектора $x+y$ равна длине отрезка, изображающего вектор $x+y$. Длина векторов x и y – длине отрезков, изображающих x и y соответственно. Сложение векторов можно произвести по правилу треугольника. Тогда наши векторы $x+y$, x и y образуют треугольник, стороны которого равны $|x+y|$, $|x|$ и $|y|$ соответственно. Тогда, по неравенству треугольника, в данном треугольнике $|x+y| \leq |x| + |y|$. Второе утверждение доказывается аналогично. \blacksquare

Задача 2: Отрезок CM – медиана треугольника ABC . Докажите, что $2CM < AC + BC$.

Решение: Так как CM – медиана, то M — середина стороны AB .

Рассмотрим вектор \overrightarrow{CM} . $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}$. Сложим

два этих равенства. Получим, что $2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}$.

Заметим, что $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$. Значит, $2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} =$

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$. По предыдущей задаче, $2|\overrightarrow{CM}| \leq |\overrightarrow{CA}| + |\overrightarrow{CB}|$. ■

Задача 3: Пусть E, F, G и H — середины сторон AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$ (Рис. 37). Докажите, что $EG \cdot HF \leq \frac{(AB + CD)(AD + BC)}{4}$.

Решение: Рассмотрим треугольник ABD . В нем EH – средняя

линия, значит, $S_{AEH} = \frac{1}{4}S_{ABD}$. Аналогично

$S_{CFG} = \frac{1}{4}S_{CBD}$. Значит,

$$S_{AEH} + S_{CFG} = \frac{1}{4}S_{ABD} + \frac{1}{4}S_{CBD} = \frac{1}{4}S_{CBAD}.$$

Аналогично $S_{BEF} + S_{HGD} = \frac{1}{4}S_{CBAD}$.

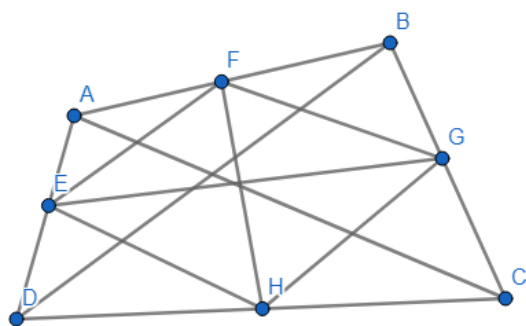


Рис. 37

Сложим два эти равенства:

$$S_{AEH} + S_{CFG} + S_{BEF} + S_{HGD} = \frac{1}{2}S_{CBAD}.$$

Значит, $S_{EFGH} = \frac{1}{2}S_{CBAD}$.

$$S_{EFGH} = \frac{1}{2}EG \cdot HF \cdot \sin \angle EGH \leq \frac{1}{2}EG \cdot HF,$$

т.к. $\sin \angle EGH \leq 1$. Т.е. $S_{CBAD} \leq EG \cdot HF$.

Рассмотрим равенства: $\vec{EG} = \vec{EB} + \vec{BC} + \vec{CG}$ и $\vec{EG} = \vec{EA} + \vec{AD} + \vec{DG}$.

Из них следует, что $2 \vec{EG} = \vec{EB} + \vec{BC} + \vec{CG} + \vec{EA} + \vec{AD} + \vec{DG}$, т.е. $2 \vec{EG} = \vec{BC} + \vec{AD}$.

Поэтому $\vec{EG} = \frac{\vec{AD} + \vec{BC}}{2}$.

Аналогично доказывается, что $\vec{HF} = \frac{\vec{AB} + \vec{CD}}{2}$. Перемножив данные равенства, получим $\vec{EG} \cdot \vec{HF} \leq \frac{(\vec{AB} + \vec{CD})(\vec{AD} + \vec{BC})}{4}$. ■

Задача 4: Даны два параллелограмма $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ с общей вершиной A (Рис. 38). Докажите, что $CC_1 \leq BB_1 + DD_1$.

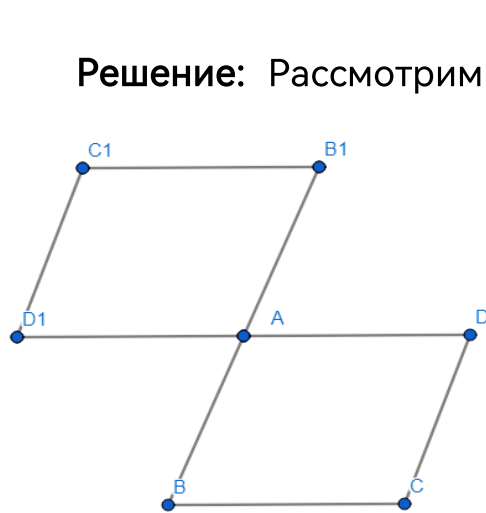


Рис. 38

$BB_1 + DD_1$. ■

Решение: Рассмотрим вектор $\vec{CC_1}$. $\vec{CC_1} = \vec{CD} + \vec{DD_1} + \vec{D_1C_1}$. При

этом заметим, что $\vec{CD} = \vec{BA}$,

$\vec{D_1C_1} = \vec{AB_1}$, то

$= \vec{BA} + \vec{DD_1} + \vec{AB_1}$. А это, в свою

очередь, равно $\vec{DD_1} + \vec{BB_1}$. По Задаче

1, $|\vec{CC_1}| \leq |\vec{DD_1}| + |\vec{BB_1}|$, т.е. $CC_1 \leq$