

Понятие дифференциала функции и его геометрический смысл.

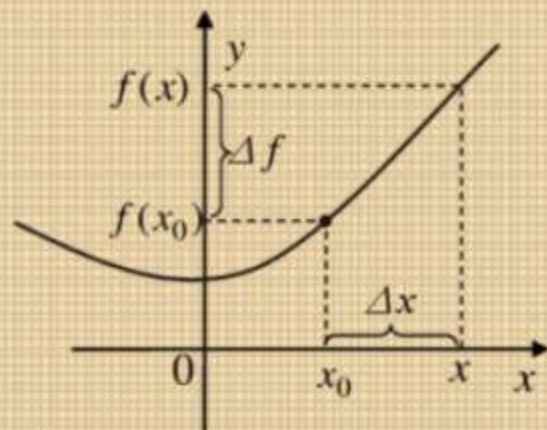
Преподаватель:
Иванникова Е.А.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

1. Понятие дифференциала функции

Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$, определенную в окрестности точки x_0 .

В окрестности точки x_0 выберем точку x , и найдем значение функции в этой точке.



$\Delta x = x - x_0$ - приращение аргумента

$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приращение функции

Определение

Предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к 0 (если этот предел существует и конечен) называется **производной** функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначения производной: $f'(x)$, f'_x , $y'(x)$, y'_x , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 отличную от нуля производную:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \neq 0$$

По основной теореме о пределах, в окрестности точки x_0 имеет место равенство:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x), \quad \alpha(x) \text{ — функция, бесконечно малая при } \Delta x \rightarrow 0$$

Следовательно, $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$ ($\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = f'(x_0) \neq 0$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)\Delta x}{\Delta x} = \alpha(x) = 0$)

$f'(x_0)\Delta x$ — **главная часть приращения функции**

Определение

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная часть приращения этой функции в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$

$$\underline{df = f'(x_0)\Delta x}$$

Дифференциал независимой переменной x равен приращению Δx :

$$y = f(x) = x \Rightarrow y' = x' = 1 \Rightarrow df = dx = 1 \cdot \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$$

Итак, $\underline{df = f'(x)dx}$

Следовательно, $\frac{df}{dx} = f'(x)$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пример 1

Дана функция $f(x) = x^4 + \sin 3x$

Найти df в точке $x_0 = 0$

Решение:

$$df = f'(x)dx = (x^4 + \sin 3x)'dx = (4x^3 + 3\cos 3x)dx$$

$$df(x_0) = (4 \cdot 0^3 + 3\cos 0)dx = 3dx$$

Пример 2

Дана функция $f(x) = e^{\arctg x} + 7x - 3$

Найти df

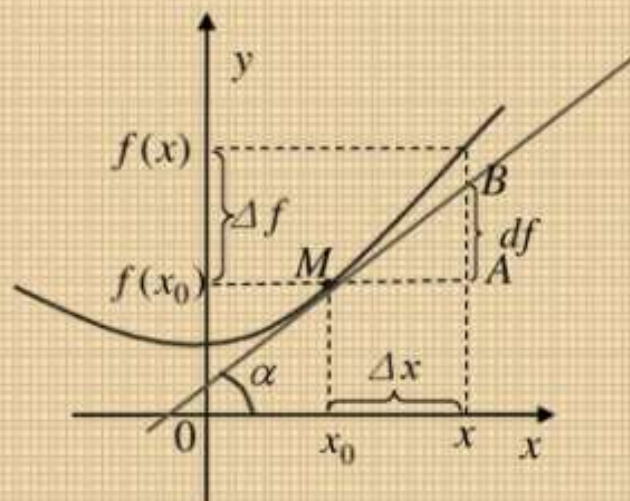
Решение:

$$df = f'(x)dx = (e^{\arctg x} + 7x - 3)'dx = \left(e^{\arctg x} \cdot \frac{1}{1+x^2} + 7 \right) dx$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

2. Геометрический смысл дифференциала функции

К графику функции $y = f(x)$ проведем касательную в точке x_0



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \angle AMB = \frac{AB}{MA} = \frac{AB}{\Delta x} \Rightarrow AB = f'(x_0) \Delta x \Rightarrow AB = df$$

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда аргумент получает приращение Δx

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

3. Свойства дифференциала

1. $dC = 0$

2. $d(u \pm v) = du \pm dv$

3. $d(u \cdot v) = v du + u dv$

4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} (v \neq 0)$

5. Пусть $y = f(u(x))$ – сложная функция, тогда

$$dy = f'_x dx = f'_u \cdot u'_x dx = f'_u du$$

Итак,
$$\frac{f'_x dx = f'_u du}{|}$$

инвариантность формы 1-го дифференциала

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

4. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Приращение функции

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x = df + \alpha(x)\Delta x \Rightarrow \Delta f \approx df$$

Абсолютная погрешность при замене Δf на df равна $\Delta f - df = \alpha(x)\Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx при $\Delta x \rightarrow 0$

Пример

Вычислить $2,01^5$

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = x^5$

Пусть $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,01$, тогда $x_0 + \Delta x = 2,01$

Задача сводится к нахождению $f(x_0 + \Delta x) = (2 + 0,01)^5$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$$

$$f(x_0) = f(2) = 2^5 = 32$$

$$\Delta f \approx df = (x^5)' \Delta x = 5x^4 \Delta x \quad df(x_0) = 5 \cdot 2^4 \cdot 0,01 = 0,8$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx 32 + 0,8 = 32,8$$

Итак, $2,01^5 \approx 32,8$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

5. Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$, x – независимая переменная,
 $df = f'(x) \cdot dx$ – дифференциал (первый дифференциал).

Определение

Вторым дифференциалом d^2f функции $y = f(x)$ называют дифференциал от первого дифференциала df , рассматриваемого как функция от x (dx считаем константой).

Таким образом,

$$d^2f = d(df) = d(f'(x) \cdot dx) = dx \cdot d(f'(x)) = dx \cdot f''(x) \cdot dx = f''(x) \cdot (dx)^2.$$

Итак, $d^2f = f''(x) \cdot dx^2$.

Аналогично определяются третий и выше дифференциалы:

$$d^3f = f^{(3)}(x) \cdot dx^3, \quad d^4f = f^{(4)}(x) \cdot dx^4$$

Итак, $d^n f = f^{(n)}(x) \cdot dx^n$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пример

Дана функция $f(x) = x^4 + \sin 3x$

Найти $d^2 f$

Решение:

$$d^2 f = f''(x) dx^2 = (x^4 + \sin 3x)'' dx^2 = (4x^3 + 3 \cos 3x)' dx^2 = (12x^2 - 9 \sin 3x) dx^2$$