

**АЛЕКСАНДРОВА И.А. Математика для увлеченных (курс внеурочной деятельности для учащихся 7-8 классов):** методические рекомендации для учителей математики и студентов педагогических вузов. – Самара: типография ООО «ПОРТО-ПРИНТ», 2017. - 54с.

*Рецензенты:*

кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики, физики и методики обучения Самарского государственного социально-педагогического университета *Ю.С. Шатрова*;

директор ГБУ ДПО СО «Сергиевский РЦ» *И.Е. Терешина*.

Методические рекомендации содержат подробную характеристику деятельности учителя и учащихся во время проведения занятий по курсу внеурочной деятельности «Математика для увлеченных». В рекомендациях подробно описана составленная автором рабочая программа курса.

Издание адресовано учителям математики, студентам педагогических вузов, обучающимся по направлению подготовки Педагогическое образование профилю «Математика».

*Ответственный за выпуск-*

кандидат педагогических наук, доцент кафедры химии, географии и методики их преподавания Самарского государственного социально-педагогического университета *Нелюбина Е.Г.*

© Александрова И.А., 2017.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
РАБОЧАЯ ПРОГРАММА .....	5
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ПРОВЕДЕНИЮ ЗАНЯТИЙ.....	21
Лекция 1 (к занятиям 1-4). Отношение делимости. Деление с остатком.....	21
Занятие 1. «Отношение делимости в $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ . Деление с остатком» .....	29
Занятие 2. «Признаки делимости. Четность, нечетность».....	32
Занятие 3. «НОД и НОК. Алгоритм Евклида».....	34
Занятие 4. «Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Количество делителей» .....	37
Тестовые задания для проведения проверки сформированности результатов обучения .....	40
Занятие 1.....	40
Занятие 2.....	41
Занятие 3.....	43
Занятие 4.....	44
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	45
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	46
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	48

## ВВЕДЕНИЕ

Предпосылкой возникновения данного опыта является противоречивая ситуация, сложившаяся в настоящий момент в обществе. С одной стороны, популяризируются развивающие программы, в которых увеличен объём содержания обучения, обучение идёт на высоком уровне сложности, быстрыми темпами. С другой стороны, обостряющийся экологический кризис и массовое ухудшение состояния здоровья населения, снижение духовно-нравственной культуры, экономические трудности, приоритет материальных ценностей привели к тому, что сейчас в школы приходят ослабленные, педагогически запущенные дети; дети, у которых недостаточно развиты те или иные познавательные процессы. Как следствие – у детей снижается интерес к учению. Это создает большие трудности в обучении. Очевидно, что сложившееся положение заставляет искать пути решения данной проблемы.

Большое влияние на формирование опыта оказал собственный интерес к обозначенной проблеме, стремление придать своей деятельности направленный характер. Широкие возможности для реализации данного опыта даёт системная организация внеурочной деятельности по математике. Я верю, что каждый ребёнок талантлив по своему, способен к самосовершенствованию и активному участию во внеурочной деятельности, которая в большей степени раскрывает способности каждого школьника. Предлагаемый опыт решает проблему повышения мотивации, организации самостоятельной познавательной деятельности учащихся через развитие познавательного интереса, творчества, проектно – исследовательской деятельности.

Время не стоит на месте. Обновление качества образования требует от нас новых подходов в обучении, новых технологий. Новые социальные запросы, отражённые в ФГОС ООО, определяют цели образования как общекультурное, личностное и познавательное развитие учащихся, обеспечивающее такую ключевую компетенцию образования, как «научить учиться».

Важным становится не «образование на всю жизнь», а «образование на протяжении всей жизни». Стандарты предполагают повышение значимости внеурочной работы, которая ориентирует педагога на ребёнка – главную цель и ценность образования. Главное – не просто дать школьнику новые знания и умения, а научить их применять, развивать и в урочное, и во внеурочное время. Решение головоломок, ребусов, занимательных задач во время проведения внеурочных занятий по математике по силам детям с разным уровнем знаний.

В настоящее время возникла необходимость включения во внеурочную работу по математике всех учащихся. Это обусловлено повышением интереса учащихся к школьному курсу математики. Необходимость массовой внеурочной работы по математике вызвана ещё и тем, что общество ждет от школы всесторонней подготовки подрастающего поколения к жизни. Внеурочная работа по математике – органичная часть учебного процесса, она дополняет, развивает и углубляет его.

На внеурочной работе несравненно больше, чем на уроке, создаются условия для развития индивидуальных задатков, интересов, склонностей учащихся, да и сама внеурочная работа, призванная учитывать личные запросы школьника, стремится к их удовлетворению, требует дифференцированного и индивидуального подхода в обучении. Внеурочная работа рассматривается, как средство развития интереса к предмету, повышения качества знаний, развития творческой самостоятельности, формирования элементов материалистического мировоззрения, эстетического, нравственного воспитания школьников. Необходимый набор знаний достигается непосредственно через содержание заданий. Задания должны подбираться с учётом умственного развития учащихся и переходить от менее сложного к более сложному.

Внеурочная работа по математике является составной частью учебного процесса, естественным продолжением работы на уроке. Она создаёт большие возможности для решения воспитательных задач, стоящих перед школой. Внеурочные занятия с учащимися приносят большую пользу и самому учителю.

Данное издание состоит из двух частей: рабочей программы курса внеурочной деятельности «Математика для увлеченных» и методических рекомендаций к проведению ряда занятий по данному курсу.

В данных методических рекомендациях описана составленная мной программа внеурочной деятельности для учащихся 7-8 классов «Математика для увлеченных». Программа рассчитана на реализацию в течение одного учебного года.

Данное издание адресовано учителям математики, студентам педагогических вузов, обучающимся по направлению подготовки Педагогическое образование профилю «Математика».

# РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

## I. Пояснительная записка

В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом (ФГОС) основой достижения развивающих целей образования в школе признаётся активность обучающихся — знания не передаются в готовом виде, а добываются самими обучающимися в процессе познавательной деятельности.

Рабочая программа курса внеурочной деятельности «Математика для увлеченных» разработана для обучения математике одаренных детей, формирования в процессе внеурочных занятий высокомотивированной саморазвивающейся личности, то есть личности, желающей и умеющей учиться математике.

Актуальность данной образовательной программы определяется запросом общества. Современное информационное общество запрашивает человека обучаемого, способного самостоятельно учиться и многократно переучиваться в течение постоянно удлиняющейся жизни, готового к самостоятельным действиям и принятию решений. Для жизни и деятельности человека важно не наличие у него накоплений впрок, запаса какого-то внутреннего багажа всего усвоенного, а проявление и возможность использовать то, что есть, то есть не структурные, а функциональные, деятельностные качества.

Новизна данной образовательной программы опирается на понимание приоритетности деятельностного подхода, воспитания у учащихся активности и самостоятельности в учебной деятельности.

Суть деятельностного подхода состоит в том, что он ориентирует не только на усвоение знаний, но и на способы этого усвоения, на образцы мышления и деятельности, на развитие познавательных сил и творческого потенциала ребенка. Решающим звеном деятельностного подхода является собственная активная учебно-познавательная деятельность учащихся.

### ***Цели и задачи курса «Математика для увлеченных»***

#### ***Целями данного курса являются:***

1. Развитие математических, интеллектуальных способностей учащихся, обобщенных умственных умений.
2. Развитие творческих способностей учащихся; формирование необходимых навыков к научно-исследовательской деятельности.
3. Углубление учебного материала.
4. Создание условий для самореализации учащихся в процессе учебной деятельности; содействие их умению работать с учетом индивидуальных способов проработки учебного материала.
5. Воспитание навыков самообразования, самоконтроля, привычки к рефлексии; воспитание личностных качеств обучающихся (самостоятельность, коммуникабельность, дисциплинированность, аккуратность, ответственность).

Для достижения поставленных целей в процессе обучения решаются следующие задачи:

1. Сформировать умения решать задачи на делимость, комбинаторные задачи.

2. Планомерно формировать у учащихся умения выводить логические следствия, приучать школьников логически верно оформлять свои рассуждения.

3. Формировать у учащихся навыки самостоятельной работы с различными источниками информации: математической литературой (учебной, научно-популярной и т.п.), цифровыми (электронными) образовательными ресурсами, Интернет-ресурсами и др.

4. Формировать у учащихся познавательные действия, вовлекать учащихся в коммуникативную, практическую, исследовательскую деятельность.

5. Формировать представление о математике как форме описания действительности, создать условия для приобретения первоначального опыта математического моделирования.

6. Формировать стремление продуктивно организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками.

Курс призван научить школьников видеть красоту в логике обоснований, грамотно рассуждать, доказывать, проводить анализ, обобщение, конкретизацию, использовать индукцию, наблюдение, аналогию. Обучаемые получают необходимые теоретические сведения для успешного решения математических задач на различных этапах Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Программа внеурочной деятельности "Математика для увлеченных" полностью соответствует целям и задачам Основной образовательной программы основного общего образования, реализуемой в школе.

Программа содержит дополнительный материал по трем основным темам курса математики школьной программы: «Делимость чисел», «Методы ведения математических рассуждений и доказательств», «Комбинаторика и статистика», расширяет и углубляет знания учащихся по данным темам.

Рабочая программа составлена на основе модульной технологии обучения. Принцип модульности предполагает построение учебного материала в виде блоков - модулей, внутри которых учебный материал структурируется в виде учебных элементов.

**Модуль** – это завершенная часть курса (темы, раздела), которая заканчивается контролем.

Главная сущность модульного обучения состоит в том, что ученик полностью самостоятельно достигает целей учебно-познавательной деятельности в процессе работы над модулем - целевым функциональным узлом, в который объединены учебное содержание и приемы учебной деятельности по овладению этим содержанием. Основные мотивы внедрения в учебный процесс модульной технологии:

- гарантированность достижения результатов обучения;
- возможность работать учащимся в группах, в парах;
- паритетные отношения учителя и ученика;

- возможность общения с товарищами;
- возможность выбора уровня обучения;
- возможность работать в индивидуальном темпе;
- раннее предъявление конечных результатов обучения;
- "мягкий" контроль в процессе освоения учебного материала.

Модульная технология обеспечивает индивидуализацию обучения: по содержанию обучения, по темпу усвоения, по уровню самостоятельности, по методам и способам учения, по способам контроля и самоконтроля.

Началом каждого модуля является лекция. Кроме этого проводятся семинары - практикумы, которые позволяют учащимся работать самостоятельно, общаться и помогать друг другу, оценивать работу свою и своего товарища. При этом необходимо, чтобы каждый ученик уяснил цель урока, что изучить и на чем сосредоточить свое внимание. Во время самостоятельного решения задач предлагаются многоуровневые задания каждому ученику, предусматривающие самопроверку решения той или иной задачи. В течение всего курса регулярно проводятся «контрольные точки» по изученному материалу и делается вывод об усвоении программы. Когда все темы модуля пройдены, проводится заключительное тестирование.

Рабочая программа содержит отдельный модуль, направленный на обучение навыкам исследовательской работы, как неотъемлемой части современного образования.

В рабочую программу также включен модуль по решению задач дистанционного плана, основной целью которого является овладение учащимися навыками самостоятельного решения задач, входящих в содержание заданий разнообразных олимпиад и конкурсов.

В самостоятельную работу учащихся включаются модули «Лабораторные работы. Задачи – исследования», «Решение задач дистанционного плана» и выполнение исследовательской работы или проекта. Задания для самостоятельной работы выполняются индивидуально.

#### ***Формы проведения занятий:***

- лекция;
- семинар-практикум по решению задач;
- практические работы;
- самостоятельное решение задач;
- работа с научно-популярной литературой.

#### ***Формы работы с отдельным модулем:***

- индивидуальная самостоятельная работа ученика;
- партнерская работа в парах;
- работа в группах.

Значительное место в учебной деятельности отводится рассуждениям, особое внимание уделяется формированию таких приёмов мыслительной деятельности, как наблюдение и сравнение, обобщение и конкретизация, анализ и синтез. Систематически проводится работа по выработке умения применять эвристические приёмы при решении задач.

### ***Условия реализации программы и сроки***

Для проведения полноценного учебного процесса и успешной реализации программы необходимы следующие материально-технические условия: учебный кабинет, оборудованный компьютерами с возможностью выхода в Интернет, мультимедийным проектором, интерактивной доской, дидактическим материалом и др. учебным оборудованием.

Срок реализации программы – 1 год. Занятия проводятся 1 раз в неделю по 2 учебных часа, всего – 68 часов за год (34 учебных недели).

## **II. Планируемые результаты освоения учащимися программы внеурочной деятельности**

### ***1. Ожидаемые результаты обучения***

В результате изучения модуля «Делимость целых чисел» учащиеся будут знать:

понятие делителя целого числа, свойства делимости чисел, теорему о делении с остатком и свойства деления, свойства четности, теорему о разложении числа на простые множители, определение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного, формулировку теоремы о делении с остатком, свойства деления с остатком, свойства делимости суммы и произведения, определение простого и составного числа, формулировку основной теоремы арифметики, понятие и свойства точного квадрата, алгоритм решения уравнения в целых числах.

*Учащиеся научатся:*

применять делимость в практических целях, выполнять деление с остатком, находить остаток при делении, неполное частное, доказывать: простым или составным является данное число, решать уравнения в целых числах, доказывать свойства делимости чисел,

решать задачи на чередование, деление на пары, используя понятие четность, использовать разложение на простые множители при решении задач на делимость, решать задачи на делимость перебором остатков, находить последнюю цифру степени и находить остаток от деления степени на натуральное число.

*Учащиеся получают возможность:*

расширить математические представления о свойствах целых чисел, решать олимпиадные и конкурсные задачи на делимость; решать задачи – исследования на делимость чисел.

В результате изучения модуля «Методы ведения математических рассуждений и доказательств» учащиеся будут знать:

сущность и содержание следующих понятий: доказательство, прямое доказательство, косвенное доказательство, софизм, контрпример, метод от противного, необходимое и достаточное условия, индукция, дедукция, принцип Дирихле; методы доказательства и опровержения; структуру ведения рассуждений методом математической индукции; приемы решения логических задач.



*Учащиеся научатся:*

логически правильно определять и квалифицировать понятия; решать задачи с помощью принципа Дирихле, методом от противного; доказывать различные утверждения, строить выводы; доказывать с помощью рассуждений; опровергать неверные утверждения; "видеть" ошибку в математических рассуждениях, применять метод математической индукции к решению различных задач.

*Учащиеся получают возможность:*

использовать аппарат математики, методы решения задач и доказательств утверждений в других областях; развить логическое мышление и речь, умение логически обосновывать суждения, проводить несложные систематизации, приводить примеры и контрпримеры, анализировать проблемные ситуации.

В результате изучения модуля «Комбинаторика и статистика» учащиеся будут знать:

сущность и содержание следующих понятий «перестановки», «размещения», «сочетания», «бином Ньютона», «треугольник Паскаля», правило умножения.

*Учащиеся научатся:*

решать задачи по комбинаторике на подсчет числа вариантов различных событий, на перестановки; решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул; вычислять коэффициенты бинома Ньютона по формуле и с использованием треугольника Паскаля; систематизировать данные в виде таблиц.

*Учащиеся получают возможность:*

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков; для анализа информации статистического характера.

В результате изучения модуля «Практические работы. Задачи-исследования» учащиеся научатся: определять зависимость между величинами, выявлять закономерность, формулировать правило, обобщать и систематизировать результаты.

*Учащиеся получают возможность:* выполнять ряд экспериментов с исследуемым объектом.

В результате изучения модуля «Решение задач дистанционного плана» учащиеся будут знать: перечень олимпиад и конкурсов, которые дают возможность реализации творческих способностей учащихся, могут давать льготы при поступлении в вузы.

*учащиеся научатся:* решать нестандартные задания, логически мыслить, грамотно оформлять свои решения, доводы, систематизировать данные и работать в команде или индивидуально.

*Учащиеся получают возможность:* оценить уровень своих знаний, проявить творческие способности, приобрести опыт участия в разнообразных конкурсах и олимпиадах, получить общественное признание своим талантам.

В ходе усвоения содержания всего курса у учащихся будут развиты: познавательный интерес к предмету математика; умения и навыки самостоятельной работы и самообразования; умение аргументировано отстаивать свои взгляды и убеждения; навыки работы с проблемной ситуацией; умения и навыки публичного выступления.

*Будут воспитаны* качества личности необходимые человеку в повседневной жизни: самостоятельность, коммуникабельность, дисциплинированность, аккуратность, ответственность, умение принимать решение, настойчивость и упорство в достижении поставленной цели; умение работать в коллективе; система представлений о методах научного познания мира.

*Учащиеся получают возможность:* приобрести опыт исследовательской и проектной деятельности; моделирования практических ситуаций и исследования построенных моделей с использованием аппарата алгебры; использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.

## **2. Формирование универсальных учебных действий (УУД) в процессе занятий**

В процессе обучения в основной школе большое значение уделяется формированию универсальных учебных действий (УУД): личностных, регулятивных, познавательных и коммуникативных. Решение задачи развития УУД в основной школе происходит не только на занятиях по отдельным учебным предметам, но и в ходе внеурочной деятельности

Формирование универсальных учебных действий способствует индивидуализации обучения, создает возможность для самостоятельного успешного усвоения новых знаний, умений и компетентностей, нацеленности учебного процесса на каждом его этапе на достижение определенных, заранее планируемых учителем результатов.

В процессе обучения у учащихся будут сформированы

### Личностные УУД:

- ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры;
- умение показать критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта;
- представление о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах ее развития, о ее значимости для развития цивилизации;
- креативность мышления, инициатива, находчивость, активность при решении математических задач;
- умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности;
- способность к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

#### Регулятивные УУД:

- составлять план и последовательность своих действий;
- определять последовательность промежуточных целей и соответствующих им действий с учетом конечного результата;
- предвидеть возможность получения конкретного результата при решении задач;
- осуществлять констатирующий и прогнозирующий контроль по результату и способу действий;
- концентрировать волю для преодоления интеллектуальных трудностей;
- адекватно оценивать правильность и ошибочность выполнения учебной задачи, ее объективную трудность и собственные возможности ее решения.

#### Познавательные УУД:

- искать и выделять необходимую информацию; применять методы информационного поиска, в том числе с помощью компьютерных средств;
- выбирать наиболее эффективные способы решения задач в зависимости от конкретных условий;
- проводить рефлексию способов и условий действий, контроль и оценку процесса и результатов деятельности;
- самостоятельно создавать алгоритм деятельности при решении проблем творческого и поискового характера;
- устанавливать причинно-следственные связи;
- строить логические цепочки рассуждений, анализировать истинность утверждений;
- выдвигать гипотезы и их обосновывать;
- произвольно и осознанно владеть общим приемом решения задач;
- осуществлять синтез как составление целого из частей;
- осуществлять сравнение, сериацию и классификацию по заданным критериям.

#### Коммуникативные УУД

- организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками;
- координировать и принимать различные позиции при взаимодействии;
- взаимодействовать и находить общие способы работы;
- разрешать конфликты на основе согласования позиций и учета интересов;
- слушать партнера;
- формулировать, аргументировать и отстаивать собственное мнение;
- с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации.

### **III. Система контролирующих материалов для оценки планируемых результатов освоения программы**

#### ***Способы проверки результативности***

Установление степени достижения учащимися промежуточных результатов производится на каждом занятии благодаря использованию самостоятельных работ, тестов, консультаций. Перед каждым модулем проводится входной контроль знаний и умений учащихся, чтобы иметь информацию об уровне готовности к работе по новому модулю. При необходимости проводится соответствующая коррекция знаний; Результативность освоения конкретных тем отслеживается с помощью текущего контроля в конце каждого учебного элемента (чаще это мягкий контроль: самоконтроль, взаимоконтроль, сверка с образцом и т. д.). После завершения работы с модулем проводится выходной контроль. Текущий и промежуточный контроль проводится с целью выявления пробелов в усвоении знаний и их устранения сразу, а выходной контроль должен показать уровень усвоения всего модуля.

*Формы и способы проверки результативности самостоятельной работы:* выступление с докладом на тематических конференциях, выполнения детьми практико-исследовательских работ, активное участие в ежегодно проводимой «Неделе математики», участие в разнообразных олимпиадах, конкурсах. Учитель фиксирует уровень активности и интереса учащихся, количество и качество творческих работ, уровень и вид сформированной мотивации учащихся. Данный контроль проводится в виде анкет, бесед, творческих работ и наблюдения.

#### ***Критерии оценивания результатов самостоятельной работы на семинаре-практикуме***

По результатам работы начисляются баллы. Оценка за занятие ставится в зависимости от баллов набранных учащимся в ходе выполнения заданий.

<b><i>Процент от общего количества баллов</i></b>	<b><i>Оценка</i></b>
90-100	отлично
68-89	хорошо
51-67	удовлетворительно

#### ***Критерии оценивания практических навыков и умений (при проведении практических работ)***

<b><i>Оцениваемые параметры</i></b>	<b><i>Оценка</i></b>		
	<b><i>Отлично</i></b>	<b><i>Хорошо</i></b>	<b><i>Удовлетворительно</i></b>
Умение подготовиться к действию	Умеет самостоятельно подготовиться к выполнению предстоящей задачи	Умеет самостоятельно подготовиться к выполнению предстоящей задачи, но не учитывает всех нюансов её выполнения	Подготовительные действия носят сумбурный характер, недостаточно эффективны или имеют ряд упущений, но в целом направлены на предстоящую деятельность

Алгоритм проведения действия*	Последовательность действий отработана. Порядок действия выполняется аккуратно; тщательно; в оптимальном временном режиме. Видна нацеленность на конечный результат	Для активизации памяти самостоятельно используются алгоритмические подсказки. Порядок действия выполняется аккуратно, видна нацеленность на конечный результат	Порядок действий напоминает педагогом. Порядок действия выполняется аккуратно, но нацелено на промежуточный результат
Результат действия	Результат не требует исправлений	Результат требует незначительной корректировки	Результат в целом получен, но требует серьезной доработки

**Критерии оценивания выполнения учебно-исследовательской работы  
(проектная деятельность)**

<b>Оцениваемые параметры</b>	<b>Оценка</b>		
	<b>Отлично</b>	<b>Хорошо</b>	<b>Удовлетворительно</b>
Постановка цели и задач исследования	Формулировки цели и задач требуют незначительной коррекции научного руководителя или консультанта	Цель и задачи сформулированы при участии научного руководителя или консультанта	Цель и задачи сформулированы при значительном участии научного руководителя или консультанта
Выбор методики	Методы исследования выбраны самостоятельно и верно	Выбранные методы исследования требуют коррекции	Выбранные методы позволяют решить поставленные задачи лишь частично
План исследования	Разработан самостоятельно. Требуется незначительной коррекции	Разработан самостоятельно. Требуется значительной коррекции	Разработан при непосредственном участии научного руководителя или консультанта
Работа с литературой	Более 50 % литературы по проблеме подобрано самостоятельно. Ссылки на использованную литературу сделаны правильно	Основная литература предложена руководителем. Ссылки на использованную литературу сделаны правильно	Основная литература предложена руководителем. Ошибки в ссылках на использованную литературу
Сбор материала	Собранный материал соответствует задачам исследования. Материала достаточно для выполнения работы в запланированном объеме	Собранный материал соответствует задачам исследования, но его объем по ряду направлений недостаточен	Материал собран хаотично, его не достаточно для решения поставленных задач

Обработка и анализ материала	Самостоятельный анализ материала, выполнение таблиц, графиков и т.д. Применение статистических методов, коэффициентов и т.п.	Осмысление материала при участии научного руководителя или консультанта. Самостоятельная обработка, требующая незначительной коррекции	Осмысление и обработка материала при значительном участии научного руководителя или консультанта
Выводы	Выводы обоснованы и соответствуют задачам исследования	Выводы недостаточно корректны	Выводы не соответствуют задачам исследования
Текст работы	Текст написан с соблюдением рубрикации принятой для научных работ. Требуется незначительная правка научного руководителя	Структурами смысловая часть текста требует значительной коррекции научного руководителя	Текст серьезно корректировался научным руководителем более двух раз

### ***Критерии оценивания развития личностных характеристик обучающегося***

<b><i>Оцениваемые параметры</i></b>	<b><i>Оценка</i></b>		
	<b><i>Выражены хорошо</i></b>	<b><i>Выражены средне</i></b>	<b><i>Выражены слабо</i></b>
Коммуникабельность	Легко общается и знакомится с людьми. Способен договориться с другим человеком, объяснить свои претензии без ссоры	Легко знакомится и общается с людьми, но договориться самостоятельно не может. При спорной ситуации скандалит и обвиняет во всем других	Стеснительный, обидчивый. Хочет общаться, но не знает, как завязать разговор. При конфликтных ситуациях обижается, вместе того, чтобы выяснить отношения
Лидерские качества	Способен взять на себя руководство группой младших юннатов в отсутствие руководителя, объяснить, что непонятно, ответить на некоторые вопросы детей. Может взять на себя ответственность в нестандартной ситуации, если такая случится	Может ответить на вопросы младших юннатов, руководить их деятельностью в живом уголке, если ситуация не требует принятия решений	Не способен на принятие самостоятельных решений, не может руководить младшими товарищами

Расположенность к творчеству	Не боится фантазировать и воплощать свои фантазии.	Фантазирует, но не замахивается на воплощение своих фантазий	Не фантазирует и не рассказывает о своих мечтах, боится, что будут ругать
Расположенность к творчеству	Может придумать, что нового он хочет узнать об интересующем его объекте и спланировать опыт для выяснения этого факта	Хочет узнать многое, но не представляет, как это сделать	Считает, что все знания берутся исключительно из книг, а как они туда попадают, неизвестно
Аккуратность и дисциплинированность	Ответственно относится к порученному делу, не путается в собранном материале, регулярно и без напоминаний записывает все для себя новое	Ответственно относится к порученному делу, но забывает многое записать, надеется на свою память. Путается в собственных записях и воспоминаниях	Не способен к самостоятельной деятельности без стимуляции со стороны руководителя, все теряет и забывает

Развитие личностных качеств обучающихся определяется методом постоянного наблюдения, а их коррекция проводится с помощью индивидуальных бесед, конкретных заданий и других мероприятий.

#### IV. Учебно-тематическое планирование

№ ауд. занятия	Наименование разделов, тем модуля	Кол-во часов	Аудиторная работа			Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	Практические работы	
1-3	Отношение делимости. Деление с остатком.	3	1	2		7
4-5	Признаки делимости. Четность.	2		1	1	
6-7	НОД, НОК. Алгоритм Евклида	2		1	1	
8-9	Простые и составные числа. Количество делителей.	2		1	1	
10-12	Точный квадрат	3	1	2		
13-14	Арифметика остатков	2		2		
15-16	Неопределенные уравнения первой степени	2		2		

17	Обобщающее занятие	1		1		
18-19	Понятие доказательства и его структура.	2	1	1		6
20	Приемы открытия фактов и поиска доказательств.	2		2		
21-22	Необходимое и достаточное условия	1		1		
23-25	Индукция как вероятное рассуждение	3	1	2		
26-27	Софизмы. Принцип Дирихле	2		2		
28-29	Логические задачи	2		2		
30	Обобщающее занятие	1		1		
31-33	Основные правила комбинаторики.	3	1	2		7
34-35	Перестановки	2		2		
36-37	Размещения	2		2		
38-39	Сочетания	2		2		
40-42	Бином Ньютона. Треугольник Паскаля	3		2		
43-44	Статистика. Ряды данных.	2	1		1	
45-46	Количественные характеристики выборки.	2		1	1	
47	Обобщающее занятие			1		
48	Итоговое занятие			1		
	<b>Всего</b>		<b>6</b>	<b>37</b>	<b>5</b>	<b>20</b>

## V. Содержание программы курса

### Модуль 1. Делимость чисел (17 ч)

#### 1. Отношение делимости. Деление с остатком.

Деление одного числа на другое нацело. Теорема о делении с остатком. Деление с остатком, неполное частное и остаток. Свойства делимости. Формулы чисел, кратных  $n$ , и чисел, которые при делении на  $n$  дают в остатке  $r$ . Нестандартные задачи, использующие деление нацело и деление с остатком.

#### 2. Четность и нечетность. Признаки делимости. (7 ч).

Четность и нечетность при решении олимпиадных задач. Четность как инвариант некоторых преобразований. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 25. Использование признаков делимости в олимпиадной математике.

#### 3. Простые и составные числа. Количество делителей (7 ч).



Понятие простого числа. Разложение числа на множители. Простые сомножители, каноническое разложение. Теорема о бесконечности множества простых чисел. Основная теорема арифметики. Взаимно простые числа. Количество делителей, четность и нечетность количества делителей. Число делителей данного числа, общая формула.

#### 4. НОД, НОК. Алгоритм Евклида

Делители данного числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Нахождение наибольшего общего делителя, алгоритм Евклида. Теорема о связи НОД и НОК.

#### 5. Точный квадрат.

#### 6. Арифметика остатков. Сравнения. (7 ч).

Понятие чисел, сравнимых по данному модулю, свойства сравнений. Сложение и умножение сравнений, возведение в степень. Нахождение остатков от деления больших чисел. Решение нестандартных задач с помощью перехода к сравнениям по модулю.

#### 7. Неопределенные уравнения первой степени

### ***Модуль 2. Методы ведения математических рассуждений и доказательств. (13 ч)***

Понятие доказательства и его структура. Прямое и обратное утверждения. Виды косвенных доказательств. Доказательство методом от противного. Доказательство существования. Отрицание. Опровержение.

Приемы открытия фактов и поиска доказательства. Прием аналогии. Приемы обобщения и конкретизации. Прием получения следствий. Частных случаев рассмотрение.

#### Необходимое и достаточное условие.

Индукция как вероятное рассуждение. Неполная индукция. Полная индукция и математическая индукция. Применение метода математической индукции в задачах на суммирование. Доказательство тождеств. Применение метода математической индукции к решению вопросов делимости.

#### Софизмы. Ошибки в доказательстве. Софизмы.

#### Принцип Дирихле.

### ***Модуль 3. Комбинаторика и статистика (18 ч)***

#### Основные правила комбинаторики.

Комбинаторные задачи. Правило суммы. Правило произведения.

#### Перестановки.

Перестановки без повторений. Перестановки с повторениями. Понятие факториала.

#### Размещения.

Размещения без повторений. Размещения с повторениями.

#### Сочетания.

Сочетания без повторений. Свойства сочетаний. Сочетания с повторениями. Теорема о выборках двух, трех элементов.

#### Треугольник Паскаля. Числа Фибоначчи и их свойства.

Бином Ньютона. Свойства бинома и его коэффициентов. Решение нестандартных задач.

### Статистика. Ряды данных.

Обработка информации. Группировка данных в виде таблиц. Общий ряд данных. Выборка. Варианта. Кратность варианты. Частота варианты. Графическое представление информации.

### Количественные характеристики выборки.

Размах выборки. Мода выборки. Среднее значение. Медиана.

### ***Самостоятельная работа учащихся (20 часов).***

### ***Модуль 4. Практические работы. Задачи - исследования.***

Учебное исследование, осуществляемое непосредственно через решение специальных исследовательских задач, как метод обучения математике не только формирует, развивает мышление обучающихся, но и способствует формированию высшего типа мышления – творческого мышления, без которого немыслима творческая деятельность. Участвуя в учебном исследовании, обучающиеся получают навыки осуществления математической деятельности, так как непосредственно проделывают эту деятельность, в тоже время создается своего рода платформа для формирования и развития их универсальных учебных действий вследствие того, что именно активное познание является условием и средством психического развития обучающихся.

Умение мыслить – это умение анализировать, выделять главное, сравнивать, строить аналогии, обобщать и систематизировать, доказывать и опровергать, определять и объяснять понятия, ставить и разрешать проблемы.

Выполнение исследовательских задач по математике, как вид активной познавательной деятельности обучающихся, способствует формированию следующих умений:

- добывать новые знания, приемы и способы действий;
- самостоятельно организовывать поиск;
- достигать поставленных целей обучения;
- формировать мыслительные операции (такие как аналогия, классификация, обобщение и т.д.)
- взаимодействовать с другими участниками.

Посредством исследовательских задач реализуются основные дидактические функции:

- открытие новых для обучающихся знаний (установление существенных свойств понятий; выявление математических закономерностей; отыскание доказательства математического утверждения и т.п.)
- углубление изучаемых знаний;
- систематизация изученных знаний (установление отношений между понятиями; выявление взаимосвязей; структурирование учебного материала и т.п.);
- развитие обучающегося, формирование у него самостоятельности к самоуправлению (самообразованию, самовоспитанию, самореализации);
- обучение способам познавательной деятельности.

### ***Модуль 5. Решение задач дистанционного плана.***

Данный модуль реализуется в течение всего года обучения, в рамках проведения олимпиад, конкурсов различного уровня. Координатором данного

направления является преподаватель – выполняющий функцию тьютора, педагог дополнительного образования участвуют в проведении непосредственно олимпиады, т.е. в момент выполнения заданий учащимися.

В приложении представлены положения олимпиад, в которых участвовали воспитанники и образцы заданий.

### ***Модуль 6. Научно-исследовательская работа или проект.***

На данном этапе состояние образования в России все острее обозначается проблема применения знаний. Отсюда все большее значение приобретает направление, предусматривающее участие учащихся в научно-исследовательской и научно-практической деятельности. Именно это направление и формирует у обучаемых умения и навыки практического применения теоретических знаний. Как ничто другое развивает мышление, логику, учит постановке целей, задач и поиску способов их достижения, с освоением различных методов. Все это приобретается на основе собственного опыта, что приводит к более глубокому осмыслению.

Цель научно-исследовательской работы состоит в развитии творческих способностей и повышении уровня научной подготовки учащихся на основе индивидуального подхода и усиления самостоятельной творческой деятельности, применения активных форм и методов обучения.

*Основными задачами научно-исследовательской работы являются:*

- формирование у обучаемых интереса к научному творчеству, обучение методике и способам самостоятельного решения научно-исследовательских задач;
- развитие творческого мышления и самостоятельности, углубление и закрепление полученных при обучении теоретических и практических знаний;
- выявление наиболее одаренных и талантливых учеников, использование их творческого и интеллектуального потенциала для решения актуальных задач.

*Работа состоит из нескольких этапов.*

1. Выбор актуальной темы – самый сложный этап.
2. Обсуждение выбранной темы, постановка цели, задачи и основные направления работы.
3. Обработка полученной информации.
4. Оформление работы.
5. Защита исследовательской работы
6. Более глубокий анализ работы.

Организация и дальнейшее развитие научно-исследовательской работы — одна из основных форм творческой работы с обучаемыми. Она требует применения современных информационных технологий, обеспечивающих доступ к необходимым профильным базам, банкам данных, источникам информации по теме исследования.

Главная функция современного учителя – управление процессом обучения, воспитания и развития личности ученика. Особую значимость сегодня приобретает именно организация научно-исследовательской

деятельности, так как она выступает фактором саморазвития, самоопределения, оказывает существенное влияние на личностно профессиональное становление.

С темой научно-исследовательской работы учащиеся определяют в начале учебного года и осуществляют работу над ней на протяжении всего периода обучения по программе дополнительного образования.

*Примерная тематика научных докладов, сообщений, научно-исследовательских работ: история математики, музей математики в школьном кабинете, статистика в повседневной жизни.*

## **VI. Учебно-методическое обеспечение**

Обучение несет деятельностный характер, акцент делается на обучение через практику, продуктивную работу учащихся в парах, малых группах, развитие самостоятельности учащихся и личной ответственности за принятие решения. Применяются на уроках элементы ИКТ- технологии, личностно-ориентированной технологии, технологии проблемного обучения, технологии проектного обучения.

Информационной базой программы служит обширный фонд задач различной степени сложности – от стандартных (базовых) до задач, предложенных в те или иные годы на различных этапах Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Применение ЭОР позволяет добиться принципа индивидуализации и дифференциации обучения, стимулировать разнообразную творческую деятельность учащихся, воспитывать навыки самоконтроля, привычки к рефлексии. Для формирования навыков к научно-исследовательской деятельности учащимся предлагаются задачи – исследования. Мультимедийная среда данных заданий организована таким образом, что более значимыми становятся наблюдение, разного рода эксперименты, математическое моделирование, конструирование.

### Необходимые средства и оборудование:

- классная доска,
- мел,
- персональные компьютеры;
- ксерокс;
- Интернет.

### Дидактический материал:

- лекционный материал;
- карточки с заданиями по модулям;
- карточки с текстами задач;
- памятка по олимпиадам, конкурсам;
- карточки с задачами-исследованиями;
- листы самоконтроля.

### **Список литературы для учителя и учащихся**

Список литературы приведен на страницах 46-47 методических рекомендаций.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ПРОВЕДЕНИЮ ЗАНЯТИЙ

### Лекция 1 (к занятиям 1-4). Отношение делимости. Деление с остатком.

**Делимость** - способность одного числа делиться на другое. Свойства делимости зависят от того, какие множества чисел рассматривают. Если рассматривают только целые положительные (натуральные) числа, то говорят, что одно число делится на другое (является кратным другому), если частное от деления первого числа на второе будет также целым числом.

**Определение.** Пусть  $a$  – целое число ( $a \in \mathbb{Z}$ ),  $b$  – натуральное число ( $b \in \mathbb{N}$ ). Говорят, что

$a$  делится на  $b$ , если существует целое число  $q$  ( $q \in \mathbb{Z}$ ) такое, что  $a = bq$ . При этом число  $b$  называется *делителем* числа  $a$  ( $a$  называют кратным  $b$ ), а число  $q$  – *частным* от деления  $a$  на  $b$  и пишут  $a \div b$  ( $a$  делится на  $b$ ) или  $a:b=q$ .

Само понятие делимости обязано своим существованием тому простому факту, что в множестве натуральных и целых чисел деление не всегда выполнимо.

Отношения «быть делимым» и «быть кратным» являются, согласно определению, взаимными, но сильно отличаются свойствами. Например, у любого числа  $a$  бесконечно много кратных: само число  $a$ ,  $2a$ ,  $3a$ , ...,  $na$ , а делителей лишь конечное число.

Перечислим свойства делимости на множестве натуральных чисел

1. Если  $a : c$  и  $c : b$ , то  $a : b$ .
2. Если  $a : b$  и  $c : b$ , то  $(a+c) : b$ . Если каждое из слагаемых делится на какое-то число, то и сумма их обязательно делится на это же число.
3. Если  $a : b$  и  $c$  не делится на  $b$ , то  $(a+c)$  не делится на  $b$ .

Свойства 2 и 3 распространяются на сумму любого конечного числа слагаемых следующим образом: если каждое слагаемое делится на число  $b$ , то и сумма делится на  $b$ ; если каждое слагаемое, кроме одного, делится на  $b$ , то сумма не делится на  $b$ .

4. Если  $a : b$  и  $(a+c) : b$ , то  $c : b$ .
5. Если  $a : b_1$  и  $c : b_2$ , то  $ac : b_1b_2$ .
6. Если  $a : b$  и  $c$  – любое натуральное число, то  $ac : bc$ ; если  $ac : bc$ , то  $a : b$ .
7. Если  $a : b$  и  $c$  – любое натуральное число, то  $ac : b$ .
8. Если  $a : b$  и  $c : b$ , то для любых натуральных чисел  $n$  и  $k$  справедливо соотношение  $(an + ck) : b$ .

Доказательства свойств 1-8

1. Запись  $a : c$  означает, что существует натуральное число  $q_1$ , такое, что выполняется равенство  $a=cq_1$ . Запись  $c : b$  означает, что существует натуральное число  $q_2$ , такое, что выполняется равенство  $c=bq_2$ . Следовательно,  $a=cq_1=(bq_2)q_1=b(q_2q_1)$ . Обозначим натуральное число  $q_2q_1$  буквой  $q$ . Тогда получим:  $a=bq$ , т. е.  $a : b$ .

3. Предположим противное, что  $(a + c) : b$ . Тогда  $a + c = bq_2$ , а из  $a : b$  следует, что  $a = bq_1$ , при этом  $q_2 > q_1$ . Значит,  $c = bq_2 - a = bq_2 - bq_1 = b(q_2 - q_1)$ . Это означает, что  $c : b$ . Но, по условию,  $c$  не делится на  $b$ . Получили противоречие, следовательно, наше предположение неверно, и  $a + c$  не делится на  $b$ .

8. Если  $a : b$  и  $c : b$ , то, по свойству 7,  $an : b$  и  $ck : b$ . Тогда, по свойству 2,  $(an + ck) : b$ .

**Теорема 1 (о делении с остатком).** Для любых  $a \in \mathbb{Z}$  и  $b \in \mathbb{N}$  существует единственная пара целых чисел  $q$  и  $r$  такая, что  $a = bq + r$ ,  $0 \leq r < b$ . Число  $r$  называется остатком от деления  $a$  на  $b$ , а  $q$  - неполным частным.

В качестве остатков от деления различных целых чисел на  $b \in \mathbb{N}$  могут получаться только числа  $0, 1, 2, \dots, b-1$ , и любое из этих чисел является остатком от деления на  $b$  какого-нибудь целого числа. Утверждение о представимости целого числа  $a$  в виде  $a = bq + r$  можно использовать при решении задач на делимость перебором возможных случаев.

**Задача 1.1.** Докажите, что ни при каком целом  $n$  число  $n^2 + 1$  не делится на 3.

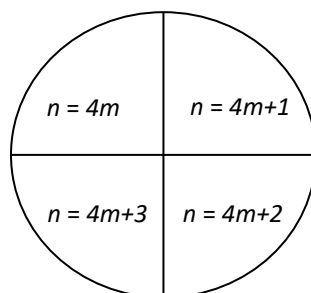
**Решение.** Число  $n$  представимо в одном из трех видов:  $n = 3q$ ,  $n = 3q + 1$ ,  $n = 3q + 2$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ . В этих случаях  $n^2 + 1$ , соответственно, имеет вид  $9q^2 + 1$ ,  $9q^2 + 6q + 2$ ,  $9q^2 + 12q + 8$ . Сразу видно, что остатки от деления этих чисел на 3 равны, соответственно, 1, 2, 2, т. е. во всех случаях остатки от деления  $n^2 + 1$  на 3 отличны от нуля. Значит,  $n^2 + 1$  на 3 не делится.

При делении натуральных чисел на 4, образуются подмножества натуральных чисел, делящихся на 4 с разными остатками. Изобразите схематично, как множество натуральных чисел и эти подмножества связаны между собой. Приведите примеры чисел из каждого подмножества.

Существуют ли натуральные числа, не входящие ни в одно из этих подмножеств.

**Ответ.**

Множество натуральных чисел разбивается на четыре



непересекающихся подмножества.

Натуральных чисел, не входящих ни в одно из этих подмножеств, нет.

**Основные свойства остатков:**

Пусть остаток от деления целого числа  $n_1$  на  $m$  равен  $r_1$ , а остаток от деления  $n_2$  на  $m$  равен  $r_2$ . Тогда:

1. Остаток от деления  $n_1 + n_2$  на  $m$  равен остатку от деления  $r_1 + r_2$  на  $m$ ;

2. Остаток от деления  $n_1 - n_2$  на  $m$  равен остатку от деления  $r_1 - r_2$  на  $m$ ;
3. Остаток от деления  $n_1 \times n_2$  на  $m$  равен остатку от деления  $r_1 \times r_2$  на  $m$ .

### **Признаки делимости. Четность, нечетность.**

Для выяснения, делится ли одно число на другое, всегда можно провести деление известным нам способом – «уголком». Но это занятие часто бывает долгим и утомительным, поэтому математики придумали некоторые специальные приемы для получения быстрого ответа на этот вопрос – признаки делимости.

#### **Признаки делимости чисел.**

**Признак делимости на 2.** Число делится на 2, если его запись оканчивается цифрой 0, 2, 4, 6, 8. Числа, которые делятся на 2 называются четными, соответственно, числа, которые на 2 не делятся, называются нечетными.

**Признак делимости на 5.** Число делится на 5, если его запись оканчивается цифрой 0 или 5.

**Признак делимости на 10.** Число делится на 10, если его запись оканчивается цифрой 0.

Вообще, если двумя последними цифрами записи числа являются нули, то число делится на 100, если три последние цифры записи числа нули, то на 1000 и т.д.

**Признак делимости на 3 и на 9.** Если сумма цифр числа делится на 3 (соответственно на 9), то число делится на 3 (соответственно на 9).

**Признак делимости на 4.** Число (содержащее не менее трех цифр) делится на 4 тогда и только тогда, когда двузначное число, образованное его двумя последними цифрами, делится на 4.

Доказательство. Пусть  $s$  - число, образованное двумя последними цифрами числа  $p$ . Тогда число  $p$  можно представить в виде  $100a + s$ . Так как  $100a : 4$ , то, по свойствам 2 и 4,  $(100a + s) : 4$  тогда и только тогда, когда  $s : 4$ .

**Признак делимости на 8.** Число (содержащее не менее трех цифр) делится на 8 тогда и только тогда, когда трехзначное число, образованное его тремя последними цифрами делится на 8.

**Признак делимости на 25.** Число (содержащее не менее трех цифр) делится на 25 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на 00, 25, 50 или 75.

Например, число 163550 делится на 25, так как число 50 делится на 25, а число 8537 не делится на 25, так как 37 не делится на 25. Таким образом, выяснить делится или не делится число на 2, на 4, на 5, на 8, на 10 и на 25 можно по последним цифрам в записи числа.

**Признак делимости на 7, 11 и 13.** Число делится на 7, 11 или 13 тогда и только тогда, когда разность между числом, выраженным его тремя последними цифрами, и числом, выраженным остальными цифрами (или наоборот), делится соответственно на 7, 11 или на 13.

Например, число 48916 делится на 7, так как разность  $916 - 48 = 868$  делится на 7 (делимость 868 на 7 проверить намного легче). Число 253264 делится на 11, так как разность  $264 - 253 = 11$ , очевидно, делится на 11. Число 253264 не делится ни на 7, ни на 13, так как разность  $264 - 253 = 11$ , очевидно, не делится ни на 7, ни на 13. Число 1208965 не делится на 11, так как разность  $1208 - 965 = 243$  не делится на 11, что легко проверить. (Обратите внимание, что данное число семизначное, следовательно, вычитание соответствующих чисел по признаку осуществляется наоборот).

**Признак делимости на 11 (другая формулировка).** Целое число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа, стоящих на четных местах, и сумма цифр этого числа, стоящих на нечетных местах, дают одинаковые остатки при делении на 11.

**Признак делимости на 125.** Для того чтобы число  $p$ , содержащее не менее четырех цифр, делилось на 125, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 125 число, образованное тремя последними цифрами числа  $p$ .

Полезно помнить и следующие **свойства делимости** чисел.

1. Если уменьшаемое и вычитаемое делится на какое-нибудь число, то и разность разделится на это же число.
2. Если только одно из чисел – уменьшаемое или вычитаемое – делится на какое-нибудь число, а другое не делится, то и разность не делится на это же число.
3. Если хоть один из сомножителей делится на какое-нибудь число, то и произведение их также разделится на это число.

**Теорема (о делимости на произведение взаимно простых чисел).** Если числа  $a$ ,  $b$  – взаимно простые (то есть не имеют общих делителей) и данное число  $c$  делится на каждое из этих чисел, то оно делится на произведение этих чисел.

Например, число 312 делится на 2 (последняя цифра 2) и на 3 (сумма цифр делится на 3), и, следовательно, на 6.

Целое число, делящееся на 2, называют **четным**, а целое число, не делящееся на 2, называют **нечетным**. Четное число можно представить в виде  $n=2k$ , а нечетное число в виде  $n=2k+1$ , где  $k$  – некоторое целое число.

Два целых числа называются числами одинаковой четности, если оба они четные или нечетные. Два целых числа называются числами разной четности, если одно из них четное, а другое нечетное.

Рассмотрим решение нескольких задач на признаки и свойства делимости.

**Задача 2.1** Петя купил общую тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал все ее страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могло ли у него получиться 1990?

**Решение:** На каждом листе сумма номеров страниц нечетна, а сумма 25 нечетных чисел – нечетна.



**Задача 2.2.** Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 45 045?

**Решение.** Если нечетное число 45045 разложено на целые множители  $(x - y)$ ,  $x$  и  $y$ , то все эти множители нечетны, ибо нечетное число не может делиться на четное. Но если числа  $x$  и  $y$  нечетны, то их разность  $(x - y)$  четна.

**Задача 2.3.** Найти все пятизначные числа вида  $517mn$  ( $n, m$  - цифры), которые делятся на 18.

**Решение.** Из того, что  $18 = 9 \cdot 2$  получаем, что число  $517mn$  должно делиться на 9 и на 2. Из признака делимости на 2 следует, что  $n$  - четная цифра, т.е.  $n = 0, 2, 4, 6, 8$ . Пусть  $n = 0$ , и числа имеют вид  $517m0$ . Из признака делимости на 9 следует делимость суммы  $0 + m + 7 + 1 + 5$  на 9. Следовательно,  $m$  может быть равным только 5. Получили число 51750. Пусть  $n = 2$ , и числа имеют вид  $517m2$ . Из признака делимости на 9 следует делимость суммы  $2 + m + 7 + 1 + 5 + m$  на 9. Следовательно,  $m$  может принимать только значение 3 и получается число 51732. Рассмотрев остальные варианты, аналогично находим остальные числа: 51714, 51786, 51768.

Ответ: 51750, 51732, 51714, 51786, 51768.

#### **НОК и НОД. Алгоритм Евклида.**

**Общим делителем нескольких чисел** называется число, на которое все данные числа делятся без остатка. Например, числа 1, 2, 3, 4, 6, 12 являются общими делителями для чисел 36 и 24, а числа 14 и 15 имеют только один общий делитель – 1.

Для двух и более чисел среди всех их общих делителей существует наибольший, называемый наибольшим общим делителем (НОД). Например,  $\text{НОД}(48, 36, 24) = 12$ .

Если наибольший общий делитель двух чисел равен единице, то числа называются **взаимно простыми**. Например,  $\text{НОД}(16, 27) = 1$ , значит, 16 и 27 – взаимно простые числа.

**Общим кратным** данных чисел называется любое натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел (без остатка). Например, числа 18, 12, 6, 120, 60 являются общими кратными для чисел 2 и 3.

**Наименьшим общим кратным** нескольких чисел называется наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел. Например, 6 – наименьшее общее кратное для 2 и 3.

Обратим внимание, что

$$\text{НОК}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)}$$

Обычно НОД и НОК нескольких чисел находят, используя разложения чисел на простые множители. НОД равен произведению множителей, входящих в каждое разложение; НОК – произведению всех множителей, входящих хотя бы в одно разложение.

Рассмотрим множество делителей числа 20 и множество делителей числа 30:

$$D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}, D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}.$$

Найдем пересечение этих множеств.

$$D(20) \cup D(30) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 15, 30\}, \text{ а } D(20) \cap D(30) = \{1, 2, 5, 10\}.$$

НОД  $(20, 30) = 10$ , то есть НОД нескольких чисел – это наибольший элемент из пересечения множеств делителей этих чисел.

Отметим, что

$$\text{НОД}(a; b) = \text{НОД}(a; a+b)$$

$$\text{НОД}(a; b) = \text{НОД}(a; a-b)$$

**Теорема 2.** Если  $d$  - общий делитель чисел  $a$  и  $b$ , то  $K = \frac{ab}{d}$  - общее

кратное этих чисел.

**Доказательство:** Из условия теоремы  $a \div d$  и  $b \div d$  следует, что  $a = a_1 d$  и  $b = b_1 d$ ,  $a_1, b_1$  - натуральные числа. Откуда,  $K = a_1 d b_1 = a b_1 = b a_1$ , т. е.  $K \div a$  и  $K \div b$ . Значит,  $K$  - общее кратное чисел  $a$  и  $b$ .

НОД можно находить непосредственным перебором, а можно использовать разложение на простые множители.

Существует другой способ для вычисления НОД двух чисел – *алгоритм Евклида*, который особенно удобен, если числа большие.

Он основан на лемме.

**Лемма.** Пусть  $a, b \in \mathbb{N}$  и  $r$  - остаток от деления  $a$  на  $b$ . Тогда  $D(a, b) = D(b, r)$ .

Утверждение леммы позволяет при отыскании НОД двух чисел  $a$  и  $b$ ,  $a > b > 0$  перейти от пары  $(a, b)$  к “меньшей” паре  $(b, r)$ . Алгоритм Евклида как раз и состоит в последовательном применении леммы. При повторном применении леммы уже к паре  $(b, r)$ , находим  $r_1$  - остаток от деления  $b$  на  $r$  и получаем пару  $(r, r_1)$ ,  $r_1 < r$  такую, что

$D(r, r_1) = D(b, r) = D(a, b)$ . Далее делим  $r$  на  $r_1$ , получаем остаток  $r_2 < r_1$  и т.д. А так как остатки не могут бесконечно убывать (ведь они неотрицательны), то процесс этот должен оборваться на каком-то шаге: при делении некоторого остатка  $r_{n-1}$  на  $r_n$  получится остаток, равный 0, т. е.  $r_{n-1} = r_n q$ . Таким образом, если мы по приведенной схеме будем шаг за шагом проводить деление с остатком, то последний отличный от нуля остаток и будет НОД чисел  $a$  и  $b$ .

**Пример 1.** Найти НОД и НОК чисел 1998 1014.

**Решение.** Делим 1998 на 1014:  $1998 = 1014 \cdot 1 + 984$ ,  $r = 984$ .

Делим 1014 на 984:  $1014 = 984 \cdot 1 + 30$ ,  $r_1 = 30$ .

Делим 984 на 30:  $984 = 30 \cdot 32 + 24$ ,  $r_2 = 24$ .

Делим 30 на 24:  $30 = 24 \cdot 1 + 6$ ,  $r_3 = 6$ .

Делим 24 на 6:  $24 = 6 \cdot 4 + 0$ ,  $r_4 = 0$ .

$\text{НОД}(1998, 1014) = 6$ .

$$\text{НОК}(1998, 1014) = \frac{1998 \cdot 1014}{D(1998, 1014)} = \frac{1998 \cdot 1014}{6} = 337662.$$

**Задача.** Сократима ли дробь  $\frac{12n+1}{30n+2}$  при каком-нибудь  $n \in \mathbb{N}$ ?

**Решение.** Для того, чтобы дробь была сократима, нужно, чтобы и числитель и знаменатель ее имели общий множитель, отличный от  $\pm 1$ . Найдем  $\text{Д}(12n+1, 30n+2)$ . Для этого воспользуемся алгоритмом Евклида. Делим  $30n+2$  на  $12n+1$ :  $30n+2=(12n+1) \cdot 2+6n$ ,  $r=6n$ . Теперь делим  $12n+1$  на  $6n$ :  $12n+1=6n \cdot 2+1$ ,  $r_1=1$ . Ясно, что  $(6n) : 1$  и  $r_2=0$ , т. е.  $\text{Д}(12n+1, 30n+2)=$   
 $\frac{12n+1}{30n+2}$   
 $r_1=1$ . Это означает, что дробь  $\frac{12n+1}{30n+2}$  не сократима ни при каком  $n \in \mathbb{N}$ .

Алгоритм Евклида может быть применен и в геометрии; наиболее известное его применение – к задаче отыскания наибольшей общей меры отрезков  $a$  и  $b$ , т. е. отрезка  $q$ , целое число раз укладывающегося в  $a$  и в  $b$ .

На отрезке  $a > b$  откладываем отрезок  $b$  столько раз, сколько это возможно. Получаем «остаток»  $r$ ; на отрезке  $b$  откладываем, пока это возможно, отрезок  $r$ . Получаем «остаток»  $r_1$ ; на отрезке  $r$  откладываем отрезок  $r_1$ , пока это возможно. Получаем «остаток»  $r_2$  и т.д. Правда для отрезков (длины которых не целые числа) может случиться, что процесс никогда не кончится, а будет продолжаться бесконечно (никогда не получится «остаток» равный нулю). Это произойдет в том случае, когда отрезки  $a$  и  $b$  несоизмеримы (не имеют общей меры), как, например, диагональ квадрата и его сторона. Но если описанный выше процесс заканчивается на  $n$ -ом шаге, то последний, неравный нулю, «остаток» даст наибольшую общую меру отрезков  $a$  и  $b$ .

### **Простые числа. Разложение числа на простые множители.**

**Определение.** Натуральное число  $a$ ,  $a > 1$  называется **простым**, если оно имеет только два различных делителя: единицу и само число  $a$ .

**Определение.** Натуральное число  $a > 1$  называется **составным**, если оно не является простым.

Например, простыми числами являются числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и т.д.

Внимание! Число 1 не является простым и не является составным.

Для того, чтобы определить, что число является составным, достаточно обнаружить у него хотя бы один делитель. Например, поскольку  $12869568 \div 2$ , то сразу можно сказать, что это число составное. Напротив, чтобы утверждать, что некоторое число  $n$  – простое, следует доказать, что у него нет ни одного делителя. Это может оказаться совсем не простой задачей.

Следующие теоремы позволяют резко сократить необходимое число проверок.

**Теорема** Наименьший, отличный от 1, делитель натурального числа  $n > 1$  есть простое число.

**Следствие.** Всякое натуральное число, отличное от 1, имеет хотя бы один простой делитель.

**Теорема.** Наименьший простой делитель  $p$  составного числа  $n$  удовлетворяет условию:

$$p^2 \leq n$$

**Доказательство:** Пусть  $p$  – наименьший делитель  $n$ , отличный от 1. Тогда  $n = pq$ ,  $pq \leq q$  и по теореме 1:  $p$  – простое число. Умножая обе части неравенства на  $p$ , получим,

$$p^2 \leq pq = n, \text{ т. е. } p^2 \leq n.$$

**Теорема.** Если  $p$  – простое число, то любое натуральное число  $n$  либо взаимно простое с  $p$ , либо делится на  $p$ .

Благодаря теоремам, мы можем сократить себе работу по проверке простоты числа  $n$ , проверяя его делимость (или ее отсутствие) лишь на простые числа, квадрат которых не превосходит  $n$ . Например, для числа 119 следует проверить, не делится ли оно на 2, 3, 5, 7. Следующее простое число 11 таково, что  $11^2=121>119$ . ( $119=7 \cdot 17$  – не простое).

Чтобы найти последовательность простых чисел, пользуются алгоритмом, который называется решето Эратосфена:

1. Выписываем ряд натуральных чисел:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, ...

2. Зачеркиваем числа, кратные числу 2 – каждое второе число после 2:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, ...

3. Зачеркиваем числа, кратные числу 3 – каждое третье число после 3:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, ...

4. Зачеркиваем числа, кратные числу 5 – каждое пятое число после 5:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, ...

И так далее. Числа, которые остаются незачеркнутыми – простые:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, ...

**Теорема (о бесконечности множества простых чисел).**

*Простых чисел бесконечно много.*

**Доказательство.** Предположим противное: простых чисел конечное число. Пусть это числа  $p_1, p_2, \dots, p_n$  (и других простых чисел нет). Рассмотрим число  $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ .

Оно не делится ни на одно из чисел  $p_k, k = \overline{1, n}$  (дает при делении на  $p_k$  остаток 1). Но по теореме число из  $N$  имеет простой делитель  $p$ , отличный от чисел  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . А это противоречит нашему предположению о том, что других простых чисел, кроме  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , нет.

**Теорема (о делимости произведения).** Если  $(ab) \div c$  и  $\text{Д}(ac) = 1$ , то  $b \div c$  ( $a, b, c \in \mathbb{N}$ ).

**Следствие 1.** Если произведение  $ab$  натуральных чисел  $a$  и  $b$  делится на простое число  $p$ , то хотя бы один из сомножителей делится на  $p$ .

**Следствие 2.** Если произведение любого количества натуральных чисел делится на простое число  $p$ , то по крайней мере один из сомножителей делится на  $p$ .

**Следствие 3.** Если произведение простых чисел делится на данное число  $p$ , то один из сомножителей равен  $p$ .

**Основная теорема арифметики.** Любое натуральное число, большее единицы, можно представить в виде произведения простых сомножителей, причем единственным способом. При разложении числа на простые множители пользуются признаками делимости.

**Пример 4.** Разложить число 4356 на простые множители.

**Решение:** Применим признаки делимости. Последняя цифра записи числа - четная, разделим число на 2. Будем делить на 2, пока возможно делить нацело.

Число 1089 на 2 уже не делится, но делится на 3 (сумма цифр числа равна 18). Будем делить на 3, пока это возможно.

121 делится на 11.

Итак,  $4356 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2$

$$\begin{array}{r|l} 4356 & 2 \\ \hline 2178 & 2 \\ \hline 1089 & 3 \\ \hline 363 & 3 \\ \hline 121 & 11 \\ \hline 11 & 11 \end{array}$$

Это равенство называется разложением числа 4356 на простые множители.

Разложение на простые множители широко применяется при решении самых разных задач.

Запись числа в виде произведения степеней в порядке возрастания их оснований называется **каноническим разложением числа**:  
 $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}, p_1 < p_2 < \dots < p_n, k_1 \geq 1, k_2 \geq 1, \dots, k_n \geq 1$

**Утверждение.** Для того, чтобы число  $d = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_n^{m_n}$  было делителем числа  $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$ , необходимо и достаточно, чтобы  $m_i \leq k_i, i = \overline{1, n}$ .

## Занятие 1. «Отношение делимости в $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ . Деление с остатком»

УЭ	Учебный материал с указанием заданий	Руководство по освоению материала
УЭ О	<p><b>Интегрирующая цель:</b></p> <p>Систематизировать знания об операции деления во множествах натуральных и целых чисел.</p> <p>Обеспечить усвоение учащимися отношений «быть делимым», «быть кратным», свойств делимости, доказательства некоторых из них, теоремы о делении с остатком. Актуализировать знания учащихся на отношение делимости.</p> <p>Овладеть умением решать задачи на делимость чисел.</p>	Ознакомьтесь с материалами файла «Лекция», с листом самоконтроля.
УЭ-1	<p>Входное тестирование.</p> <p><i>Цель:</i> определить те виды вопросов, которые</p>	<u>Форма работы индивидуальная.</u>

	<p>вызывают наибольшие затруднения у учащихся. Выявить степень усвоения учащимися учебного материала.</p> <p><b>Входное тестирование</b> проходит в виде математического диктанта. Всем ученикам предлагается один общий вариант. Качество выполнения проверяется по эталону соседом и, если есть необходимость, ученики получают консультацию учителя. Запишите количество баллов в листок самоконтроля.</p>	<p>Найдите файл «Тест 1». Выполняя задания, вносите ответы в соответствующие столбцы таблицы.</p> <p><u>Проверка – парная, взаимоконтроль</u></p> <p>Обменяйтесь с соседом заполненными листами «Тест 1», возьмите у учителя ответы для взаимопроверки. Каждый верный ответ – 1 балл. Подсчитайте количество баллов.</p> <p>Обменяйтесь проверенными листами. Заполните таблицу в листе самоконтроля.</p>
УЭ-2	<p><b>Цель:</b> усвоить теорему о делении с остатком, и научиться применять ее при решении задач.</p> <p>2.1. Запишите дату и тему урока в тетрадь.</p> <p>2.2. Прочитайте по теоретическому материалу теорему о делении с остатком.</p> <p>2.3. Выполните <b>задачу 1</b>. Представьте себе автомат, который разменивает данную ему сумму монетами по 5 руб, а когда остаток становится меньше 5 рублей, отдает его. С математической точки зрения этот автомат выполняет деление на 5 с остатком. Можно ли равенства а) <math>19=3\cdot 5+4</math> б) <math>20=3\cdot 4+8</math> принимать за запись деления с остатком? Выполните <b>задачу 2</b>. Напишите формулу для чисел, дающих при делении на 4 остаток: а) 0; б) 1; в) 2. Прочитайте решение <b>задачи 1.1</b> в тексте лекции. Самостоятельно выполните <b>задачу 3</b>. Докажите, что разность квадрата нечетного числа и единицы кратна четырем.</p>	<p><u>Работа индивидуальная.</u></p> <p>Внимательно прочтите теоретический материал.</p> <p><u>Самоконтроль.</u></p> <p>Проверьте свои решения с решениями в листе «Задачи».</p> <p><b>Задача 1.</b> За оба правильных ответа – 2 б, за один – 1б.</p> <p><b>Задача 2.</b> За все правильные формулы – 2 б, с одной ошибкой – 1б.</p> <p><b>Задача 3.</b> За верное доказательство – 2б.<sup>1</sup></p> <p><i>Будьте честными!!!</i></p>
УЭ-3	<p><b>Цель:</b> усвоить свойства делимости чисел и их доказательства, самостоятельно доказать некоторые из них.</p> <p>3.1. Прочитайте по теоретическому материалу восемь свойств делимости чисел.</p> <p>3. 2. Прочитайте доказательство свойства 1.</p> <p>3. 3. Выпишите в тетрадь свойство 2 и его доказательство, в котором сами заполните пропуски.</p>	<p>Внимательно прочтите теоретический материал.</p> <p><u>Работа индивидуальная.</u></p> <p><u>Проверка индивидуальная - самоконтроль.</u></p> <p>Проверьте свои решения с решениями в листе «Задачи».</p> <p><u>Оценка:</u> За каждое правильное</p>

	<p><b>Доказательство свойства 2.</b> Так как <math>a : b</math>, то существует число <math>q_1</math>, такое, что выполняется равенство _____. Так как <math>c : b</math>, то существует число _____, такое, что выполняется равенство <math>c = bq_2</math>. Тогда <math>a + c = bq_1 + \_\_\_\_\_\_ = b(q_1 + q_2)</math>. Обозначим число <math>q_1 + q_2</math> буквой <math>q</math>. Тогда получим, что, <math>a + c = \_\_\_\_\_\_</math>, т. е. <math>(a + c) : b</math>.</p> <p>3. 4. Приведите доказательство свойства 5 или 7 самостоятельно.</p> <p>3. 5. Проверьте правильность своих рассуждений по прилагаемому образцу из файла «Задачи урока1».</p> <p>Свойство 3 доказывается <b>методом от противного</b>.</p> <p>3. 6. Прочитайте доказательство в теоретическом материале. Попробуйте доказать аналогично свойство 4.</p>	<p>заполнение пропуска в доказательстве свойства 2 - 1 балл (всего 4 балла).</p> <p>За каждое правильно доказанное свойство 5 или 7, 4 – 2 балла.</p> <p>Если в вашем доказательстве есть ошибки, то по 1 баллу. Если не смогли доказать – 0 баллов.</p> <p>Запишите количество баллов в листок самоконтроля.</p>
УЭ-4	<p><b>Цель:</b> овладеть умением решать нестандартные задачи, используя изученный материал.</p> <p>4. 1. Решите <b>задачу 4</b>. Сколько воскресений может быть в году? <b>Вопросы:</b> Сколько дней в году? Сколько дней в неделе?</p> <p>4. 2. Решите <b>задачу 5</b>. Среди любых шести целых чисел найдутся два числа, разность которых делится на 5. Докажите это.</p>	<p>Внимательно прочтите задачи. <u>Работа индивидуальная.</u></p> <p>Ответьте на направляющие вопросы. Попробуйте решить задачи самостоятельно.</p> <p><u>Проверка – индивидуальная, самоконтроль.</u></p> <p>Проверьте свои решения с решениями в листе «Задачи».</p> <p><u>Оценка:</u> За каждый правильный ответ 1 балл Запишите количество баллов в листок самоконтроля.</p>
УЭ-6	<p>Выходной контроль.</p> <p><b>Цель:</b> оценить степень достижения целей урока.</p> <p><u>Выполнить тестовое задание</u></p> <p>Проверьте правильность выполнения задания по эталону.</p>	<p>Проверка – индивидуальная самоконтроль.</p> <p>Найдите файл «Тест 2».</p> <p>Возьмите у учителя ответы для проверки.</p> <p>Подсчитайте количество набранных баллов за выполненный тест.</p> <p>Запишите количество баллов в листок самоконтроля.</p>
УЭ-7	<p><b>Цель:</b> подведение итогов урока, оценка себя и своей работы с учетом оценки окружающих.</p> <p>Посчитайте общее число баллов и запишите в листок самоконтроля.</p> <p>Поставьте себе соответствующую оценку.</p> <p>35 – 31 ОТЛИЧНО 30 – 24 ХОРОШО</p>	<p>Найдите файл «Лист самоконтроля»</p> <p>Проверка – индивидуальная самоконтроль.</p> <p>Посчитайте общее количество баллов полученных вами за урок.</p> <p>Максимально – 35 баллов.</p>

	23 – 18 УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО	Поставьте себе оценку за урок, используя критерии оценок.
УЭ-8	<p>Рефлексия.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– обозначает «Да, я все понял»</li> <li>– обозначает «Я сомневаюсь, что все понял»</li> <li>– обозначает «Я совсем ничего не понял»</li> </ul> <p>Подумайте, отметьте в листе самоконтроля наиболее близкий для вас ответ и по окончании урока сдайте свои материалы с листами самоконтроля.</p>	

## **Занятие 2. «Признаки делимости. Четность, нечетность»**

УЭ	Учебный материал с указанием заданий	Руководство по освоению материала
УЭ 0	<p><b>Интегрирующая цель:</b></p> <p>Систематизировать знания учащихся о признаках и свойствах делимости чисел.</p> <p>Обеспечить усвоение учащимися понятий четность, нечетность.</p> <p>Овладеть умением решать задачи на делимость чисел, используя признаки делимости, четность. <i>Показать решение нестандартных задач.</i></p>	<p>Ознакомьтесь с материалами файла «Лекция», с листом самоконтроля.</p>
УЭ-1	<p>Входное тестирование.</p> <p><i>Цель:</i> выявить уровень исходных знаний по теме, выявить степень усвоения учащимися учебного материала предыдущего занятия.</p> <p><b>Входное тестирование</b> проходит в виде математического диктанта. Всем ученикам предлагается один общий вариант.</p> <p>Качество выполнения проверяется по эталону если есть необходимость, ученики получают консультацию учителя.</p> <p>Запишите количество баллов в листок самоконтроля.</p>	<p>Найдите файл «Тест 1».</p> <p>Выполняя задания, ответьте на вопросы.</p> <p><u>Проверка – индивидуальная, самоконтроль.</u></p> <p>Возьмите у учителя ответы для проверки. Каждый верный ответ – 1 балл. Если, там где необходимо, приведены правильные примеры – еще 2 б.</p> <p>Подсчитайте количество баллов.</p> <p>Заполните таблицу в листе самоконтроля.</p>
УЭ-2	<p><b>Цель:</b> повторить признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10, изучить признаки делимости на 4, 7, 8, 11, 13, 25, 125.</p> <p>2.1. Прочитайте по теоретическому материалу признаки делимости.</p> <p>2.2. Выполните <i>задачу 1</i>.</p> <p>Найдите наибольшее четырехзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 5, 9 и 11.</p>	<p><u>Работа индивидуальная.</u></p> <p>Внимательно прочтите теоретический материал.</p> <p><u>Самоконтроль.</u></p> <p>Проверьте свои решения с решениями в листе «Задачи». За верно решенную первую задачу – 1б.</p>



	<p>Выполните <b>задачу 2</b>. Найдутся ли хотя бы три десятичных числа, делящиеся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?</p>	<p>За правильный ответ и подробное решение во второй задаче – 2б. Если приведен только ответ – 1б. Поставьте баллы в лист самоконтроля. <i>Будьте честными!!!</i></p>																				
УЭ-3	<p><b>Цель:</b> усвоить понятие четности, научиться решать задачи, используя четность.</p> <p>3.1. Прочитайте по теоретическому материалу понятие «четность», запишите формулы четного и нечетного чисел. Заполните таблицу</p> <table><tr><td>1 число</td><td>2 число</td><td>Сумма</td><td>Разность</td><td>Произведение</td></tr><tr><td>четно</td><td>четно</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>четно</td><td>нечетно</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>нечетно</td><td>нечетно</td><td></td><td></td><td></td></tr></table> <p>Докажите, что сумма двух нечетных чисел четна.</p> <p>3. 2. Прочитайте решение задачи 2.1 с использованием понятия «четность».</p> <p>3. 3. Решите самостоятельно <b>задачу 3</b>. Парламент состоит из двух одинаковых палат. В голосовании участвовали все депутаты, причем воздержавшихся не было. Когда объявили, что решение принято с преимуществом в 23 голоса, лидер оппозиции заявил, что результаты голосования фальсифицированы. Как он это понял?</p>	1 число	2 число	Сумма	Разность	Произведение	четно	четно				четно	нечетно				нечетно	нечетно				<p>Внимательно прочтите теоретический материал. <u>Работа индивидуальная.</u></p> <p><u>Проверка индивидуальная - самоконтроль.</u> Проверьте свои решения с решениями в листе «Задачи».</p> <p>За каждую верно заполненную строку – 1б. Если таблица заполнена правильно – 3б, за доказательство – 2б. За верно решенную задачу – 1б.</p> <p>Запишите количество баллов в листок самоконтроля.</p>
1 число	2 число	Сумма	Разность	Произведение																		
четно	четно																					
четно	нечетно																					
нечетно	нечетно																					
УЭ-4	<p><b>Цель:</b> овладеть умением решать нестандартные задачи, используя изученный материал В олимпиадах различного уровня встречаются задачи, которые решаются с помощью признаков делимости, четности.</p> <p>4. 1. Решите <b>задачу 4</b>. Из любых трех целых чисел можно выбрать два, сумма которых четна. Докажите это.</p> <p>Решите <b>задачу 5</b>. Доказать, что квадрат четного числа делится на 4, а квадрат нечетного числа имеет вид <math>4p + 1</math>, где <math>p \in \mathbb{N}</math>.</p> <p>Решите <b>задачу 6</b>. Найдите трехзначное натуральное число, большее 500, которое при делении на 4, на 5 и на 6 дает в остатке 2, и в записи которого есть только две различные цифры. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.</p> <p>Решите <b>задачу 7</b>. Когда солдаты строились в</p>	<p>Внимательно прочтите задачи. Попробуйте решить задачи самостоятельно.</p> <p><u>Проверка – индивидуальная, самоконтроль.</u></p> <p>Проверьте свои решения с решениями в листе «Задачи». <u>Оценка:</u> За каждый правильный ответ 1 балл. За правильно выполненное доказательство 2 б, доказательство с ошибкой 1б. Запишите количество баллов в листок самоконтроля.</p>																				

	колонну по 4, по 5 или по 6, каждый раз один оставался лишним, а когда построились в колонну по 7, лишних не осталось. Сколько было солдат?	
УЭ-6	Выходной контроль. <i>Цель:</i> оценить степень достижения целей урока. <u>Выполнить тестовое задание</u> Проверьте правильность выполнения задания по эталону, показанному на экране. Запишите количество баллов в листок самоконтроля.	Проверка – индивидуальная самоконтроль. Выполнение теста, файл «Тест 2». Подсчитайте количество набранных баллов за выполненный тест. Запишите количество баллов в листок самоконтроля.
УЭ-7	<i>Цель:</i> подведение итогов урока, оценка себя и своей работы с учетом оценки окружающих. Посчитайте общее число баллов и запишите в листок самоконтроля. Поставьте себе соответствующую оценку. 31 – 35 ОТЛИЧНО 24 – 30 ХОРОШО 18 – 23 УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО	Проверка – индивидуальная самоконтроль. Посчитайте общее количество баллов полученных вами за урок. Максимально – 35 баллов. Поставьте себе оценку за урок, используя критерии оценок.
УЭ-8	Рефлексия. – обозначает «Да, я все понял» – обозначает «Я сомневаюсь, что все понял» – обозначает «Я совсем ничего не понял» Подумайте, отметьте в листе самоконтроля наиболее близкий для вас ответ и по окончании урока сдайте свои материалы с листами самоконтроля.	

### Занятие 3. «НОД и НОК. Алгоритм Евклида».

УЭ	Учебный материал с указанием заданий	Руководство по освоению материала
УЭ 0	<b>Интегрирующая цель:</b> Систематизировать знания о НОК, НОД. Обеспечить усвоение учащимися понятий «делитель», «кратное», «наибольший общий делитель», «наименьшее общее кратное», «взаимно простые числа». Разобрать способ нахождения НОД с помощью алгоритма Евклида. Овладеть умением решать задачи на делимость чисел. <i>Показать решение нестандартных задач.</i>	Ознакомьтесь с материалами файла «Лекция», с листом самоконтроля.
УЭ-1	<b>Входное тестирование.</b> <i>Цель:</i> выявить уровень исходных знаний по теме, выявить степень усвоения учащимися учебного материала предыдущего занятия.	<u>Форма работы индивидуальная.</u> Найдите файл «Тест 1». Выполняя задания, вносите ответы в соответствующие столбцы

	<p><b>Входное тестирование</b> проходит в виде математического диктанта. Всем ученикам предлагается один общий вариант.</p> <p>Качество выполнения проверяется по эталону соседом и, если есть необходимость, ученики получают консультацию учителя.</p> <p>Запишите количество баллов в листок самоконтроля.</p>	<p>таблицы.</p> <p><u>Проверка</u> – <u>парная, взаимоконтроль</u></p> <p>Обменяйтесь с соседом заполненными листами «Тест 1», возьмите у учителя ответы для взаимопроверки. Каждый верный ответ – 1 балл. Подсчитайте количество баллов.</p> <p>Обменяйтесь проверенными листами. Заполните таблицу в листе самоконтроля.</p>
УЭ-2	<p><b>Цель:</b> усвоить свойства НОД и НОК, теорему о делимости на произведение взаимно простых чисел.</p> <p>2.1. Запишите дату и тему урока в тетрадь.</p> <p>2.2. Прочитайте по теоретическому материалу теорему о делимости на произведение взаимно простых чисел.</p> <p>2.3. Выполните <b>задачу 1</b>.</p> <p>К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.</p> <p>Выполните <b>задачу 2</b>. Найти все пары натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 78, а наибольший общий делитель равен 13.</p>	<p><u>Работа индивидуальная.</u></p> <p>Внимательно прочтите теоретический материал.</p> <p><u>Самоконтроль.</u></p> <p>Проверьте свои решения с решениями в листе «Задачи».</p> <p>Каждая верно решенная задача – 2 балла. Поставьте баллы в лист самоконтроля.</p> <p><i>Будьте честными!!!</i></p>
УЭ-3	<p><b>Цель:</b> изучить алгоритм Евклида, научиться применять его при решении задач.</p> <p>3.1. Прочитайте по теоретическому материалу алгоритм Евклида, выпишите в тетрадь алгоритм Евклида</p> <p>3. 2. Прочитайте решение задачи на нахождение НОД и НОК. Решите <b>задачу 3</b> самостоятельно.</p> <p>Найдите НОД и НОК чисел 15283 и 10013.</p> <p>3. 3. Заполните пропуски в решении <b>задачи 4</b>.</p> $\frac{19043}{20413}$ <p>Установите, является ли дробь сократимой, и если является, то сократите ее.</p> <p><b>Решение.</b> Сокращение дробей - это, по сути, задача на нахождение НОД числителя и знаменателя. Имеем: <math>20413 = 1 \cdot 19043 + \underline{\hspace{1cm}}</math>,</p> $19043 = 13 \cdot \underline{\hspace{1cm}} + 1233,$	<p>Внимательно прочтите теоретический материал.</p> <p><u>Работа индивидуальная.</u></p> <p><u>Проверка индивидуальная - самоконтроль.</u></p> <p>Проверьте свои решения с решениями в листе «Задачи».</p> <p><u>Оценка:</u></p> <p>За правильное заполнение пропусков в задаче 4 - 2 балла, заполнение с ошибками – 1 б.</p> <p>За решение задачи 3 – 2 б.</p> <p>За решение задачи 5 – 2 б.</p> <p>Запишите количество баллов в листок самоконтроля.</p>

	<p> <math>1370 = 1 \cdot 1233 + \underline{\hspace{1cm}}</math>,  <math>1233 = 9 \cdot \underline{\hspace{1cm}}</math>. </p> <p>Итак, НОД (20413; 19043) = <math>\underline{\hspace{1cm}}</math>. Далее надо числитель и знаменатель дроби сократить на это число, следовательно, произвести дважды операцию деления, при этом могут быть допущены ошибки. Гораздо проще «вернуться» по схеме алгоритма и выразить каждое из чисел через НОД.</p> <p>Имеем: <math>1233 = \underline{\hspace{1cm}} \cdot 137</math>,</p> <p><math>1370 = \underline{\hspace{1cm}} \cdot 137 + 137 = 10 \cdot 137</math>,</p> <p><math>19043 = 13 \cdot 10 \cdot 137 + \underline{\hspace{1cm}} \cdot 137 = 139 \cdot 137</math>,</p> <p><math>20413 = 1 \cdot \underline{\hspace{1cm}} \cdot 137 + \underline{\hspace{1cm}} \cdot 137 = 149 \cdot 137</math>.</p> <p>Окончательно получим:</p> $\frac{19043}{20431} = \frac{139 \cdot 137}{149 \cdot 137} = \frac{139}{149}$ <p>3.4. Прочитайте решение задачи на сократимость дроби. Решите <b>задачу 5</b>. Найдите все значения <math>m</math>, для которых дробь <math>\frac{11m+3}{13m+4}</math> сократима.</p>	
УЭ-4	<p><b>Цель:</b> овладеть умением решать нестандартные задачи, используя изученный материал</p> <p>4. 1. Решите <b>задачу 6</b>. Можно ли из стержней с длинами 1, 2, ..., 199, используя их все, изготовить каркас куба?</p> <p>Решите <b>задачу 7</b>. Докажите, что сумма двух последовательных нечетных чисел кратна 4.</p>	<p>Внимательно прочтите задачи. <u>Работа индивидуальная.</u></p> <p>Ответьте на направляющие вопросы. Попробуйте решить задачи самостоятельно.</p> <p><u>Проверка – индивидуальная, самоконтроль.</u></p> <p>Проверьте свои решения с решениями в листе «Задачи». <u>Оценка:</u> За каждый правильный ответ - 2 балла Запишите количество баллов в листок самоконтроля.</p>
УЭ-6	<p>Выходной контроль.</p> <p><b>Цель:</b> оценить степень достижения целей урока.</p> <p><u>Выполнить тестовое задание</u></p> <p>Проверьте правильность выполнения задания по эталону.</p>	<p>Найдите файл «Тест 2».</p> <p>Проверка – индивидуальная самоконтроль.</p> <p>Возьмите у учителя ответы для проверки.</p> <p>Подсчитайте количество</p>

		набранных баллов за выполненный тест. Запишите количество баллов в листок самоконтроля.
УЭ-7	<p><i>Цель:</i> подведение итогов урока, оценка себя и своей работы с учетом оценки окружающих.</p> <p>Посчитайте общее число баллов и запишите в листок самоконтроля.</p> <p>Поставьте себе соответствующую оценку.</p> <p>28 – 31 ОТЛИЧНО 21 – 27 ХОРОШО 16 – 20 УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО</p>	<p>Проверка – индивидуальная самоконтроль.</p> <p>Посчитайте общее количество баллов полученных вами за урок.</p> <p>Максимально – 31 балл.</p> <p>Поставьте себе оценку за урок, используя критерии оценок.</p>
УЭ-8	<p>Рефлексия.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– обозначает «Да, я все понял»</li> <li>– обозначает «Я сомневаюсь, что все понял»</li> <li>– обозначает «Я совсем ничего не понял»</li> </ul> <p>Подумайте, отметьте в листе самоконтроля наиболее близкий для вас ответ и по окончании урока сдайте свои материалы с листами самоконтроля.</p>	

#### **Занятие 4. «Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Количество делителей»**

УЭ	Учебный материал с указанием заданий	Руководство по освоению материала
УЭ О	<p><b>Интегрирующая цель:</b></p> <p>Систематизировать знания о простых и составных числах, о разложении числа на простые множители.</p> <p>Обеспечить усвоение теоремы о простом делителе, о делимости произведения на простое число, основной теоремы арифметики.</p> <p>Овладеть умением определять простое число или составное, приводить натуральное число к каноническому виду, решать задачи на нахождение количества делителей натурального числа и обратную задачу (нахождение числа по количеству его делителей).</p>	<p>Ознакомьтесь с материалами файла «Лекция 1», с листом самоконтроля.</p>
УЭ-1	<p>Входное тестирование.</p> <p><i>Цель:</i> выявить уровень знаний по теме, определить те виды вопросов, которые вызывают наибольшие затруднения у учащихся.</p> <p><b>Входное тестирование</b> проходит в виде теста. Всем ученикам предлагается один</p>	<p><u>Форма работы индивидуальная.</u></p> <p>Найдите файл «Тест 1».</p> <p>Выполните задания, вносите ответы в соответствующие столбцы таблицы.</p>

	<p>общий вариант.          Качество выполнения проверяется по эталону соседом и, если есть необходимость, ученики получают консультацию учителя.          Запишите количество баллов в листок самоконтроля.</p>	<p><u>Проверка – парная, взаимоконтроль</u></p> <p>Обменяйтесь с соседом заполненными листами «Тест 1», возьмите у учителя ответы для взаимопроверки. Каждый верный ответ – 1 балл. Подсчитайте количество баллов.          Обменяйтесь проверенными листами. Заполните таблицу в листе самоконтроля.</p>
УЭ-2	<p><b>Цель:</b> научиться записывать число в каноническом виде, определять вид числа (простое или составное).          2.1. Запишите дату и тему урока в тетрадь.          2.2. Прочитайте по теоретическому материалу определения простого и составного чисел, канонический вид числа.          2.3. Применяя признаки делимости чисел выполните <b>задачу 1</b>.          Разложите на простые множители число 12345678. Запишите его в каноническом виде.</p> <p>Выполните <b>задачу 2</b>.          Доказать, что число <math>a=8n^2+10n+3</math> является составным при любом натуральном <math>n</math>.</p>	<p><u>Работа индивидуальная.</u></p> <p>Внимательно прочтите теоретический материал.</p> <p><u>Самоконтроль.</u></p> <p>Проверьте свои решения с решениями в листе «Задачи». За первую задачу – 1б. За вторую задачу – 2б.</p> <p><i>Будьте честными!!!</i></p>
УЭ-3	<p><b>Цель:</b> усвоить теоремы о простом делителе, делимости произведения. Научиться решать задачи с их применением.          3.1. Прочитайте по теоретическому материалу (файл «Лекция») теорему о простом делителе, теорему о делимости произведения и ее следствия.          3. 2. Прочитайте решение примеров на применение данных теорем.          3. 3. Выпишите в тетрадь теоремы.</p> <p>Выполните <b>задачу 3</b>.          Все ли натуральные числа от 4680 до 4700 являются составными?</p> <p>Выполните <b>задачу 4</b>. Три числа имеют одинаковые остатки при делении на 3. Докажите, что их произведение либо не делится на 3, либо кратно 27.</p> <p>Выполните <b>задачу 5</b>.          Имеет ли решение ребус <math>AB \cdot BG = ДДЕЕ</math>?</p>	<p>Внимательно прочтите теоретический материал.  <u>Работа индивидуальная.</u></p> <p><u>Проверка индивидуальная - самоконтроль.</u>          Проверьте свои решения с решениями в листе «Задачи».</p> <p><u>Оценка:</u>          За каждую задачу – 2 б.</p> <p>Запишите количество баллов в листок самоконтроля.</p>

УЭ-4	<p><i>Цель:</i> овладеть умением решать задачи на нахождение количества делителей числа и обратную задачу.</p> <p>4.1. Найдите в тексте лекции информацию, как найти количество делителей числа, записанного в каноническом виде</p> <p>4.2. Выполните <b>задачу 6</b>.</p> <p>Сколько различных делителей имеет число</p> <p>а) 2450; б) <math>2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5</math>?</p> <p>Выполните <b>задачу 7</b>.</p> <p>Найдите все натуральные числа, делящиеся на 30 и имеющие ровно 30 различных натуральных делителей.</p>	<p>Внимательно прочтите задачи. <u>Работа индивидуальная.</u></p> <p>Попробуйте решить задачи самостоятельно.</p> <p><u>Проверка – индивидуальная, самоконтроль.</u></p> <p>Проверьте свои решения с решениями в листе «Задачи».</p> <p><u>Оценка:</u> За каждый правильный ответ в задаче 6 - 1 балл. За полный ответ в задаче 7 – 3б, если есть вычислительная ошибка – 2б. Запишите количество баллов в листок самоконтроля.</p>
УЭ-6	<p>Выходной контроль.</p> <p><i>Цель:</i> оценить степень достижения целей урока.</p> <p><u>Выполнить тестовое задание</u></p> <p>Проверьте правильность выполнения задания по эталону.</p>	<p>Проверка – индивидуальная самоконтроль.</p> <p>Найдите файл «Тест 2».</p> <p>Возьмите у учителя ответы для проверки.</p> <p>Подсчитайте количество набранных баллов за выполненный тест.</p> <p>Запишите количество баллов в листок самоконтроля.</p>
УЭ-7	<p><i>Цель:</i> подведение итогов урока, оценка себя и своей работы с учетом оценки окружающих.</p> <p>Посчитайте общее число баллов и запишите в листок самоконтроля.</p> <p>Поставьте себе соответствующую оценку.</p> <p>27 – 30 ОТЛИЧНО 20 – 26 ХОРОШО 15 – 19 УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО</p>	<p>Найдите файл «Лист самоконтроля»</p> <p>Проверка – индивидуальная самоконтроль.</p> <p>Посчитайте общее количество баллов полученных вами за урок. Максимально – 30 баллов.</p> <p>Поставьте себе оценку за урок, используя критерии оценок.</p>
УЭ-8	<p>Рефлексия.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– обозначает «Да, я все понял»</li> <li>– обозначает «Я сомневаюсь, что все понял»</li> <li>– обозначает «Я совсем ничего не понял»</li> </ul> <p>Подумайте, отметьте в листе самоконтроля наиболее близкий для вас ответ и по окончании урока сдайте свои материалы с листами самоконтроля.</p>	

**Тестовые задания для проведения проверки сформированности  
результатов обучения  
Занятие 1.**

**Тест 1**

1. Определите все делители и укажите три кратных для чисел 5, 12, 30, 19, 25, 8, 27, 101.
2. Определите, какие из следующих утверждений верны, а какие – нет.
  - а)  $a$  кратно  $b \Rightarrow 2a$  кратно  $b$ ;
  - б)  $a$  - делитель  $b \Rightarrow 2a$  – делитель  $b$ ;
  - в)  $a$  - делитель  $b \Rightarrow b$  – делитель  $a$ ;
  - г)  $a$  - делитель  $b \Rightarrow b$  делится на  $a$ ;
  - д)  $b$  кратно  $a \Rightarrow 2b$  кратно  $a$ ;
  - е)  $a$  делится на  $2b \Rightarrow b$  кратно  $a$
  - ж)  $a$  кратно  $x \Rightarrow 10x$  - делитель  $a$
  - з)  $a$  кратно  $y \Rightarrow y$  – делитель  $10a$ .

**Таблица для заполнения**

Задание 1		
	Делители	Кратные
5		
12		
30		
19		
25		
8		
27		
101		
Задание 2	Верно	Неверно
<i>поставьте галочку в соответствующую колонку</i>		
а)		
б)		
в)		
г)		
д)		
е)		
ж)		
з)		

**Ответы для взаимопроверки**

Задание 1		
	Делители	Кратные
5	1, 5	5, 10, 15
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	12, 24, 36
30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30	30, 60, 90
19	1, 19	19, 38, 57
25	1, 5, 25	25, 50, 75
8	1, 2, 4, 8	8, 16, 24
27	1, 3, 9, 27	27, 54, 81
101	1, 101	101, 202, 303
Задание 2	Верно	Неверно



<i>поставьте галочку в соответствующую колонку</i>		
а)	✓	
б)		✓
в)		✓
г)	✓	
д)	✓	
е)		✓
ж)		✓
з)	✓	

## Тест 2

1. Укажите неполные частные и остатки при делении 35 на 39.
2. Укажите неполные частные и остатки при делении 18724 на 726.
3. Укажите неполные частные и остатки при делении 6894 на 383.
4. Одно число делится на 5, второе число делится на 5. Будет ли их сумма делиться на 5?
5. Одно число делится на 3, второе число делится на 7, будет ли их произведение делиться на 21?
6. Найдите число, при делении которого на 3827 получается неполное частное 826 и остаток 124.
7. Пакет сока стоит 32 рубля. Какое наибольшее количество пакетов сока можно купить на 200 рублей?
8. В пачке бумаги 500 листов. За неделю в офисе расходуется 1200 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 8 недель?
9. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живет в двенадцатом подъезде в квартире № 465, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом пятиэтажный. На каком этаже живет Саша? (На всех этажах число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы).
10. Произведение десяти идущих подряд чисел разделили на 7. Чему может быть равен остаток?

**Таблица ответов**

Номер вопроса	Ответ
1	0 –неполное частное, - 4 - остаток
2	25 – неполное частное, 574 - остаток
3	18 –неполное частное, 0 - остаток
4	да
5	да
6	3161226
7	6
8	20
9	5
10	0

## Занятие 2.

### Тест 1.

1. Верно ли высказывание:  
а) если  $a : 15$ , то  $a : 5$

- б) если  $a : 5$ , то  $a : 15$
- в) если  $a : 30$ , то  $a : 90$
- г) если  $a : 105$ , то  $a : 35$ ?

2. Укажите, какие из следующих утверждений ложные.

- а) Если слагаемые не делятся на какое-то число, то и сумма не делится на это число.
- б) Если произведение двух чисел делится на какое-либо число, то хотя бы один из множителей делится на это число.
- в) Если множители не делятся на какое-нибудь число, то и произведение не делится на это число.
- г) Если разность делится на какое-нибудь число, то и уменьшаемое, и вычитаемое делится на это число.

#### Ответы к тесту

- 1. а) верно; б) неверно; в) неверно; г) верно
- 2. А) Ложное. Пример:  $7+3 = 10$ ; 7 и 3 не делятся на 5, а 10 делится на 5.
- Б) Ложное. Пример:  $6 \cdot 10 = 60$ ; 60 делится на 15, а ни 6, ни 10 не делятся.
- В) Ложное. Пример:  $6 \cdot 10 = 60$ ; ни 6, ни 10 не делятся на 15, а 60 делится на 15.
- Г) Ложное. Пример:  $23 - 21 = 2$ . Разность 2 делится на 2, а 23 и 21 на 2 не делятся.

#### Тест 2.

- 1. Некоторое число делится на 2 и на 3. Обязательно ли оно делится на 6?
- 2. Верно ли, что если число делится на 3 и на 5, то оно делится на 15?
- 3. Всякое ли кратное числа 15 делится нацело и на 3, и на 5?
- 4. Некоторое число делится на 4 и на 6. Обязательно ли оно делится на 24?
- 5. Если в записи числа \*\*\*252 вместо звездочек поставить цифры \_\_\_\_, то полученное число будет кратно 9.
- 6. Какие из чисел  $-900\,007$ ,  $21\,008$ ,  $-111\,072$  и  $732\,237\,001$  делятся на 8?
- 7. Даны числа 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 25, 125. На какие из них не делится число 583 000?
- 8. Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 45 045?
- 9. В тройном королевстве имеют хождение только монеты по 9 и по 15 золотых. Можно ли такими монетами набрать сумму в 50 золотых?
- 10. Кузнечик прыгает вдоль координатной прямой в любом направлении на единичный отрезок за прыжок. Сколько существует различных точек на координатной прямой, в которой кузнечик может оказаться, сделав ровно 6 прыжков, начиная прыгать из начала координат?

**Таблица ответов**

Номер задания	Ответ
1	да
2	да
3	да
4	нет
5	3, 6, 9
6	21008, -111 072
7	3, 7, 9, 13
8	нет
9	нет
10	7

### Занятие 3.

#### Тест 1

1. Задано число 42. Напишите все его делители.
2. Задано число 45. Напишите все его делители.
3. Заданы числа: 2, 3, 5, 12, 18, 20, 22. Выберите делители числа 640.
4. Напиши все числа от 1 до 99, которые кратны 3 и 6.
5. Задано число 14у. Поставьте вместо у такое число, чтобы оно без остатков делилось на 3 и 7.
6. Задумано число X. Вычислите это число, если оно удовлетворяет условиям:  
а)  $340 < X < 348$ ;    б) делится одновременно на 2, 3 и 6;
7. Напишите 3 числа, которые:  
- Делятся и на 2 и на 8;  
- Делятся и на 3 и на 10;  
- Делятся и на 5 и на 7;
8. Найдите НОК для чисел 25 и 15.
9. Найдите НОД для чисел 42 и 96.

**Таблица ответов**

Номер задания	Ответ
1	1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42
2	1, 3, 5, 9, 15, 45
3	2, 5, 20
4	6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96
5	7
6	342
7	8, 16, 24
8	30, 60, 90
9	35, 70, 105

#### Тест 2

1. Найдите НОК для чисел 8, 6 и 12.
2. Найдите НОД для чисел 64 и 48.
3. Найдите с помощью алгоритма Евклида наибольший общий делитель для чисел: 15283 и 10013.

4. Сократите дробь  $\frac{9061}{10127}$

5. Приведите к общему знаменателю  $\frac{111}{21120}$  и  $\frac{1237}{30720}$ .

**Таблица ответов**

Номер задания	Ответ	Оценка за задание
1	24	1 б
2	16	1 б
3	527	2 б
4	$\frac{17}{19}$	2 б
5	$\frac{1776}{2^{11} \cdot 11 \cdot 3 \cdot 5}$ и $\frac{13607}{2^{11} \cdot 11 \cdot 3 \cdot 5}$	2 б

#### Занятие 4.

##### Тест 1

- Выделите простые и составные числа: 81, 16, 23, 160, 310, 41, 191, 345. Запишите их в порядке возрастания.
- Напишите для числа 47 все делители.
- Определите количество делителей числа 250.
- Заданы числа: 345; 5395; 59510; 3639; 6390; 594; 495; 5689
  - Выделите числа, которые делятся на 2;
  - Выделите числа, которые делятся на 3;
  - Выделите числа, которые делятся на 5;
- Разложите следующие числа на простые множители: 30; 46; 240.
- Задано неравенство:  $12 < x < 25$ . Найдите, какие простые числа, удовлетворяют данному неравенству.

**Таблица ответов**

Номер задания	Ответ
1	Простые: 23, 41, 191 Составные: 16, 81, 160, 310, 345
2	1, 47
3	8 делителей
4	делятся на 2: 59510, 6390, 594 делятся на 3: 345, 59510, 3639, 6390, 594, 495 делятся на 5: 5395, 345, 495
5	$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ , $46 = 2 \cdot 23$ , $240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
6	$x = 13, 17, 19, 23$

##### Тест 2

- Делится ли  $2^9 \cdot 3$  на 2?
- Делится ли  $2^9 \cdot 3$  на 5?
- Число 15А делится на 6. Верно ли, что А делится на 6?
- Верно ли, что если натуральное число делится на 4 и на 3, то оно делится на 12?

4. Верно ли, что если натуральное число делится на 4 и на 6, то оно делится на 24?
5. Существуют ли четные простые числа? Если да, то укажите их.
6. Может ли сумма двух простых чисел быть простым числом?
7. Является ли число 181 составным?
8. Запишите число 17600 в каноническом виде.
9. Сколько различных делителей имеет число  $3^5 \cdot 7^2 \cdot 11^3$ ?

**Таблица ответов**

Номер задания	Ответ
1	да
2	нет
3	нет
4	да
5	нет
6	да, 2
7	да, $1 + 2 = 3$
8	да
9	$2^6 \cdot 5^2 \cdot 11$
10	6 делителей, 12 делителей

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализируя свою деятельность, я задаю себе вопрос: «Что приобрели дети, посещая внеурочные занятия?» Прежде всего, ученики приобрели навыки различных видов деятельности. Каждый что-то обдумывал, предлагал, работал с дополнительной литературой, то есть происходила мыслительная деятельность. Была и коммуникативная деятельность – все делились информацией, своими идеями, совместно решали задачи и примеры, задавали вопросы. Однозначно была и практическая работа. Работа по выполнению ряда заданий была групповой, такая организация подразумевала распределение ролей, выполнение работы каждым учеником и объединение усилий в единый результат.

В результате внеурочной деятельности по математике был раскрыт творческий потенциал всех обучающихся. Каждый ученик публично демонстрировал достигнутое. Это было значимо и интересно для детей. Их математический кругозор расширился. Можно говорить и о приобретенных компетенциях детей, а именно – узнали, как сделать, сумели сделать, и будут делать самостоятельно сами в новых ситуациях.

Данная программа апробируется и реализуется на базе образовательного учреждения уже в течении трех лет, необходимо отметить, что в данном издании представлен доработанный материал, который можно использовать как на уроках, так и во внеурочное время с учащимися 7-8 классов.

Вы можете самостоятельно что-то изменить и модернизировать в представленной программе и рекомендациях по ее осуществлению.

Желаю Вам удачи и творческих поисков в вашей подчас не легкой работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М.Х. Болдырева, Ю.П. Карпухин, Г.А. Клековкин, Л.М. Рудман. Факультативный курс по математике. 8 класс. Самара, 1997.
  2. М. Х. Болдырева, Ю. П. Карпухин, Г.А. Клековкин. Избранные вопросы школьного курса математики. Выпуск 7. Комбинаторика. Бином Ньютона. Самара, 2002.
  3. В. А. Булычев, Е.А. Бунимович. Комбинаторика. Элементы теории вероятностей и статистики. Журнал «Математика в школе», 2011, № 5, стр. 8-17.
  4. И. М. Гельфанд, А. Х. Шень. Алгебра. М.: ФАЗИС, 2000.
  5. В. П. Ефремов, Л. И. Ефремова. Нестандартные задачи на уроках и после. Журнал «Математика в школе», 2003, № 3, стр. 56-59.
  6. Ю. Н. Кулюткин. Эвристические методы в структуре решений. М.: Педагогика, 1970
  7. И. Лакатос. Доказательства и опровержения. М.: Наука, 1967.
  8. А. Г. Мадера, Д.А. Мадера. Математические софизмы. - М. Просвещение, 2003.
  9. Т. Н. Миракова. Развивающие задачи на уроках математики в V – VIII классах: пособие для учителя. Львов. Журнал «Квантор», 1991.
  10. В. В. Мирошин. Делимость натуральных чисел в задачах С6 из ЕГЭ. Журнал «Математика в школе», 2011, № 3, стр. 21-30.
  11. Д.Л. Модель. Треугольник Паскаля и элементы комбинаторики в школьном курсе математики. Журнал «математика в школе», 2008, № 4, стр. 43-48.
  12. Д. Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.
  13. Г.И. Саранцев. Обучение математическим доказательствам в школе. Кн. для учителя. М : Просвещение, 2000.
  14. А.И. Сгибнев. Делимость и простые числа. – М.: МЦНМО, 2012
  15. А. В. Спивак. Тысяча и одна задача по математике: кн. для учащихся 5-7 кл. М.: Просвещение, 2005.
  16. М. В. Ткачева, Н.Е. Федорова. Элементы стохастики в курсе математики VII-IX классов основной школы. Журнал «Математика в школе», 2003, № 3, стр. 36 -50.
  17. Ю.Ф. Фоминых. Делимость чисел. Журнал «Математика в школе», 1998, № 2, стр. 80-84.
- Электронные образовательные ресурсы:***
18. <http://fcior.edu.ru/>- федеральный центр информационно-образовательных ресурсов.
  19. <http://learningapps.org/>- приложение Web 2.0 для поддержки обучения и процесса преподавания с помощью интерактивных модулей.
  20. <http://www.mathvaz.ru/> - сайт Досье школьного учителя математики. Математические диктанты, тренажеры.
  21. <http://mmmf.msu.ru/lect/lect.html> - сайт малого Мехмата МГУ. Популярны лекции по математике.

22. <http://school-collection.edu.ru/> - комплект цифровых образовательных ресурсов.

23. <http://problems.ru/> - база олимпиадных задач по математике.

24. CD-ROM Учебное электронное пособие – практикум «Новые возможности для изучения математики». – ООО «Дрофа», 2004.

Для выполнения научно-исследовательской работы или проекта предлагаются методические рекомендации с сайта Конференции исследовательских и проектных работ обучающихся образовательных организаций России «Думай глобально – действуй локально!», реализуемая в рамках Программы Общероссийского общественного движения творческих педагогов «Исследователь» (<http://www.konfdg.ru/>).

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Задачи – исследования к модулю «Делимость чисел»

**Задача 1.** Проверьте, делятся ли на 11 числа 101, 1001, 10001, 100001, 1000001, 10000001. Подметьте закономерность и заполните пропуски в предложениях.

Число 100...001 делится на 11, если количество нулей \_\_\_\_.

Число 100...001 не делится на 11, если количество нулей \_\_\_\_.

**Задача 2.** При любой перестановке цифр простого числа 311 опять получается простое число. Проверьте это. Найдите все двузначные числа, обладающие таким же свойством. Заполните пропуски в предложениях.

Все двузначные числа, обладающие таким же свойством (в порядке возрастания): \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_

Наименьшее трехзначное число, обладающее таким же свойством \_\_\_\_.

**Задача 3.** Запишите первые шесть последовательных составных чисел, имеющих три делителя. Догадайтесь, какими должны быть три следующих числа из этого ряда и проверьте себя с помощью компьютера. Какие натуральные числа имеют ровно три делителя?

Простое число имеет два делителя. А сколько делителей имеет квадрат простого числа? Куб простого числа? Четвертая степень простого числа? Пятая степень? Проведите исследование на конкретном примере, взяв в качестве исходного число 3. Попробуйте сформулировать словами установленную закономерность.

Какие еще числа имеют четыре делителя. Найдите первые 10 таких чисел и в каждом случае найдите все их делители. Что это за числа?

**Задача 4.** Известно, что если два трехзначных числа при делении на 7 дают одинаковые остатки, то, записав эти числа рядом, получим шестизначное число, которое нацело делится на 7. Проверьте это утверждение для чисел 628, 446, 628446 и 446628. Сконструируйте свой пример.

### **Задача 5. Числа Мерсенна.**

Марен Мерсенн (1588 - 1648) - французский математик и философ. Со времен учебы дружил с Декартом. Переписывался с Галилеем, Паскалем, Торричелли и Ферма. Когда он жил в Париже, то в его доме еженедельно происходили собрания математиков и физиков, сообщавших результаты своих исследований. Позднее при содействии Кольбера в 1666 году из этого кружка образовалась парижская академия наук. Сочинения самого Мерсенна были посвящены богословию, физике и теории чисел.

Мерсенн исследовал числа вида  $M_p = 2^p - 1$ , где  $p$  – простое число.

$M_2 = 2^2 - 1 = 3$ ; простое число;

$M_3 = 2^3 - 1 = 7$ ; простое число;

Найдите первых шесть чисел Мерсенна и определите, есть ли среди них составные числа.



Математикам всегда было интересно найти самое большое простое число. Леонард Эйлер в своё время нашел большое простое число  $2^{31} - 1 = 2147483647$ .

$p$	Число цифр в числе $p$	Год открытия	Кто открыл
$2^{127} - 1$	39	1876	Люка
$(2^{148} + 1)/17$	44	1951	Феррье
$114(2^{127} - 1) + 1$ $180(2^{127} - 1)^2 + 1$	41 79	1951	Миллер + Уиллер + EDSAC 1
$2^{521} - 1$	157	1952	Лемер + Робинсон + SWAC
$2^{607} - 1$	183		
$2^{1279} - 1$	386		
$2^{2203} - 1$	664		
$2^{2281} - 1$	687		
$2^{3217} - 1$	969	1957	Ризель + BESK
$2^{4253} - 1$	1281	1961	Хурвитц + Селфридж + IBM 7090
$2^{4423} - 1$	1332		
$2^{9689} - 1$	2917	1963	Гиллис + ILIAC 2
$2^{9941} - 1$	2993		
$2^{11213} - 1$	3376		
$2^{19937} - 1$	6002	1971	Такермэн + IBM 360
...			

На сегодняшний день известно более 40 простых чисел Мерсенна. Современная техника позволяет ускорить процессы вычислений, однако все равно это трудоемкий процесс, и тому, кто найдет простое число из более чем 100 000 000 цифр обещана большая премия.

**Задача 6.** Число называется совершенным, если оно равно сумме своих делителей, отличных от него самого. Например, 6 – совершенное число, так как  $6 = 1 + 2 + 3$ .

Евклид обнаружил, что если число  $2^p - 1$  – простое, то число  $2^{p-1}(2^p - 1)$  будет совершенным. Например, для  $p=2$ ,  $2^p - 1 = 2^2 - 1 = 3$ ;  $2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{2-1}(2^2 - 1) = 2 \cdot 3 = 6$ .

Через века Эйлер доказал, что все чётные совершенные числа имеют указанный вид. Существуют ли вообще нечётные совершенные числа науке до сих пор неизвестно.

Найдите три совершенных числа.

**Задача 7.** Прочитайте информацию, проведите числовые эксперименты и подтвердите предлагаемую теорему.

**Последовательность Фибоначчи** – это последовательность, в которой каждый следующий член равен сумме двух предыдущих. Ясно, что такая последовательность полностью определяется первыми двумя членами. Будем обозначать  $\Phi(a;b)$  последовательность Фибоначчи, задающуюся первыми двумя членами  $a$  и  $b$ .

Рассмотрим остатки от деления членов последовательности  $\Phi(0;1)$  на 2: 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, ... (будем называть последовательность остатков от деления чисел последовательности Фибоначчи просто последовательностью остатков). Приведем ещё пример: та же последовательность Фибоначчи, делитель  $k=5$ . Последовательность остатков: 0, 1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, | 0, 1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, | 0, 1, ... Видно, что в первом случае участок 0, 1, 1, а во втором случае участок 0, 1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1 всё время повторяются. Возникает вопрос – будут ли они повторяться бесконечно? Будут ли также периодичны последовательности остатков от деления чисел произвольной последовательности  $\Phi(a;b)$  на произвольное натуральное число  $k$ , большее 1?

**Теорема.** Последовательность остатков от деления чисел произвольной последовательности Фибоначчи на произвольное натуральное число  $k$  всегда периодична.

**Доказательство.** Так же, как и каждый член последовательности Фибоначчи, каждый следующий остаток можно получить из двух предыдущих. Следовательно, если какая-то пара остатков повторится, то последовательность остатков заикнется. Поскольку при делении на  $k$  возможно лишь  $k$  различных остатков, то возможно не более  $k^2$  различных пар остатков. Это число конечно, следовательно, какая-нибудь пара остатков обязательно повторится и последовательность заикнется.

**Задача 8.** В 1742г. в письме к Эйлеру Христиан Гольдбах высказал предположение, которое до сих пор не смогли ни доказать, ни опровергнуть. «Всякое четное число есть сумма двух простых чисел». Проверьте гипотезу Гольдбаха для чисел до 20.

**Задача 9.** Если простые числа отличаются на 2, то их называют числами-близнецами. Например, в первой сотне это 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31, 41 и 43, 59 и 61, 71 и 73. Назовите числа-близнецы из пятой сотни.

### Итоговая работа по модулю «Делимость чисел»

1. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живет в двенадцатом подъезде в квартире № 465, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом пятиэтажный. На каком этаже живет Саша? (На всех этажах число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы).

2. Найдите наименьшее трехзначное число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 дает остаток 2, при делении на 5 дает остаток 3 и которое записано тремя различными нечетными цифрами.

3. Найдите шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 0 и делится на 24.

4. Вычеркните в числе 123456 три цифры так, чтобы получившееся трехзначное число делилось на 27. В ответе укажите получившееся число.

5. Найдите остаток от деления на 7 произведения  $7778 \cdot 7779 \cdot 7780 \cdot 7781 \cdot 7782 \cdot 7783$ .

6. Докажите, что число  $7x + 3$  не является квадратом целого числа ни при каком целом значении  $x$ .

7. Решите в целых неотрицательных числах уравнения:

а)  $2x - 246y = 345$ ;

б)  $69x - 91y = 1996$ .

### **Задания и ответы итоговой работы по модулю «Делимость чисел»**

1. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живет в двенадцатом подъезде в квартире № 465, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом пятиэтажный. На каком этаже живет Саша? (На всех этажах число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы).

Решение: Поскольку в первых 12 подъездах не меньше 465 квартир, в каждом подъезде не меньше  $465:12=40$  квартир. Следовательно, на каждом из 5 этажей в подъезде не меньше 8 квартир.

Пусть на каждой площадке по 8 квартир. Тогда в первых двенадцати подъездах  $8 \cdot 12 \cdot 5=480$  квартир, а в первых одиннадцати – 440. Следовательно, квартира 465 находится в двенадцатом подъезде. Она в нем 25-ая по счету, поскольку на этаже по 8 квартир, она расположена на четвертом этаже.

Ответ: 4.

2. Найдите наименьшее трехзначное число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 дает остаток 2, при делении на 5 дает остаток 3 и которое записано тремя различными нечетными цифрами.

Решение: Число при делении на 2 дает остаток 1, следовательно, оно нечетное. При делении на 3 число дает остаток 2, то есть число имеет вид  $3k+2$ . При делении на 5 число дает остаток 3, то есть число имеет вид  $5m+3$ , то есть число может оканчиваться либо на тройку, либо на восьмерку. Число нечетное, следовательно, может оканчиваться только на тройку. Учитывая, что число может оканчиваться на 3:  $3k+2=10n+3 \geq 100$ . Перебирая значения  $n$ , что при  $n=17$  получаем число, удовлетворяющее условиям задачи. Это число 173.

Ответ: 173.

3. Найдите шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 0 и делится на 24.

Решение: Чтобы число делилось на 24, оно должно делиться на 3 и на 8. Число делится на 8, если три его последние цифры образуют число, делящееся на 8. Искомое число записывается только нулями и единицами, значит, оно заканчивается на 000.

Число делится на 3, если его сумма цифр числа делится на 3. Поскольку три последние цифры числа нули, первые три должны быть единицами.

Таким образом, единственное число, удовлетворяющее условию задачи, это число 111 000.

Ответ: 111 000.

4. Вычеркните в числе 123456 три цифры так, чтобы получившееся трехзначное число делилось на 27. В ответе укажите получившееся число.

Решение: Если число делится на 27, тогда оно делится на 3 и 9 на 9. Число делится на 9, тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 9. Число делится на 3, тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3. Заметим, что, если число делится на 9, то оно делится и на 3. Сумма цифр числа 123456 равна  $1+2+3+4+5+6=21$ . Вычеркнув числа 2, 4 и 6 получим, число, сумма цифр которого равна девяти. Девять делится на девять.

Ответ: 135.

5. Найдите остаток от деления на 7 произведения  $7778 \cdot 7779 \cdot 7780 \cdot 7781 \cdot 7782 \cdot 7783$ .

Решение: Так как  $1111 \cdot 7 = 7777$ , то  $7778 \cdot 7779 \cdot 7780 \cdot 7781 \cdot 7782 \cdot 7783 \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 \equiv 6 \pmod{7}$ .

Ответ: 6

6. Докажите, что число  $7x + 3$  не является квадратом целого числа ни при каком целом значении  $x$ .

Решение: Из условия задачи следует, что число  $7x + 3$  при делении на 7 дает остаток 3. Выясним, могут ли квадраты целых чисел давать при делении на 7 остаток 3.

Очевидно, что любое целое число может быть представимо в виде  $7k$ ,  $7k \pm 1$ ,  $7k \pm 2$ ,  $7k \pm 3$ , где  $k$  - целое число. Найдем квадраты этих чисел.

$(7k)^2 = 7 \cdot 7k^2$ ,  $(7k \pm 1)^2 = 7(7k^2 \pm 2k) + 1$ ,  $(7k \pm 2)^2 = 7(7k^2 \pm 4k) + 4$ ,  $(7k \pm 3)^2 = 7(7k^2 \pm 6k + 1) + 2$ ,

Значит, при делении квадратов целых чисел на 7 могут получиться следующие остатки: 0, 1, 2, 4. Поскольку среди них нет остатка 3 заключаем, что данное число не является квадратом целого числа.

7. Решите в целых неотрицательных числах уравнения:

а)  $2x - 246y = 345$

б)  $69x - 91y = 1996$

Решение: а) Левая часть делится на 2, а правая не делится. Решений в целых числах нет.

б) Перепишем уравнение в виде  $69x - 69y - 22y = 1996$ . Обозначив  $z = x - y$ , получим  $69z - 22y = 1996$ . Обозначив  $t = 3z - y$ , придем к уравнению  $3z + 22t = 1996$ . Его решение легко угадать:  $t = 1$ ,  $z = \frac{1996 - 22}{3} = 658$ . После этого

легко вернуться к искомым неизвестным:

$$y = 3z - t = 3 \cdot 658 - 1 = 1973, \quad x = z + y = 1973 + 658 = 2631.$$

**Математика для увлеченных**  
(курс внеурочной деятельности для учащихся 7-8 классов)

*методические рекомендации*

**Автор:**  
**Ирина Александровна Александрова**

Подготовила оригинал макета Е.Г. Нелюбина

---

Подписано к печати 01.03.2017. Заказ № 218  
Бумага типографическая. Печать оперативная.  
Формат 60х84, 1/16. Объем 3,5 п.л. Тираж 100 экз.

---

Типография  
ООО «ПОРТО-ПРИНТ»:  
443041, Самара, ул. Садовая, д.156.  
тел. (846) 277-17-25