

МАТЕМАТИКА
05 ноября 2022 года

Ученики должны перейти по этой ссылке для привязки своих учётных записей.

https://resh.edu.ru/office/user/link_teacher/?code=0c0e10a314be3b814b8c

Группа	Тема
ПКД 11.9 и ПКД 1.9	Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью.

Задание:

1. Просмотрите видеолекцию по предложенной ссылке
<https://resh.edu.ru/subject/lesson/4724/start/20411/>
<https://resh.edu.ru/subject/lesson/4757/start/20566/>
<https://resh.edu.ru/subject/lesson/6127/start/221519/>
2. Запишите конспект в тетрадь.
3. Выполните задания для самостоятельной работы
<https://resh.edu.ru/subject/lesson/6127/control/1/>

Перпендикулярность прямой и плоскости

Перечень вопросов, рассматриваемых по теме

1. Ввести понятие перпендикулярных прямых в пространстве;
2. Доказать лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых;
3. Решать задачи по теме.

Глоссарий по теме

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° . Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.

Прямая называется **перпендикулярной** к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

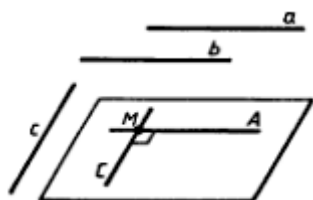
Теорема о прямой перпендикулярной к плоскости. Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

Основная литература:

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия 10-11 кл. Базовый и профильный уровень. М.: Просвещение, 2015. С.1-10.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой..



Доказательство:

Дано: $a \parallel b, a \perp c$

Доказать: $b \perp c$

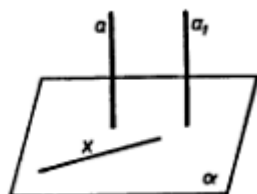
Через точку М пространства, не лежащую на данных прямых, проведем прямые МА и МС, параллельные соответственно прямым a и c . Так как $a \perp c$, то $\angle AMC = 90^\circ$.

Так как $b \parallel a$, $a \parallel MA$, то $b \parallel MA$.

Итак, прямые b и c параллельны соответственно прямым МА и МС, угол между ними равен 90° , т.е. $b \perp MA$, $c \perp MC$, угол между МА и МС равен 90°

Это означает, что угол между прямыми b и c также равен 90° , то есть $b \perp c$.

Теорема. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.



Доказательство:

Дано: $a \parallel a_1, a \perp \alpha$

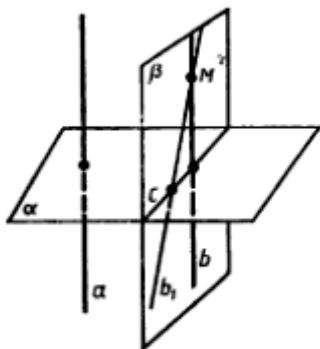
Доказать, что $a_1 \perp \alpha$

Проведем какую-нибудь прямую x в плоскости α , т.е. $x \in \alpha$. Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp x$.

По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей $a_1 \perp x$.

Таким образом, прямая a_1 перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α , т.е. $a_1 \perp \alpha$

Теорема. Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.



Дано: $a \perp \alpha, b \perp \alpha$

Доказать, что $a \parallel b$

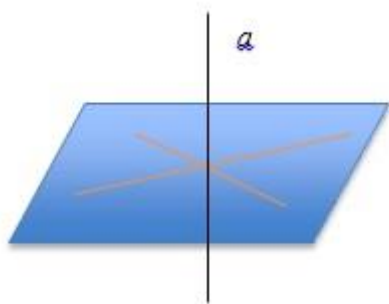
Доказательство:

Через какую-нибудь точку М прямой b проведем прямую b_1 , параллельную прямой a . $M \in b, M \in b_1, b_1 \parallel a$. По предыдущей теореме $b_1 \perp \alpha$.

Докажем, что прямая b_1 совпадает с прямой b . Тем самым будем доказано, что $a \parallel b$.

Допустим, что прямые b_1 и b не совпадают. Тогда в плоскости β , содержащей прямые b и b_1 , через точку М проходят две прямые, перпендикулярные к прямой c , по которой пересекаются плоскости α и β . Но это невозможно, следовательно, $a \parallel b$, т.е. $b \in \beta, b_1 \in \beta, \alpha \cap \beta = c$ (невозможно) $\rightarrow a \parallel b$

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.



Теорема. Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.

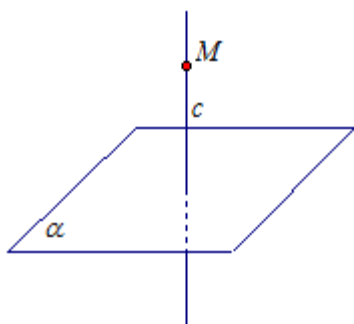


Рис. 2.

Доказательство.

Пусть дана плоскость α и точка M (см. рис. 2). Нужно доказать, что через точку M проходит единственная прямая c , перпендикулярная плоскости α . Проведем прямую a в плоскости α (см. рис. 3). Согласно доказанному выше утверждению, через точку M можно провести плоскость γ перпендикулярную прямой a . Пусть прямая b – линия пересечения плоскостей α и γ .

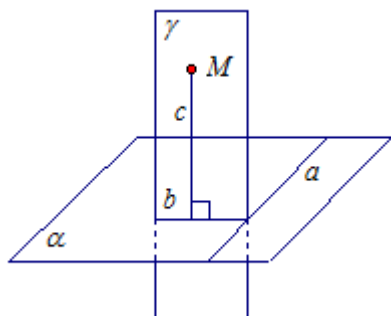


Рис. 3.

В плоскости γ через точку M проведем прямую c , перпендикулярную прямой b . Прямая c перпендикулярна b по построению, прямая c перпендикулярна a (так как прямая a перпендикулярна плоскости γ , а значит, и прямой c , лежащей в плоскости γ). Получаем, что прямая c перпендикулярна двум пересекающимся прямым из плоскости α . Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая c перпендикулярна плоскости α . Докажем, что такая прямая c единственная. Предположим, что существует прямая c_1 , проходящая через точку M и перпендикулярная плоскости α . Получаем, что прямые c и c_1 перпендикулярны плоскости α . Значит, прямые c и c_1 параллельны. Но по построению прямые c и c_1 пересекаются в точке M .

Получили противоречие. Значит, существует единственная прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная плоскости α , что и требовалось доказать.

Теоретический материал для углубленного изучения

Теорема о прямой перпендикулярной к плоскости. Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

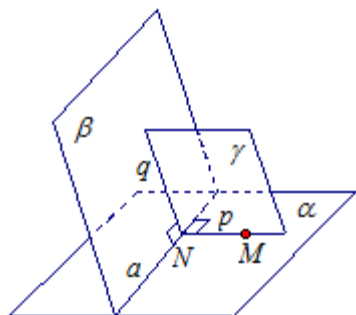


Рис. 1.

Доказательство (см. рис. 1)

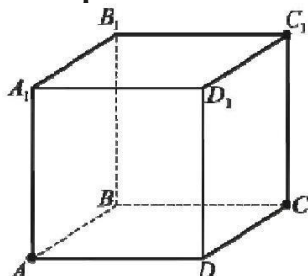
Пусть нам дана прямая a и точка M . Докажем, что существует плоскость γ , которая проходит через точку M и которая перпендикулярна прямой a .

Через прямую a проведем плоскости α и β так, что точка M принадлежит плоскости α . Плоскости α и β пересекаются по прямой a . В плоскости α через точку M проведем перпендикуляр MN (или p) к прямой a , $N \in a$. В плоскости β из точки N восстановим перпендикуляр q к прямой a . Прямые p и q пересекаются, пусть через них проходит плоскость γ . Получаем, что прямая a перпендикулярна двум пересекающимся прямым p и q из плоскости γ . Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая a перпендикулярна плоскости γ .

Примеры и разборы решения заданий тренировочного модуля

Пример 1

Выбор элемента из выпадающего списка



Выпишите ребра, перпендикулярные плоскости (DCC_1) .

- AD, A_1D_1, BC, B_1C_1
- $AD, AC, AD_1,$
- $BC, BA.$

Правильный вариант/варианты (или правильные комбинации вариантов):

- AD, A_1D_1, BC, B_1C_1

Неправильный вариант/варианты (или комбинации):

Все остальные

Подсказка: в кубе все углы по 90° . Плоскость (DCC_1) , проходит через грань куба DD_1C_1C .

- **Разбор задания:** Куб – это геометрическая фигура у которой все углы прямые, следовательно нужно увидеть ребра которые перпендикулярны к плоскости (DCC_1) , к грани куба (DD_1C_1C) . Эти ребра - AD, A_1D_1, BC, B_1C_1

Пример 2

Ребус – соответствия.

Закончите предложение, чтобы получилось верное утверждение.

Утверждение:

- Две прямые называются перпендикулярными, если
- Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она

Варианты ответов:

- угол между ними равен 90°
- перпендикулярна и другой
- параллельны
- один
- она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.
- перпендикулярна плоскости.

Правильный вариант/варианты (или правильные комбинации вариантов):

Две прямые называются перпендикулярными, если ...	угол между ними равен 90°
Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она ...	перпендикулярна и другой

Неправильный вариант/варианты (или комбинации):

Все остальные.

Подсказка:

Лемма: Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к третьей прямой.

Теорема: если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме.

- Доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости

Глоссарий по теме

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .

Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Лемма о перпендикулярности двух прямых к третьей прямой: если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

Теорема о параллельных прямых, перпендикулярных плоскости: если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

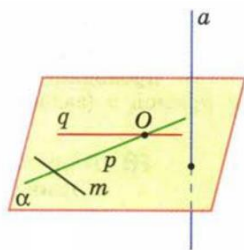
Обязательная литература:

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. Кадомцев С. Б. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 255 с.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Для того чтобы проверить перпендикулярность прямой к плоскости достаточно проверить перпендикулярность лишь к двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

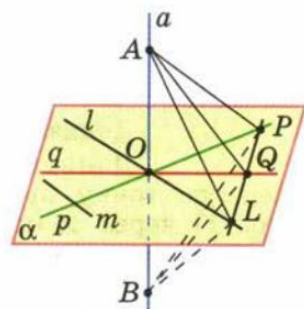
Для доказательства рассмотрим прямую a , перпендикулярную к прямым p и q , лежащим в плоскости α и пересекающимся в точке O (рис. 1).



(Рис. 1)

Сначала рассмотрим случай, когда прямая a проходит через точку O (рис. 2). Проведем через точку O прямую l , параллельную прямой t . Если t проходит через точку O , то в качестве l возьмем саму t .

Отметим на прямой a точки A и B так, чтобы точка O была серединой отрезка AB . Затем проведем в плоскости α прямую, пересекающую прямые p , q и l соответственно в точках P , Q и L .

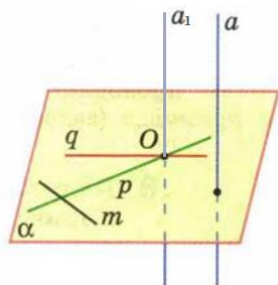


(Рис. 2)

Так как отрезок AO равен OB и прямая a перпендикулярна к прямым p и q , то p и q являются серединными перпендикулярами к отрезку AB . Поэтому отрезок AP равен BP и AQ равен BQ . Следовательно, треугольник APQ равен треугольнику BPQ по трем сторонам. Отсюда получаем, что угол APQ равен углу BPQ . Треугольники APL и BPL равны по двум сторонам и углу между ними, так как отрезок AP равен BP , PL – общая сторона и угол APL равен углу BPL . Значит, отрезок AL равен BL . Значит, треугольник ABL – равнобедренный, а его медиана LO является и высотой, т.е. l перпендикулярна прямой a .

По лемме о перпендикулярности двух прямых к третьей прямой t будет перпендикулярна прямой a . Поэтому a перпендикулярна к любой прямой t плоскости α .

Теперь рассмотрим случай, когда прямая a не проходит через точку O (рис. 3). Проведем через точку O прямую a_1 , параллельную a . По лемме о перпендикулярности двух прямых к третьей, получим, что прямая a_1 перпендикулярна прямым p и q . Поэтому по доказанному в первом случае a_1 перпендикулярна плоскости α .



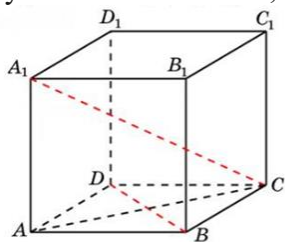
(Рис. 3)

По теореме о параллельных прямых, перпендикулярных плоскости a перпендикулярна к плоскости α .

Теорема доказана.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Пример 1. Докажем, что прямые CA_1 и BD , проходящие через вершины куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, перпендикулярны (рис. 4).



(Рис. 4)

Рассмотрим плоскость ACC_1 и прямую BD . Так как прямая BD перпендикулярна прямым AA_1 и AC , то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая BD перпендикулярна ACC_1 .

Следовательно, прямая BD перпендикулярна любой прямой в ACC_1 . В частности, прямая BD перпендикулярна прямой CA_1 . Что и требовалось доказать.

Тестовый вопрос №5. Верно ли, что если прямая перпендикулярна каким-нибудь двум прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости?

Решение. Воспользуемся признаком перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости. В нем сказано, что прямые в плоскости должны пересекаться. В условии подобного не сказано, поэтому утверждение неверно.

Ответ: неверно.

Тестовый вопрос №7. Треугольник ABC – равносторонний, CD – медиана, MD перпендикулярно плоскости ABC . $AB = 2\sqrt{3}$, $MD = 4$. Найти MC .

Решение. Рассмотрим треугольник ABC . Он равносторонний. Это означает, что его медиана так же является высотой и биссектрисой. Рассмотрим треугольник ADC . Он прямоугольный, т.к. DC медиана и высота. Сторона AD равна $\sqrt{3}$. По теореме Пифагора вычислим длину стороны DC : $DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 3$.

Далее рассмотрим треугольник MDC , он прямоугольный, т.к. MD перпендикулярна плоскости ABC . Воспользовавшись теоремой Пифагора,

найдем MC : $MC = \sqrt{MD^2 + DC^2} = 5$.

Ответ: 5.

Перпендикуляр и наклонные

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме.

- Определение перпендикуляра, наклонной и проекции наклонной на плоскость;
- Доказательство теоремы о трех перпендикулярах;
- Определение угла между прямой и плоскостью.

Глоссарий по теме

Теорема о трех перпендикулярах: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Обратная теорема: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

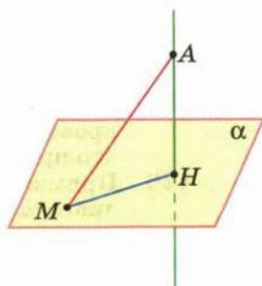
Определение: углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Основная литература:

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. Кадомцев С. Б. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 255 с.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Рассмотрим плоскость α и точку A , не лежащую в этой плоскости (рис. 1). Проведем через точку A прямую, перпендикулярную к плоскости α , и обозначим буквой H точку пересечения этой прямой с плоскостью α . Отрезок AH называется перпендикуляром, проведенным из точки A к плоскости α , а точка H — основанием перпендикуляра. Отметим в плоскости α какую-нибудь точку M , отличную от H , и проведем отрезок AM . Он называется наклонной, проведенной из точки A к плоскости α , а точка M — основанием наклонной. Отрезок HM называется проекцией наклонной на плоскость α .



(Рис. 1)

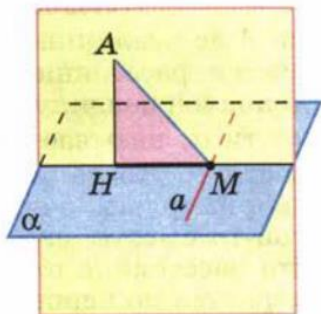
Рассмотрим прямоугольный треугольник AMH . Сторона AH — катет, а сторона AM — гипотенуза, поэтому $AH < AM$. Поэтому перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости. Следовательно, из всех расстояний от точки A до различных точек плоскости α наименьшим является расстояние до точки H . Это расстояние, т. е. длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α , называется расстоянием от точки A до плоскости α .

Стоит отметить, что в случае двух параллельных плоскостей, расстоянием между ними будет расстояние от произвольной точки одной плоскости до другой плоскости.

Например, все точки потолка находятся на одинаковом расстоянии от пола. Если же прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости. В этом случае расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью. Например, все точки прямой b равноудалены от потолка комнаты.

Если мы имеем дело со скрещивающимися прямыми, то расстоянием между ними будет расстояние между одной из этих прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой.

Сформулируем теорему о трех перпендикулярах: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.



(Рис. 2)

На рисунке 2: AH — перпендикуляр к плоскости α , AM — наклонная, a — прямая, проведенная в плоскости α через точку M перпендикулярно к проекции наклонной HM . Докажем, что прямая a перпендикулярна наклонной AM .

Рассмотрим плоскость AMH . Прямая a перпендикулярна HM по условию. Так как прямая a , лежит в плоскости α , а эта плоскость перпендикулярна отрезку AH , то

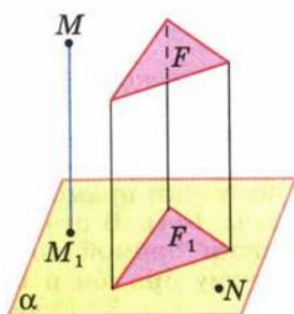
прямая a перпендикулярна к этой плоскости. Отсюда следует, что прямая a перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости AMH , в частности прямая a перпендикулярна отрезку AM . Теорема доказана.

Эта теорема называется теоремой о трех перпендикулярах, так как в ней говорится о связи между тремя перпендикулярами AH , NM и AM .

Справедлива также обратная теорема: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

Введем теперь понятие проекции произвольной фигуры на плоскость. Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости.

Обозначим буквой F какую-нибудь фигуру в пространстве. Если мы построим проекции всех точек этой фигуры на данную плоскость, то получим фигуру F_1 , которая называется проекцией фигуры F на данную плоскость (рис. 3).



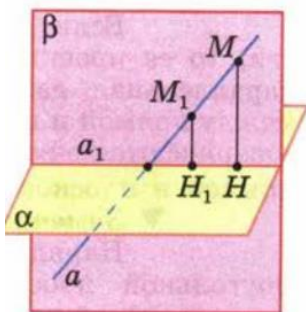
(Рис. 3)

Докажем теперь, что проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая (рис. 4).

Данную плоскость обозначим буквой α . Произвольную прямую, не перпендикулярную к плоскости, обозначим буквой a . Из какой-нибудь точки M прямой a проведем перпендикуляр MH к плоскости α и рассмотрим плоскость β , проходящую через прямую a и перпендикуляр MH . Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой a_1 . Докажем, что эта прямая и является проекцией прямой a на плоскость α . В самом деле, возьмем произвольную точку M_1 прямой a и проведем в плоскости β прямую M_1H_1 , параллельную прямой MH .

Так как отрезок MH перпендикулярен к плоскости α и отрезок MH параллелен M_1H_1 , то отрезок M_1H_1 тоже перпендикулярен плоскости α .

Этим мы доказали, что проекция произвольной точки прямой a лежит на прямой a_1 . Аналогично доказывается, что любая точка прямой a_1 является проекцией некоторой точки прямой a . Следовательно, прямая a_1 — проекция прямой a на плоскость α . Что и требовалось доказать.



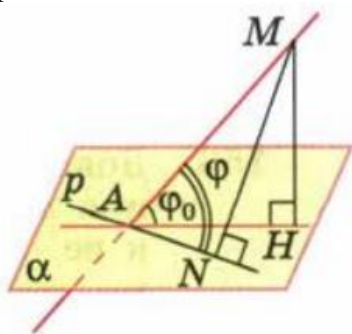
(Рис. 4)

Теперь введем понятие угла между прямой и плоскостью.

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Пример 1. Докажем, что угол между φ_0 между данной прямой AM и плоскостью α является наименьшим из всех углов φ , которые данная прямая образует с прямыми, проведенными в плоскости α через точку A .



(Рис. 5)

Обозначим буквой H основание перпендикуляра (рис. 5), проведенного из точки M к плоскости α .

Рассмотрим произвольную прямую p в плоскости α , проходящую через точку A и отличную от прямой AH .

Угол между прямыми AM и p обозначим через φ .

Докажем, что φ больше чем φ_0 .

Из точки M проведем перпендикуляр MN к прямой p . Если точка N совпадает с точкой A , то φ равняется 90 градусам и поэтому φ больше чем φ_0 . Рассмотрим случай, когда точки A и N не совпадают. Отрезок AM — общая гипотенуза прямоугольных треугольников ANM и AHM , поэтому

$$\sin \varphi = MN/AM$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{MH}{AM}$$

Так как наклонная MN больше, чем перпендикуляр MH , то синус угла φ больше, чем синус угла φ_0 . Поэтому угол φ больше, чем угол φ_0 . Что и требовалось доказать.

Тестовый вопрос №7. Прямая AM перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника ABC , точка H середина стороны BC . Найдите угол между прямой MH и плоскостью ABC , если $AM = a$, $HB = a$.

Решение. Искомый угол — $\angle MHA$.

Рассмотрим треугольник ABC . Он равносторонний. Это означает, что его медиана так же является высотой и биссектрисой. Так как $HB = a$, следовательно, любая сторона треугольника имеет длину $2a$. Рассмотрим треугольник AHB . Он прямоугольный, т.к. AH медиана и высота. По теореме Пифагора вычислим длину

$$\text{стороны } AH: AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = a\sqrt{3}.$$

Далее рассмотрим треугольник MHA , он прямоугольный, т.к. MA перпендикулярна плоскости ABC . Зная это мы можем выразить тангенс искомого

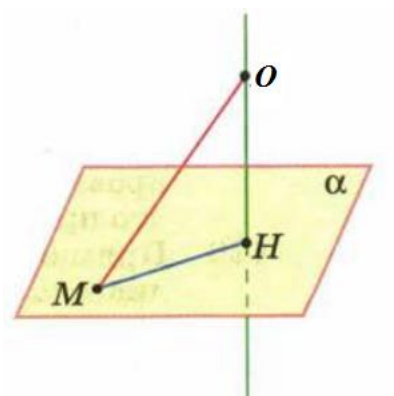
$$\text{угла: } \operatorname{tg} \angle MHA = \frac{MA}{HA} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Отсюда делаем вывод, что искомый угол равен } 30 \text{ градусов.}$$

Ответ: $\angle MHA = 30^\circ$.

Тестовый вопрос №8. Из точки O к плоскости α проведена наклонная, длина которой равна 17 см, проекция наклонной равна 15 см. На каком расстоянии от плоскости находится точка O ?

Решение. Нарисуем рисунок. OH — перпендикуляр, OM — наклонная, длина которой 17 см, MH — проекция наклонной, длина которой 15 см.

Треугольник OHM — прямоугольный, т.к. OH — перпендикуляр. Поэтому OH — искомое расстояние. Найдём его по теореме Пифагора: $OH = \sqrt{OM^2 - MH^2} = 8$ сантиметров.



Ответ: 8 сантиметров.